



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *27/02/2012*

I	Série & Transformée de Fourier (45 pts)
II	Spectre-Échantillonnage-Reconstruction (22 pts)
III	Filtrage (37 pts)
IV	Calcul de Spectre (16 pts)
Total	120 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Série & Transformée de Fourier (45 pts)

1. Dans le Travaux Dirigé numéro 1 (exercice 5), je vous demandais de calculer le développement en série de Fourier $S(x)$ de la fonction 2π -périodique $f(x)$ suivante :

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in]-\pi, \pi]$$

en utilisant la définition et le calcul intégrale de la décomposition en série de Fourier.

Ce développement en série de Fourier $S(x)$ de cette fonction peut être trouvé sans utiliser directement le calcul explicite des coefficients de Fourier mais en utilisant astucieusement un des développements en série de Fourier trouvés précédemment (dans ce même Travaux Dirigé) et quelques propriétés de la série de Fourier. Re-trouver donc $S(x)$ de cette façon.

<8 pts>

2. Calculer la Transformée de Fourier (TF) de la fonction $\cos^3(x)$ et expliquer les différences existantes avec la série de Fourier de $\cos^3(x)$.

<7 pts>

3. (a) En utilisant la connaissance de TFs déjà vue en cours ou en TD, montrer que

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(x) \exp(-|x|/k)] = \frac{-4\pi j \nu k^2}{1 + 4\pi^2 \nu^2 k^2}$$

où $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe et $k > 0$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

<7 pts>

- (b) Que se passe-t-il lorsque k tend vers l'infini dans la fonction $\text{sgn}(x) \exp(-|x|/k)$? Expliquer le qualitativement, en utilisant par exemple un graphique.

Déduire de la question précédente, la TF de la fonction $\text{sgn}(x)$ et préciser aussi pourquoi on ne pouvait utiliser directement la définition de la TF (basée sur le calcul intégral) pour mener à bien le calcul de la transformée de Fourier de cette fonction $\text{sgn}(x)$.

<6 pts>

4. Trouver la TF de la fonction $x \exp(-x)$ (définie pour $x > 0$).

<6 pts>

5. (a) Calculer par TFD les quatre coefficients spectraux du vecteur de 4 échantillons suivant :

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Indiquer aussi quel intervalle de fréquence sépare le premier du deuxième échantillon.

<5 pts>

- (b) Calculer en utilisant le principe de la FFT les deux premiers échantillons spectraux de ce même vecteur.

<6 pts>

Réponse

1.

La fonction $f(x)$, dont on cherche à trouver son développement en série de Fourier est en fait, à un facteur d'échelle près, (et à la valeur moyenne du signal près), l'intégrale de la fonction f_3 , de période $T = 2\pi$ définie par $f_3(x) = x$ si $x \in]-\pi; +\pi]$, et donnée dans l'exercice 3 de ce même Travaux dirigé. On avait trouvé, pour cette fonction f_3 (et par calcul intégrale), la décomposition suivante :

$$f_3(x) = x \text{ si } x \in]-\pi; +\pi]$$

$$f_3(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Il nous reste donc plus qu'à intégrer cette expression dans un premier temps pour avoir la décomposition en série de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2}$ si $x \in]-\pi; +\pi]$ à la valeur moyenne du signal près

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Puis à multiplier par deux, cette série pour avoir la décomposition en série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ si $x \in]-\pi; +\pi]$ et lui ajouter sa valeur moyenne sur $]-\pi; +\pi]$, égale à $\pi^3/3$, pour obtenir

$$S(x) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

< 8 pts >

2.

Dans un premier temps, on linéarise $\cos^3(x)$

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \cos(x) \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right) = \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{4} (\cos(3x) + \cos(x)) \\ &= \frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{4} \cos(3x) \end{aligned}$$

Avec $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(jx) + \exp(-jx))$ et la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{=} \nu$ et $\exp(2\pi jx\nu_0) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \delta(\nu - \nu_0)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{4} (\cos(3x) + \cos(x)) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{3}{8} \left(\delta\left(\nu - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{2\pi}\right) \right) + \frac{1}{8} \left(\delta\left(\nu - \frac{3}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu + \frac{3}{2\pi}\right) \right)$$

La différence avec la série de Fourier est la présence ici de raies spectrales paires à des fréquences négatives. Ces fréquences négatives proviennent de l'exponentiel complexe du modèle de Fourier.

< 7 pts >

3.(a)

En utilisant le fait que $\exp(-x)$ [pour $(x>0)$] $\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{1+2\pi j\nu}$ déjà vu en Travaux Dirigé et la propriété de contraction-dilatation avec respectivement $a = 1/k$ et $a = -1/k$, on trouve

$$\exp(-x/k) \text{ [pour } (x>0)] \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{k}{1+2\pi jk\nu} \text{ et } \exp(x/k) \text{ [pour } (x<0)] \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{k}{1-2\pi jk\nu}$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(x) \exp(-|x|/k) &= \begin{matrix} \text{pour } (x<0) & & \text{pour } (x>0) \\ -\exp(x/k) \cdot \overbrace{\mathcal{U}(-x)} & + & \exp(-x/k) \cdot \overbrace{\mathcal{U}(x)} \end{matrix} \\ &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{-k}{1-2\pi jk\nu} + \frac{k}{1+2\pi jk\nu} = \frac{-4\pi j\nu k^2}{1+4\pi^2\nu^2 k^2} \end{aligned}$$

< 7 pts >

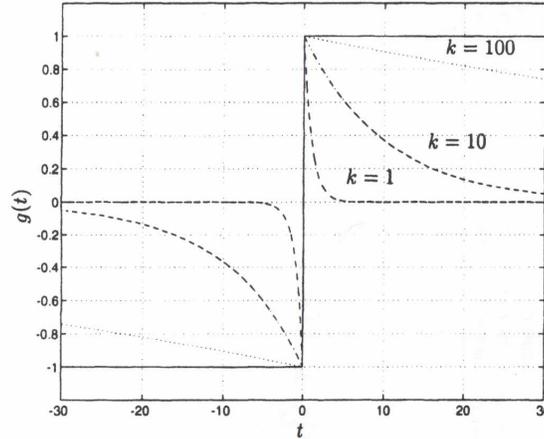
Nota : On pouvait calculer directement l'intégrale mais cela aurait demandé plus d'efforts.

3.(b)

On ne peut utiliser le calcul intégral pour calculer $\mathcal{F}[\text{sgn}(x)]$ car le signal $\text{sgn}(x)$ n'est pas à énergie finie. Pour calculer la fonction $\text{sgn}(x)$, on doit l'exprimer comme étant la limite d'une fonction dont on connaît sa transformée de Fourier.

<2 pt>

Lorsque le paramètre k va tendre vers ∞ , la fonction $\text{sgn}(x) \exp(-|x|/k)$ va tendre vers la fonction $\text{sgn}(x)$



$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{sgn}(x) \exp(-|x|/k) = \text{sgn}(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{-4\pi j \nu k^2}{1 + 4\pi^2 \nu^2 k^2} \right) = \frac{1}{j\pi \nu}$$

$$\text{sgn}(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \quad \frac{1}{j\pi \nu}$$

<4 pts>

4.

On connaît la TF de $\exp(-x)$, pour $x > 0$ (cf. question précédente) et on a de plus $\mathcal{F}[xf(x)] = -\frac{1}{2\pi j} F'(\nu)$ (puisque $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j \nu F(\nu)$, et donc par la propriété duale; $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2\pi j x f(x)$)

$$x \exp(-x) \underbrace{\mathcal{U}(x)}_{\text{pour } (x > 0)} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \quad -\frac{1}{2\pi j} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{1 + 2\pi j \nu} \right) = \frac{-1}{(1 + 2\pi j \nu)^2}$$

<6 pts>

5.(a)

$$F(0) = 1$$

$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \exp(-\pi j x/2) = \left(\frac{1}{4} \exp(0) + \exp(-\pi j/2) + \exp(-\pi j) + \exp(-3\pi j/2) \right) = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0$$

$$F(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \exp(-\pi j x) = \left(\frac{1}{4} \exp(0) + \exp(-\pi j) + \exp(-2\pi j) + \exp(-3\pi j) \right) = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0$$

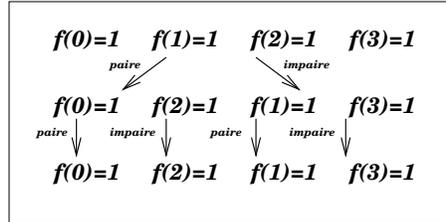
$$F(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \exp(-3\pi j x/3) = \left(\frac{1}{4} \exp(0) + \exp(-3\pi j/2) + \exp(-3\pi j) + \exp(-9\pi j/2) \right) = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0$$

<4 pts>

L'intervalle de fréquence séparant le premier du deuxième échantillon est la résolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/T$ avec T la plus grande période existant dans le signal (i.e., la longueur même du signal, donc $T = 4\Delta T$), avec ΔT , la résolution spatiale; ($\Delta T = 1$ (1 pixel) dans notre cas car on ne connaît pas la période d'échantillonnage) et de ce fait $\Delta\nu = 1/4$ (fréquence numérique).

<2 pts>

5.(b)



On doit donc calculer $F_4(0)$ et $F_4(1)$

$$\begin{aligned}
 F_4(0) &= \frac{1}{2} [F_2^{\text{paire}}(0) + F_2^{\text{impaire}}(0)] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}} + F_1^{\text{impaire}}(0)] + \frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}}(0) + F_1^{\text{impaire}}(0)] \right] \\
 &= \frac{1}{4} [1 + 1 + 1 + 1] = 1
 \end{aligned}$$

<3 pts>

$$\begin{aligned}
 F_4(1) &= \frac{1}{2} [F_2^{\text{paire}}(1) - jF_2^{\text{impaire}}(1)] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}}(1) - F_1^{\text{impaire}}(1)] - (j/2) [F_1^{\text{paire}}(1) + F_1^{\text{impaire}}(1)] \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [1 - 1] - (j/2) [1 - 1] \right] = 0
 \end{aligned}$$

<3 pts>

II. Échantillonnage-Reconstruction (22 pts)

1. (a) Soit la fonction porte (de largeur unité) $f(x) = \Pi(x)$, vue en cours. Trouver le module de $F(\nu)$ (i.e., $|F(\nu)|$) et tracer grossièrement l'allure de $|F(\nu)|$.

<6 pts>

- (b) Si on considère que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 1 % de sa valeur max, avec quelle période d'échantillonnage T_e maximale peut on échantillonner $f(x)$?

<9 pts>

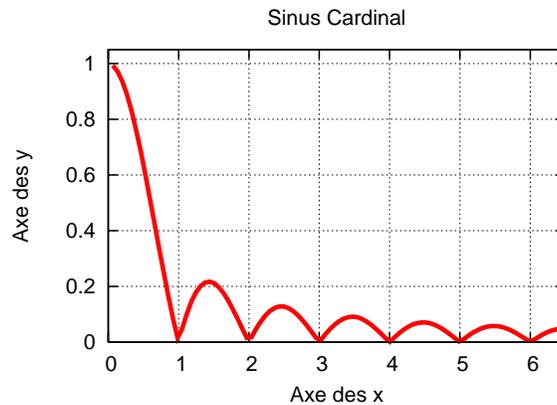
- (c) Si on voulait échantillonner la fonction triangle $\Lambda(x)$ vu en cours, avec le même critère (considérant que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 1% de sa valeur max), s'attendrait-on à avoir une fréquence d'échantillonnage plus ou moins grande? Justifier qualitativement votre réponse.

<7 pts>

Réponse

1.(a)

On sait que $f(x) = \Pi(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)}$



<6 pts>

1.(b)

On a pour $F(\nu)$, le module suivant, $|F(\nu)| = \left| \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \right|$ où les lobes du sinus cardinal atteignent un max tous les $\nu = (n + 0.5)$ avec n un entier naturel et pour lequel $\sin(\pi\nu) = 1$. Pour avoir une amplitude inférieure à 1% du max il faut donc atteindre une fréquence ν_{\max} pour laquelle $\pi\nu > 100$ avec $\nu = (n + 0.5)$ et $n \in \mathbb{N}$ soit pour une fréquence $n = \nu_{\max} = 32$. Selon le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être le double de la fréquence max $\nu_{\max} = 32$ du signal, fréquence, au delà de laquelle, l'amplitude du module est inférieure à 1% du max de l'amplitude du module (et est considéré comme du bruit numérique). On obtient donc une fréquence d'échantillonnage spatiale de $f_e = 64$ ou $T_e = 64$ échantillons par unité de longueur considéré.

<9 pts>

1.(c)

Comparativement à la fonction porte, la fonction triangle $\Lambda(x)$ présente moins de discontinuité. De ce fait, cette comporte moins de hautes fréquences spatiales et il est donc logique de penser que la fréquence d'échantillonnage, respectant le théorème de Shannon (et considérant que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 1% de sa valeur max), devra être moins importante.

Quantitativement, on a

$$\Lambda(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right)^2$$

Il faut donc atteindre une fréquence ν_{\max} pour laquelle $(\pi\nu)^2 > 100$ avec $\nu = (n + 0.5)$ et $n \in \mathbb{N}$ soit pour une fréquence $n = \nu_{\max} = 3$. Selon le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être le double de la fréquence max $\nu_{\max} = 3$, soit pour une fréquence d'échantillonnage spatiale de $f_e = 6$.

<7 pts>

III. Filtrage (37 pts)

1. Quand on dit que le filtre passe-haut amplifie le bruit électronique (Gaussien blanc), il s'agit généralement d'un abus de langage. Comment pourriez-vous re-formuler et re-exprimer cette idée avec toute la rigueur d'un traiteur de signal.

<6 pts>

2. Quelles sont les avantages d'un filtre passe-haut de butterworth par rapport à un filtre passe haut idéal?

<6 pts>

3. Exprimer le calcul de

$$\Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2})$$

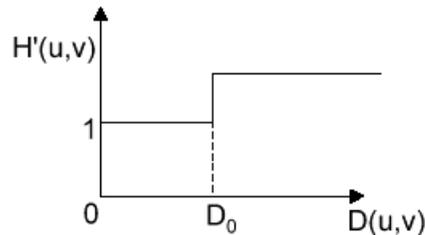
dans lequel $*$ est le produit de convolution et Π est la fonction porte, en fonction de la fonction triangle Δ éventuellement décalée. Utilisez les différentes propriétés du produit de convolution pour arriver à ce résultat.

<6 pts>

4. Montrer, en passant dans le domaine des fréquences, que le filtrage d'un signal ou d'une image par la combinaison (en première étape), d'un filtre passe-bas (de style Gaussien d'écart type σ_s) et d'un filtre passe-haut de style Laplacien (en deuxième étape) permet de fabriquer un filtre passe bande dont la position de la bande de fréquence de ce filtre est fonction du σ_s de la Gaussienne.

<9 pts>

5. Montrer que le filtrage fréquentiel avec une MTF associée à un rehausseur de contour dont le spectre est



est équivalent dans le domaine spatial à une opération du style : [image + image filtrée passe-haut]

<9 pts>

Réponse

1.

Plus précisément, le filtre passe-haut va atténuer beaucoup plus le signal (qui s'étend spectralement dans les très basses et basses fréquences) que le bruit qui lui, lorsqu'il est blanc (i.e., non corrélé), s'étend uniformément sur toutes les fréquences du spectres. Il en résulte donc un rapport signal sur bruit (RSB) de l'image filtrée passe-haut beaucoup plus faible que le RSB de l'image de départ (i.e., avant filtrage). Après filtrage passe-haut, la variance ou l'amplitude du bruit apparait donc amplifié par rapport à la variance ou l'amplitude du signal (en fait, le filtre passe-haut va aussi diminuer la variance ou l'énergie du bruit mais considérablement plus diminuer la variance ou l'énergie du signal).

<6 pts>

2.

En choisissant une pente de la fréquence de la coupure moins abrupte, on aura moins de ringing (ou ripples, ou distorsions)) et un filtrage passe-haut moins sensible au bruit (plus précisément le rapport signal sur bruit de l'estimation du gradient ou des hautes fréquences spatiales de l'image est plus important).

<6 pts>

3.

$$\begin{aligned}
\Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2} \Pi(x - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2} \Pi(x) * \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \delta(x - \frac{1}{2}) \quad (\text{commutativité de } *) \\
&= \frac{1}{2} \Delta(x) * \delta(x - 1) \\
&= \frac{1}{2} \Delta(x - 1)
\end{aligned}$$

Une autre possibilité est de passer dans le domaine Fourier pour calculer cette expression dans le domaine spatial

$$\begin{aligned}
\Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2} \Pi(x - \frac{1}{2}) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \\
\frac{1}{2} \exp(-j\pi\nu) \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) \exp(-j\pi\nu) \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) &= \frac{1}{2} \Lambda(\nu) \exp(-2j\pi\nu) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{2} \Delta(x - 1)
\end{aligned}$$

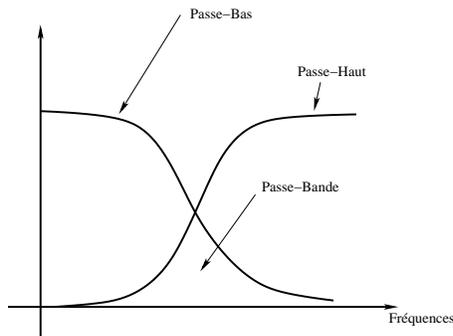
<6 pts>

4.

Soit $i(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{=} I(\nu, v)$, l'image de départ et $g(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{=} G(\nu, v)$, le filtre (ou masque) Gaussien et sa MTF et $l(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{=} L(\nu, v)$, le filtre Laplacien et sa MTF. Ces 2 opérations consistent à faire dans le domaine fréquentielle :

$$I(\nu, v) \cdot (G(\nu, v) \cdot L(\nu, v))$$

soit un filtrage fréquentiel dont la MTF globale résulte de la combinaison de $(G(\nu, v) \cdot L(\nu, v))$. Un graphique montre que la combinaison de ces deux MTF produise une MTF associée à un filtre passe-bande dont la bande de fréquence se déplace d'autant plus vers les basse fréquences que σ_s est grand (une gaussienne avec un grand σ dans le domaine spatiale donnera une Gaussienne avec un petit σ dans le domaine fréquentiel et inversement à cause de la propriété de dilatation-contraction de la TF).



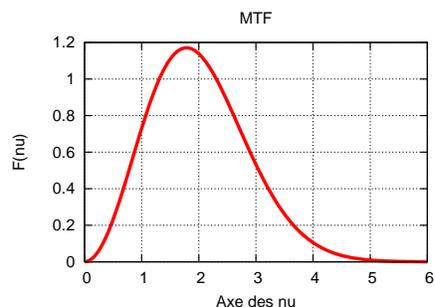
Un autre raisonnement possible consiste à dire que la combinaison de ces deux opérations dans le domaine spatiale conduit à

$$(i(x, y) * g(x, y)) * l(x, y) = i(x, y) * (g(x, y) * l(x, y))$$

en raisonnant en une dimension (selon les x) et en prenant pour la gaussienne, $g(x) = \exp(-\pi x^2 / \sigma_s^2) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \exp(-\pi \nu^2 \sigma_s^2)$, on obtient ;

$$i(x) * (g(x) * l(x)) = i(x) * \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} g(x) \right) \stackrel{\mathcal{F}}{=} I(\nu) \cdot (2\pi j\nu)^2 \cdot \exp(-\pi \sigma_s^2 \nu^2) \propto I(\nu) \cdot \underbrace{\nu^2 \exp(-\pi \sigma_s^2 \nu^2)}_{\text{MTF}}$$

On obtient une MTF associée à un filtre passe-bande.



<9 pts>

5.

Le filtrage fréquentiel d'une image par cette MTF $H'(u,v)$ consisterait à faire dans le domaine fréquentielle :

$$I(u, v) \cdot H'(u, v) = I(u, v) + I(u, v) \cdot H(u, v)$$

Dans lequel $H(u, v)$ est un filtre passe-haut idéal dont la fréquence de coupure est D_0 . En écrivant la relation spatiale équivalente, on obtient (avec la convention $h(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{=} H(u, v)$ ou $h(x, y)$ est la PSF d'un filtre passe haut idéal de fréquence de coupure D_0)

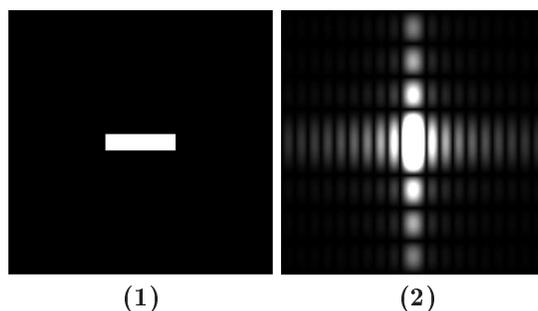
$$i(x, y) * \delta(x, y) + i(x, y) * h(x, y) = i(x, y) + (i(x, y) * h(x, y))$$

soit l'opération [image+image filtrée passe-haut].

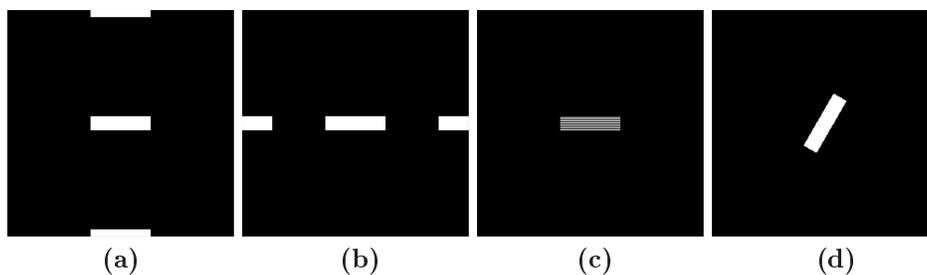
<9 pts>

IV. Calcul de Spectre (16 pts)

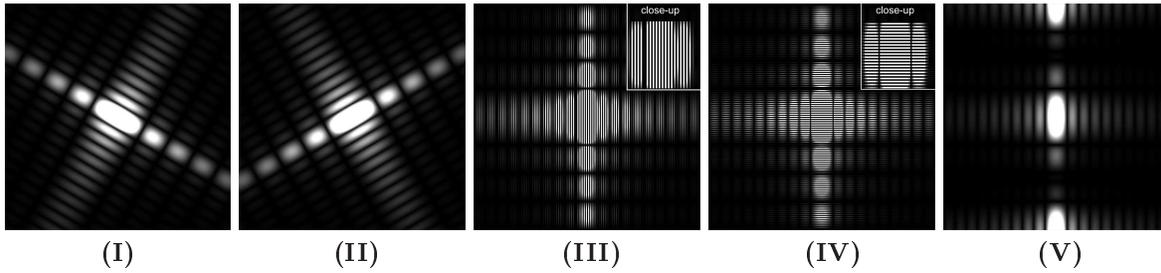
La photo ci-dessous nous montre une image et le module de sa TF après recentrage (au centre de l'image)



Pour chacun de ces quatre signaux 2D :



Indiquer sa transformée de Fourier (module) correspondante après avoir fournit une brève et qualitative explication de votre choix.



Réponse

1.

On va utiliser dans la suite, la convention $x \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$ et $y \xrightarrow{\mathcal{F}} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image) croissantes.

• Le plus simple consiste à trouver, dans un premier temps, le module du spectre associé à l'image (d). Sachant qu'une image rotationnée dans l'espace spatial va donner un spectre rotationné du même angle, on en déduit aisément que l'image (d) est associée au spectre (I). Donc **(I)-(d)**

<4 pts>

Le reste des associations est basée sur la propriété que tout ce qui est périodique dans un espace est discrétisé dans l'autre espace et inversement. Ce qui se traduit mathématiquement par la relation

$$\cdot \text{III}_T \xrightarrow{\mathcal{F}} * \text{III}_{1/T}$$

• Ainsi l'image (a) voit son motif spatial de base (relativement à l'image (1)) périodisée en x avec un peigne de dirac ou les dirac sont espacés de $N/2$ (moitié de l'image), donc son motif spectral (relativement à l'image (2)) sera discrétisé en ν (i.e., verticalement) avec un peigne de dirac dont les dents sont espacés de $2/N$, c'est à dire de deux pixels dans le domaine spectral (la résolution fréquentielle étant ici $\Delta\nu = 1/N$, pour les fréquences numériques de ce spectre). La discrétisation verticale du motif spectral tous les deux pixels (relativement à l'image (2)) conduira au spectre (IV). Donc **(IV)-(a)**

<4 pts>

• L'image (b) voit son motif spatial de base (relativement à l'image (1)) périodisée en y avec un peigne de dirac ou les dirac sont espacés de $N/2$ (moitié de l'image), donc son motif spectral (relativement à l'image (2)) sera discrétisé en v (i.e., horizontalement) avec un peigne de dirac dont les dents sont espacés de deux pixels (cf. raisonnement précédent). La discrétisation horizontale du motif spectral tous les deux pixels (relativement à l'image (2)) conduira au spectre (III). Donc **(III)-(b)**

<4 pts>

• L'image (c) voit son motif spatial de base (relativement à l'image (1)) discrétisé dans la direction verticale avec un peigne de dirac dont les dents sont espacés de deux pixels (mathématiquement, le motif spatial est multiplié par $\text{III}_{T=2}$). Dans le domaine fréquentiel, le motif spectral (relativement à l'image (2)) sera donc périodique (mathématiquement, $* \text{III}_{1/2}$) de période $1/2$. Dans le domaine fréquentiel, chaque échantillon spectral étant séparé de $1/N$ (N étant la taille de l'image), $1/2$ correspondra à la moitié de l'image spectrale. Donc **(V)-(c)**

<4 pts>