



DIRO  
IFT 3205

## EXAMEN FINAL

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

*e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

**Date :** *28/09/2012*

I .....	Filtrage Numérique (74 pts)
II .....	Analyse Spectrale (30 pts)
Total .....	104 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

---

**I. Filtrage Numérique (74 pts)**

1. Considérons le filtre numérique (avec  $\rho < 1$ ) décrit par la fonction de transfert suivante

$$H(z) = \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z^2 - \rho\sqrt{2} \cdot z + \rho^2} \quad (1)$$

En se rappelant que lorsque les pôles et/ou les zéros sont complexes, il est plus simple de les calculer sous la forme module/argument, i.e.,  $\rho \exp(j\theta)$  et que

$$(z - \rho \exp(j\theta))(z - \rho \exp(-j\theta)) = z^2 - 2z\rho \cos(\theta) + \rho^2$$

on vous demande de faire une étude de ce filtre, et plus précisément de :

- (a) Trouver l'équation aux différences associée à ce filtre.  
<6 pts>
  - (b) Préciser de quelle famille ce filtre fait partie (RIF ou IIR) et son ordre.  
<3 pts>
  - (c) De calculer les pôles et les zéros de la fonction de transfert et de les représenter dans le plan complexe avec le cercle de rayon unité.  
<6 pts>
  - (d) Préciser, en le justifiant, si ce filtre est stable.  
<3 pts>
  - (e) À partir de la fonction de transfert et de la position des pôles et des zéros de celle-ci, calculer le gain statique et le gain à la fréquence de Shannon (en fonction de  $\rho$  et en prenant  $\rho = 0.99$ ). Tracer l'allure du module de la réponse fréquentielle de ce filtre.  
<8 pts>
  - (f) Donner la réponse impulsionnelle du système à partir de l'équation aux différences (4 premiers échantillons, i.e. ;  $y(0), y(1), y(2), y(3)$  et pour  $\rho = 0.99$ )  
<5 pts>
  - (g) Donner une application dans laquelle il serait intéressant d'utiliser ce filtre.  
<5 pts>
2. On considère maintenant le filtre numérique décrit par l'équation Eq. (1) mais avec  $\rho = 0$ .
- (a) Re-préciser maintenant de quelle famille ce filtre fait partie, son ordre, représenter ces nouveaux pôles/zéros dans le plan complexe avec le cercle de rayon unité, son gain statique et son gain à la fréquence de Shannon.  
<8 pts>
  - (b) Tracer l'allure du module de la réponse fréquentielle de ce filtre et préciser bien la nature de ce filtre et aussi (en justifiant bien votre réponse), quelle est la différence avec le filtre numérique précédent (i.e., celui de la question 1.). Ce filtre pourrait-il être utilisé pour l'application que vous avez donné en 1.(g) ?  
<8 pts>
  - (c) Trouver la réponse impulsionnelle de ce filtre.  
<6 pts>
  - (d) Trouver la réponse indicielle de ce filtre.  
<6 pts>
  - (e) Trouver la réponse de ce filtre à une rampe  $n \mathcal{U}(n)$ .  
<10 pts>
-

## Réponse

**1(a)**

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z^2 - \rho\sqrt{2} \cdot z + \rho^2} = \frac{1 - \sqrt{2} \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - \rho\sqrt{2} \cdot z^{-1} + \rho^2 \cdot z^{-2}} \\ Y(z) \{1 - \rho\sqrt{2} \cdot z^{-1} + \rho^2 \cdot z^{-2}\} &= X(z) \{1 - \sqrt{2} \cdot z^{-1} + z^{-2}\} \\ \Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \rho\sqrt{2} y(n-1) - \rho^2 y(n-2) + x(n) - \sqrt{2} x(n-1) + x(n-2) \end{aligned}$$

<6 pts>

**1(b)**

Filtre RII (ou IIR en anglais), i.e., de réponse impulsionnelle infinie du second ordre (présence de  $y(n-2)$  et pôles actifs qui ne se trouvent pas à l'origine), conduisant à une équation récurrente.

<3 pts>

**1(c)**

$$\text{On a : } (z - \rho \exp(j\theta))(z - \rho \exp(-j\theta)) = z^2 - 2z\rho \cos(\theta) + \rho^2$$

En identifiant, on trouve facilement :

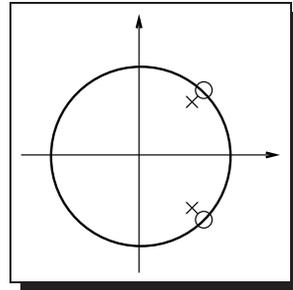
$$H(z) = \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z^2 - \rho\sqrt{2} \cdot z + \rho^2} = \frac{(z - \exp(j\frac{\pi}{4}))(z - \exp(-j\frac{\pi}{4}))}{(z - \rho \exp(j\frac{\pi}{4}))(z - \rho \exp(-j\frac{\pi}{4}))}$$

On a donc deux zéros complexes conjugués :  $z_{1,2} = \exp(\pm j\frac{\pi}{4})$

<3 pts>

et deux pôles complexes conjugués :  $p_{1,2} = \rho \exp(\pm j\frac{\pi}{4})$

<3 pts>



**1(d)**

Il est précisé dans l'énoncé que  $q < 1$ , donc ce filtre est stable pour toute les valeurs de  $q$  positive puisque les deux pôles sont à l'intérieur du cercle de rayon unitaire.

<3 pts>

**1(e)**

On a, respectivement pour le gain statique  $H(z=1)$  (i.e., pour la fréquence numérique  $f=0$ ) et gain à la fréquence de Shannon (pour la fréquence numérique  $f=1/2$ )  $H(z=-1)$

$$\begin{aligned} H(z=1) &= \frac{2 - \sqrt{2}}{1 - \rho\sqrt{2} + \rho^2} \approx 1.0099 \\ H(z=-1) &= \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \rho\sqrt{2} + \rho^2} \approx 1.0100 \end{aligned}$$

Soit presque le gain unité pour le début ( $f = 0$ ) et la fin ( $f = 1/2$ ) du module de la réponse fréquentielle de ce filtre.

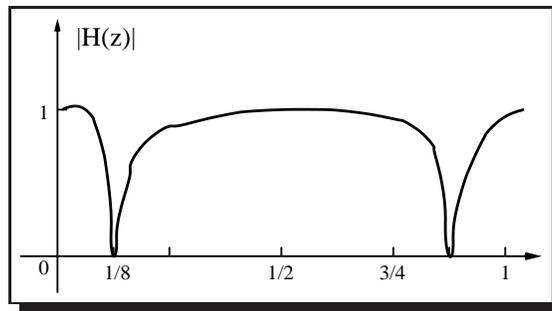
<5 pts>

NOTA : On a tout intérêt à prendre une valeur de  $\rho$  la plus proche de 1 (sans la dépasser toutefois pour des raisons de stabilité des pôles) si on veut garder un gain unité pour les fréquences de ce filtre autre que la fréquence que l'on désire rejeté. En effet, si l'on pose  $\rho = (1 - \epsilon)$ , le gain statique s'écrit (et le même raisonnement tient pour le gain à la fréquence de Shannon) :

$$H(z = 1) = \frac{2 - \sqrt{2}}{1 - (1 - \epsilon)\sqrt{2} + (1 - \epsilon)^2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2} + [\sqrt{2}\epsilon - 2\epsilon + \epsilon^2]}$$

et on a bien  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H(z = 1) = 1$

On sait déjà que le gain est presque l'unité pour le début ( $f = 0$ ) et la fin ( $f = 1/2$ ) du module de la réponse fréquentielle de ce filtre. De plus, les deux zéros se trouvant à la fréquence numérique  $f = 1/8$ , on se retrouve avec un rejeteur de cette fréquence numérique et avec une réponse fréquentielle du style :



<3 pts>

**1(f)**

En utilisant l'équation aux différences, et pour  $x(n) = \delta(n)$ , on obtient :

$$y(n) = 1.4y(n-1) - 0.98y(n-2) + x(n) - 1.41x(n-1) + x(n-2)$$

$$y(0) \approx 1.4y(-1) - 0.98y(-2) + 1 - 1.41x(-1) + x(-2) = 1.0$$

$$y(1) \approx 1.4y(0) - 0.98y(-1) + x(1) - 1.41x(0) = 1.4 - 1.41 \approx -0.01$$

$$y(2) \approx 1.4y(1) - 0.98y(0) + x(2) - 1.41x(1) + x(0) = 1.4 \cdot (-0.01) - 0.98 + 1 \approx 0.0$$

$$y(3) \approx 1.4y(2) + 0.98y(1) + x(3) - 1.41x(2) + x(1) = (1.4 \times 1.976) + (0.98 \times -0.01) \approx 0.014$$

<5 pts>

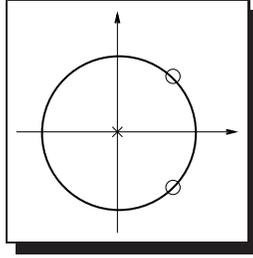
**1(g)**

Un rejeteur de fréquence peut être utilisé comme en TP (Filtre RIF et RII, Question II) pour supprimer une composante fréquentielle parasite dans un signal comme un signal de parole (issu d'une communication par exemple ou autre).

<5 pts>

**2(a)**

On a cette fois ci : 
$$H(z) = \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z^2}$$

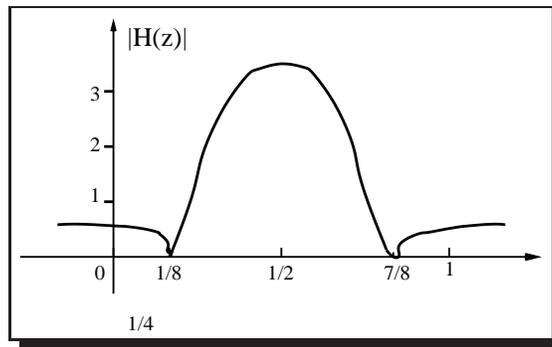


Filtre RIF (ou FIR en anglais), i.e., de réponse impulsionnelle finie du second ordre, avec deux zéros complexes conjugués :  $z_{1,2} = \exp(\pm j\frac{\pi}{4})$ , et un pôle double en 0 et de gain statique  $H(z = 1) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.587$  et de gain à la fréquence de Shannon (pour la fréquence numérique  $f = 1/2$ )  $H(z = -1) = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$ .

< 8 pts >

**2(b)**

Ce sera toujours un rejeteur de fréquence à la fréquence numérique  $f = 1/8$  correspondant à la position, sur le cercle de rayon unité, où se trouve les deux zéros de notre nouvelle fonction de transfert. Cependant, contrairement à la question précédente, notre réponse fréquentielle n'aura plus le gain unité de part et d'autre de la fréquence rejeté. On a, en effet, calculé précédemment, que le gain statique  $H(z = 1) = H(f = 0) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.587$  et de gain à la fréquence de Shannon (pour la fréquence numérique  $f = 1/2$ )  $H(z = -1) = H(f = -1/2) = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$ . On se retrouve donc avec une réponse fréquentielle du style :



< 5 pts >

NOTA : On pourrait calculer la réponse fréquentielle analytique exacte de ce filtre en écrivant  $H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}$  et en faisant le changement de variable  $z = \exp(2\pi j\nu)$ .

$$\begin{aligned}
 H(z = \exp(2\pi j\nu)) &= 1 - \sqrt{2} \exp(-2\pi j\nu) + \exp(-4\pi j\nu) \\
 &= \exp(-2\pi j\nu) \left[ \exp(2\pi j\nu) - \sqrt{2} + \exp(-2\pi j\nu) \right] \\
 &= \exp(-2\pi j\nu) \left[ 2 \cos(2\pi\nu) - \sqrt{2} \right]
 \end{aligned}$$

Ce filtre rejettera ou supprimera bien une composante fréquentielle parasite dans un signal comme un signal de parole (issu d'une communication par exemple ou autre). Néanmoins, du fait que son gain statique et son gain à la fréquence de Shannon n'est pas l'unité, il amplifiera aussi les hautes fréquences de ce signal de parole et atténuera les fréquences basses aussi de ce signal. Ce filtre supprimera bien le bruit parasite mais modifiera sensiblement les fréquences du signal de parole et ajoutera aussi de la distorsion. Dans le cas du design d'un filtre qui doit rejeter une fréquence parasite à une certaine fréquence sans modifier le reste du signal, on préfère ainsi le filtre RII de la question précédente.

< 3 pts >

**2(c)**

On s'attend donc à une réponse impulsionnelle finie. Deux possibilités s'offrent à nous :

- La plus simple consiste à partir de l'équation aux différences associée à notre fonction de transfert, pour  $x(n) = \delta(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Pour } X(z) = 1 \quad H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = Y(z) = \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z^2} = 1 - \sqrt{2} \cdot z^{-1} + z^{-2} \\ &\downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \delta(n) - \sqrt{2} \cdot \delta(n-1) + \delta(n-2) \end{aligned}$$

C'est à dire,  $y(0) = 1, y(1) = -\sqrt{2}, y(2) = 1$  (et  $y(n > 2) = 0$ ).

- L'autre possibilité est d'utiliser l'équation aux différences associée à notre fonction de transfert et itérer quelques itérations (puisque l'on est assuré que l'on a une réponse impulsionnelle finie).

$$\begin{aligned} \text{L'équation aux différences est : } y(n) &= x(n) - \sqrt{2}x(n-1) + x(n-2) \\ \text{Avec } x(n) = \delta(n) \text{ on trouve : } y(0) &= 1 \\ y(1) &= -\sqrt{2} \\ y(2) &= 1 \\ y(3) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

<6 pts>

**2(d)**

On partira de notre fonction de transfert et pour  $x(n) = \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = z/(z-1)$

$$\begin{aligned} \text{Pour } X(z) = \frac{z}{z-1} \quad Y(z) &= \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z^2} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z(z-1)} \\ &= 1 + \frac{z(1 - \sqrt{2}) + 1}{z(z-1)} = 1 + \frac{-1}{z} + \frac{(2 - \sqrt{2})}{z-1} \\ &\downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \delta(n) - \delta(n-1) + (2 - \sqrt{2}) \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

C'est à dire,  $y(0) = 1, y(1) = 1 - \sqrt{2}, y(2) = 2 - \sqrt{2}$  (et  $y(n > 2) = 2 - \sqrt{2}$ ).

<6 pts>

**2(e)**

On partira de notre fonction de transfert et pour  $x(n) = n \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = z/(z-1)^2$

$$\begin{aligned} \text{Pour } X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad Y(z) &= \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1}{z(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{0}{z-1} + \frac{-2\sqrt{2}}{(z-1)^2} = \frac{1}{z} + \frac{-2\sqrt{2}}{(z-1)^2} \\ &\downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \delta(n) - 2\sqrt{2}(n-1)\mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

<10 pts>

NOTA : Le "0" associé à la fraction  $0/(z-1)$  peut se trouver facilement en dernier dans la méthode de décomposition en somme de fractions simples en posant simplement, par exemple,  $z = 2$  pour les deux membres de l'égalité.

---

**II. Analyse Spectrale** (30 pts)

Soit un signal analogique sinusoïdale de fréquence  $F_0 = 176$  Hz dont on souhaite analyser numériquement le spectre en prenant  $N = 1000$  échantillons à la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 10000$  Hz puis en calculant la TFD (Transformée de Fourier Discrète).

1. Quelle est la durée de ce signal ?  
<3 pts>
2. Le spectre d'amplitude laisse apparaître deux pics d'amplitudes importantes et plusieurs pics d'amplitudes faibles. Expliquer pourquoi ?  
<6 pts>
3. Le premier pic correspond à la  $k = 18$  ième valeur d'amplitude. Quelle est la fréquence estimée ?  
<3 pts>
4. Donner l'erreur maximale commise sur l'estimation de la fréquence.  
<3 pts>
5. Donner la valeur de  $N$  nécessaire pour avoir une précision inférieure à 2 Hz.  
<4 pts>
6. Expliquer comment cette précision peut être améliorée en ne modifiant ni  $N$ , ni  $F_e$ .  
<5 pts>
7. Si on prenait cette fois une FFT et 512 (i.e., une puissance de deux) échantillons du signal de départ, et toujours à la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 10000$  Hz. Verrait-on toujours deux pics d'amplitudes importantes et/ou plusieurs pics d'amplitudes faible comme à la question 2. ? Justifiez bien votre réponse.  
<6 pts>

---

**Réponse****1**

Une fréquence d'échantillonnage de  $F_e = 10000$  Hz signifie que l'on prend 10000 échantillons par seconde. Donc 1000 échantillons sont pris en une durée de  $T = 0.1$  seconde.

&lt;3 pts&gt;

**2**

1-] La résolution fréquentielle  $\Delta\nu = 1/T = (1/N\Delta T) = (1/N)F_e = 10$  (avec  $\Delta T$ , la période d'échantillonnage) n'étant pas un sous multiple de 176 Hz, l'énergie fréquentielle de cette sinusoïde se répartira donc entre deux bins fréquentielles, i.e., le 17 ième et le 18 ième.

2-] De plus la fenêtre rectangulaire d'acquisition, (qui va prendre en compte des fausses discontinuités du signal aux extrémités parce que nous n'avons pas un nombre de périodes entières) va augmenter cette élargissement fréquentielle et réaliser, en fait, une convolution du spectre idéale avec la TF d'une porte, i.e., un sinus cardinal.

3-] De plus, on peut penser qu'il y aura forcément aussi du bruit blanc dans le processus d'acquisition électronique de ce signal analogique et donc, la présence de ce bruit blanc va créer des composantes fréquentielles à toute les fréquences et élargir aussi ces raies spectrales.

&lt;6 pts&gt;

**3**

Le 18 ième pics est séparé physiquement de la fréquence 0 par  $18\Delta\nu$ , avec  $\Delta\nu = 1/(N\Delta T) = F_e/N = 10$  ( $\Delta T = 1/F_e$ ). Le 18 ième pics est donc associé à la fréquence physique 180 Hz.

Une autre façon de raisonner, tout aussi valable et équivalent est de dire que le 18 ième pics sur un signal qui en compte  $N = 1000$  échantillons est associée à la fréquence numérique  $f = 18/1000 = 0.018$  et on passe ensuite à la fréquence physique correspondante en multipliant cette fréquence numérique par  $F_e$ , et on trouve aussi 180 Hz.

<3 pts>

4

Par définition, cette erreur est  $\Delta\nu/2$  où  $\Delta\nu$  est la résolution fréquentielle. Ici donc, on a une erreur (borne supérieure de l'erreur) de 5 Hz. Ce qui est vrai puisque la vraie fréquence est de 176 Hz et non pas 180 Hz.

<3 pts>

5

Dans ce cas, il faut que  $\Delta\nu/2 < 2$  i.e.,

$$\Delta\nu = \frac{F_e}{N} < 4$$

$$\frac{N}{F_e} > \frac{1}{4}$$

$$N > \frac{F_e}{4} = 2500 \text{ échantillons}$$

<4 pts>

6

Avec une fenêtre de pondération d'acquisition qui va gommer les fausses discontinuités du signal aux extrémités et ainsi augmenter la précision spectrale ou avec un periodogramme moyenné comme vu en TP.

<5 pts>

7

1-] Cette fois ci, la résolution fréquentielle est  $\Delta\nu = 1/(N\Delta T) = F_e/512 = 19.53$  et  $\Delta\nu = 19.53$  est presque un sous-multiple de 176 Hz (en effet,  $176/19.53 \approx 9.0117$ ). De ce fait, l'énergie fréquentielle de cette sinusoïde se répartira essentiellement (à 98.8% sur le 9ième bin fréquentiel et 1.2% sur le 10 ième bin fréquentiel. Il est donc presque certain, qu'un seul pic d'amplitude importante se détache du spectre.

2-] De plus, la nouvelle longueur du signal est de  $512 \times 10^{-4} = 0.0512$  seconde durant laquelle on pourra apercevoir 9.0112 période du signal dans la fenêtre rectangulaire d'acquisition. Du fait que l'on a un nombre presque entier de périodes ; le nombre de fausses discontinuités du signal aux extrémités sera moins important et fera apparaître moins de pics d'amplitudes faible autour du pic fréquentiel associé à la fréquence  $9 \times 19.53 = 175.77$  Hz.

<6 pts>