



DIRO
IFT 3205

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *10/05/2013*

I	Filtrage Numérique (73 pts)
II	Analyse Spectrale (40 pts)
Total	113 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Filtrage Numérique : Égalisation (73 pts)

Considérons dans cet exercice un modèle de canal de transmission (dégradant un signal d'entrée $x(n)$ en un signal de sortie dégradé $y(n)$) dont la fonction de transfert est de la forme :

$$H(z) = (1 - 3z^{-1})(1 - 0.5z^{-1}) \quad (1)$$

1. Trouver l'équation aux différences (liant $y(n)$ à $x(n)$) associée à ce modèle de dégradation.
<5 pts>
 2. Donner la réponse impulsionnelle de ce système de dégradation à partir de l'équation aux différences (5 premiers échantillons, i.e., $y(n=0), y(n=1), y(n=2), y(n=3), y(n=4)$).
<5 pts>
 3. Donner la réponse impulsionnelle de ce système de dégradation (solution générale $y(n), \forall n$) à l'aide de sa fonction de transfert et de la transformée en Z (TZ) inverse.
<5 pts>
 4. Donner les 5 premiers échantillons de la réponse indicielle de ce système à partir de l'équation aux différences.
<5 pts>
 5. Donner la solution générale de la réponse indicielle de ce système à l'aide de sa fonction de transfert et de la TZ inverse.
<5 pts>
 6. Trouver la solution générale de la réponse de ce système à une rampe $n\mathcal{U}(n)$.
<10 pts>
 7. Préciser, en le justifiant, les propriétés de ce filtre de dégradation, i.e., sa stabilité, sa famille et son ordre.
<5 pts>
 8. Donner les pôles et les zéros de la fonction de transfert et représenter les dans le plan complexe avec le cercle de rayon unité. À partir de la position de ces pôles et de ces zéros et la connaissance de la fonction de transfert, calculer le gain statique et le gain à la fréquence de Shannon et tracer l'allure du module de la réponse fréquentielle de ce filtre de dégradation.
<8 pts>
 9. On désire maintenant corriger le mieux possible les dégradations apportées par ce filtre (qui simule un canal de transmission) par une technique d'égalisation utilisant la technique vue en Travaux Pratique dite par "zero forcing" basé sur la définition d'un filtre numérique correcteur qui tente d'inverser exactement la fonction de transfert du canal.
Trouver donc l'équation aux différences associée au filtre correcteur **stable** permettant d'inverser exactement $H(z)$. Expliquer les différentes étapes de votre raisonnement.
<15 pts>
 10. On désire maintenant quantifier l'efficacité du filtre correcteur inverse *stable* trouvé à la question précédente.
Donner et expliquer les différentes mesures quantitatives vues en Travaux Pratiques et/ou en Cours permettant de quantifier l'efficacité de notre méthode numérique d'égalisation (ou de n'importe quelle autre méthode d'inversion de dégradation) en les classant par ordre de pertinence pour le type de dégradation et de problème considéré ici.
<10 pts>
-

Réponse

1.

On a :
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - 3z^{-1})(1 - 0.5z^{-1}) = 1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}$$

$$Y(z) = X(z) \{1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}\}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

<5 pts>

$$y(n) = x(n) - 3.5x(n-1) + 1.5x(n-2)$$

2.

En utilisant l'équation aux différences $y(n) = x(n) - 3.5x(n-1) + 1.5x(n-2)$, et pour $x(n) = \delta(n)$, on obtient :

$$y(0) = x(0) - 3.5x(-1) + 1.5x(-2) = 1.0$$

$$y(1) = x(1) - 3.5x(0) + 1.5x(-1) = -3.5$$

$$y(2) = x(2) - 3.5x(1) + 1.5x(0) = 1.5$$

$$y(3) = x(3) - 3.5x(2) + 1.5x(1) = 0.0$$

<5 pts>

$$y(4) = x(4) - 3.5x(3) + 1.5x(2) = 0.0$$

3.

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, pour $x(n) = \delta(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = 1$, on obtient

$$\text{Pour : } X(z) = 1 \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Y(z) = 1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = \delta(n) - 3.5\delta(n-1) + 1.5\delta(n-2)$$

C'est à dire, $y(n=0) = 1.0$, $y(n=1) = -3.5$, $y(n=2) = 1.5$ et $y(n \geq 3) = 0$.

<5 pts>

4.

En utilisant l'équation aux différences $y(n) = x(n) - 3.5x(n-1) + 1.5x(n-2)$, et pour $x(n) = \mathcal{U}(n)$, i.e., $x(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$ on obtient :

$$y(0) = x(0) - 3.5x(-1) + 1.5x(-2) = 1.0$$

$$y(1) = x(1) - 3.5x(0) + 1.5x(-1) = -2.5$$

$$y(2) = x(2) - 3.5x(1) + 1.5x(0) = -1.0$$

$$y(3) = x(3) - 3.5x(2) + 1.5x(1) = -1.0$$

<5 pts>

$$y(4) = x(4) - 3.5x(3) + 1.5x(2) = -1.0$$

5.

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, et pour $x(n) = \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = z/(z-1)$, on obtient

$$\text{Pour : } X(z) = \frac{z}{z-1} \quad Y(z) = (1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}) \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2 - 3.5z + 1.5}{z(z-1)} = 1 + \frac{-2.5z + 1.5}{z(z-1)}$$

$$= 1 + \frac{-1.5}{z} + \frac{-1}{z-1}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = \delta(n) - 1.5\delta(n-1) - \mathcal{U}(n-1)$$

On retrouve bien, comme plus haut, $y(n=0) = 1.0$, $y(n=1) = -2.5$, et $y(n \geq 2) = -1$.
<5 pts>

NOTA-1- : On aurait pu trouver le résultat sans décomposition en éléments simples de la façon suivante :

$$Y(z) = \frac{1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - 3.5z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + 1.5z^{-2} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = \mathcal{U}(n) - 3.5 \cdot \mathcal{U}(n-1) + 1.5 \cdot \mathcal{U}(n-2)$$

On retrouve bien, comme plus haut, $y(n=0) = 1.0$, $y(n=1) = -2.5$, et $y(n \geq 2) = -1$.

NOTA-2- : On aurait pu aussi décomposer en éléments simples de la façon suivante :

$$\dots = 1 + \frac{-2.5z + 1.5}{z(z-1)} = 1 + z^{-1} \left\{ \frac{-2.5(z-1) - 1}{z-1} \right\} = 1 - 2.5z^{-1} - z^{-2} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = \delta(n) - 2.5\delta(n-1) - \mathcal{U}(n-2)$$

On retrouve bien, comme plus haut, $y(n=0) = 1.0$, $y(n=1) = -2.5$, et $y(n \geq 2) = -1$.

NOTA-3- : Les trois solutions trouvées plus haut sont donc équivalentes et correspondent au même $y(n)$

$$y(n) = \delta(n) - 1.5\delta(n-1) - \mathcal{U}(n-1)$$

$$= \mathcal{U}(n) - 3.5 \cdot \mathcal{U}(n-1) + 1.5 \cdot \mathcal{U}(n-2)$$

$$= \delta(n) - 2.5\delta(n-1) - \mathcal{U}(n-2)$$

6.

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, et pour $x(n) = n\mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = z/(z-1)^2$, on obtient

$$\text{Pour : } X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad Y(z) = (1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}) \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2 - 3.5z + 1.5}{z(z-1)^2}$$

$$= \frac{1.5}{z} + \frac{-0.5}{z-1} + \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = 1.5\delta(n-1) - 0.5\mathcal{U}(n-1) - (n-1)\mathcal{U}(n-1)$$

C'est à dire, $y(0) = 0$, $y(1) = 1.0$, $y(2) = -1.5$, $y(3) = -2.5$, ...

<10 pts>

NOTA-1- : Le “-0.5” associé au paramètre α de la fraction $\alpha/(z-1)$ peut se trouver facilement en dernier dans la méthode de décomposition en somme de fractions simples en posant simplement, par exemple, $z = 2$ pour les deux membres de l'égalité. Dans ce cas, on trouve $-0.75 = 0.75 + \alpha - 1$ comme équation à résoudre, puis $\alpha = -0.5$.

NOTA-2- : On aurait pu se passer de la décomposition en éléments simples de la façon suivante :

$$Y(z) = (1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}) \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z - 3.5 + 1.5z^{-1}}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2} - 3.5z^{-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} + 1.5z^{-2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = n\mathcal{U}(n) - 3.5(n-1)\mathcal{U}(n-1) + 1.5(n-2)\mathcal{U}(n-2)$$

On retrouve bien, comme plus haut, $y(0) = 0$, $y(1) = 1.0$, $y(2) = -1.5$, $y(3) = -2.5$, $y(4) = -3.5$, ...

NOTA-3- : On aurait pu décomposer en éléments simples de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{z^2 - 3.5z + 1.5}{z(z-1)^2} = z^{-1} \left\{ \frac{z^2 - 2z + 1 - 1.5z + 0.5}{(z-1)^2} \right\} = z^{-1} + z^{-1} \left\{ \frac{-1.5z + 0.5}{(z-1)^2} \right\} \\ &= z^{-1} + z^{-1} \left\{ \frac{-1.5}{(z-1)} + \frac{-1}{(z-1)^2} \right\} \\ &\quad \Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \delta(n-1) - 1.5\mathcal{U}(n-2) - (n-2)\mathcal{U}(n-2) \end{aligned}$$

On retrouve bien, comme plus haut, $y(0) = 0$, $y(1) = 1.0$, $y(2) = -1.5$, $y(3) = -2.5$, $y(4) = -3.5$, ...

NOTA-4- : Les trois solutions trouvées plus haut sont donc équivalentes et correspondent au même $y(n)$

$$\begin{aligned} y(n) &= 1.5\delta(n-1) - 0.5\mathcal{U}(n-1) - (n-1)\mathcal{U}(n-1) \\ &= n\mathcal{U}(n) - 3.5(n-1)\mathcal{U}(n-1) + 1.5(n-2)\mathcal{U}(n-2) \\ &= \delta(n-1) - 1.5\mathcal{U}(n-2) - (n-2)\mathcal{U}(n-2) \end{aligned}$$

7.

C'est un filtre RIF (ou FIR en anglais), i.e., de réponse impulsionnelle finie comme on a pu le constater à la question **2.** ou **3.** et que l'on peut écrire aussi sous la forme :

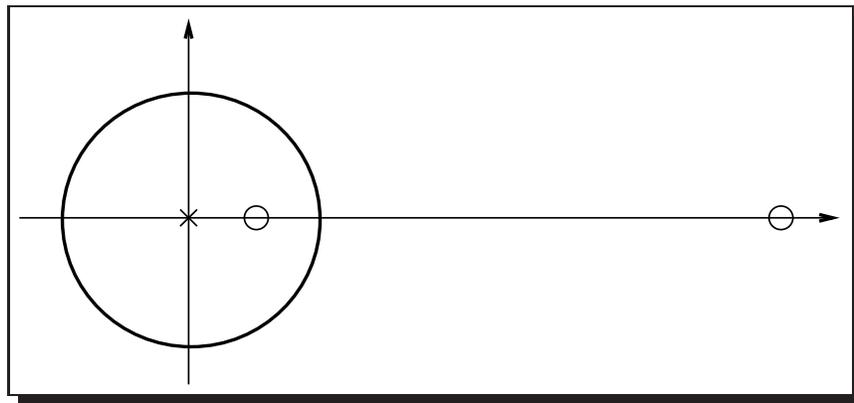
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2} = \frac{z^2 - 3.5z + 1.5}{z^2} = \frac{(z-3)(z-0.5)}{z^2}$$

Filtre du second ordre (avec 2 pôles à l'origine, $p_{1,2} = 0$, caractéristique des filtres RIF) avec deux zéros réels $z_1 = 3$ et $z_2 = 0.5$ conduisant à une équation aux différences non recursive. Ce filtre est forcément stable comme tous les filtres RIF qui ont leurs pôles à l'origine donc à l'intérieur du cercle unité.

< 5 pts >

8.

On a 2 pôles à l'origine, $p_{1,2} = 0$, (caractéristique des filtres RIF) et deux zéros réels $z_1 = 3$ et $z_2 = 0.5$.

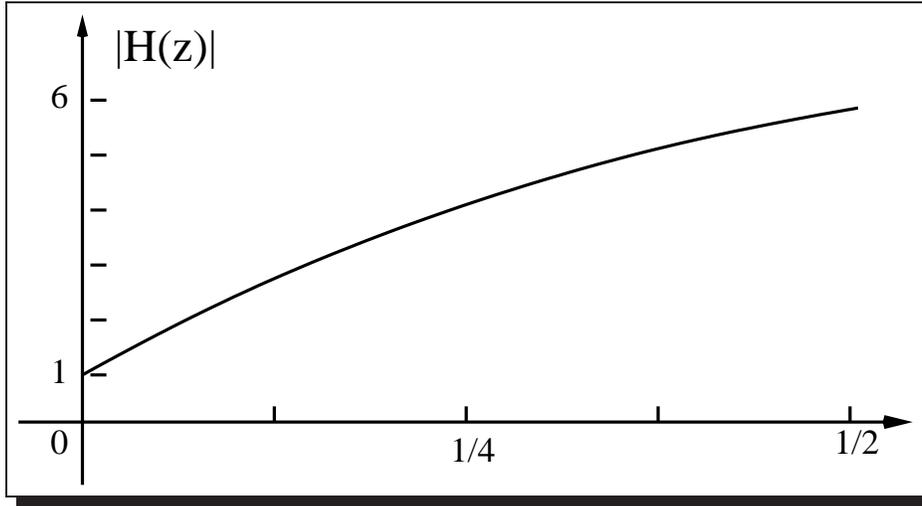


On a, respectivement pour le gain statique $H(z=1)$ (i.e., pour la fréquence numérique $\nu = 0$) et gain à la fréquence de Shannon (pour la fréquence numérique $\nu = 1/2$) $H(z=-1)$

$$|H(z=1)| = \left| \frac{(1-3)(1-0.5)}{1^2} \right| = 1$$

$$|H(z=-1)| = \left| \frac{(-1-3)(-1-0.5)}{1^2} \right| = 6$$

Lorsque z va évoluer sur le cercle unité $\mathcal{C}_{|z|=1}$ faisant ainsi évoluer la fréquence numérique entre $\nu = 0$ et $\nu = 0.5$, les pôles à l'origine et l'absence de zéros pour $H(z)$, autre que sur l'axe des réels, va faire que $|H(\nu)|$ va croître continuellement du gain 1 au gain 6.



< 8 pts >

NOTA-1- : Si on veut plus de précision et, par exemple, définir $|H(\nu = 0.25)|$, on doit estimer $|H(z = j)| = |(j-3)(j-0.5)|/1 = |0.5 - 3.5j| = \sqrt{(0.5^2) + (3.5^2)} = \sqrt{12.5} \approx 3.5$. On pourrait retrouver ce gain en utilisant le rapport du produit des distances entre $z = j$ et ses pôles sur le produit des distances entre $z = j$ et ses zéros. Le produit des distances entre $z = j$ et ses zéros est égale à 1, et le produit des distances entre $z = j$ et ses deux zéros fait apparaître deux hypoténuses dans deux triangles rectangles dont le premier à une longueur de $\sqrt{1^2 + 3^2}$ et le deuxième à une longueur de $\sqrt{1^2 + 0.5^2}$. Le produit de ces deux longueurs ou distances est approximativement égale à 3.5 et correspond au gain de $|H(\nu = 0.25)| \approx 3.5$.

NOTA-2- : On aurait put trouver ce résultat en faisant le chang. de variable $z = \exp(2\pi j\nu)$ dans $H(z)$

$$\begin{aligned} H(z = \exp(2\pi j\nu)) &= 1.5 \exp(-4\pi j\nu) - 3.5 \exp(-2\pi j\nu) + 1 \\ &= 1.5 \exp(-2\pi j\nu) [\exp(-2\pi j\nu) + \exp(2\pi j\nu) - \exp(2\pi j\nu) + 0.6 \exp(2\pi j\nu)] \\ &= 1.5 \exp(-2\pi j\nu) [2 \cos(2\pi\nu) - 2.3] - 0.5 \end{aligned}$$

$$\text{donc } |H(\nu)| = \sqrt{2.25 [2 \cos(2\pi\nu) - 2.3]^2 + 0.25 - 1.5 \cos(2\pi\nu) [2 \cos(2\pi\nu) - 2.3]}$$

Et on obtiendrait le même gain, i.e., $|H(\nu = 0)| = 1$, et $|H(\nu = 0.5)| = 6$ et $|H(\nu = 0.25)| = \sqrt{12.5} \approx 3.54$.

NOTA-3- : On se retrouve avec un canal qui aura pour effet d'amplifier principalement les hautes fréquences du signal d'entrée $x(n)$.

9.

Résumons la technique dite de "zero forcing". Pour inverser parfaitement la dégradation créée par notre canal de transmission de fonction de transfert $H(z) = (z-3)(z-0.5)/z^2$, il faudrait un filtre (correcteur) de fonction de transfert $H_i(z) = z^2/(z-3)(z-0.5)$.

En effet, en supposant $H(z) \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h(n)$ et $H_i(z) \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h_i(n)$, on a $H(z) \cdot H_i(z) = 1 \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h(n) * h_i(n) = \delta(n)$. Le passage d'un signal d'entrée temporel $x(n)$ dans le canal de transmission de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de fonction de transfert $H(z)$, puis dans le filtre correcteur de réponse impulsionnelle $h_i(n)$ et de fonction de transfert $H_i(z)$ sera équivalent, temporellement, à l'opération de filtrage $x(n) * \delta(n) = x(n)$. On retrouvera donc, par cette technique de "zero forcing", le signal avant que celui-ci ne soit dégradé par le canal de transmission.

Malheureusement, dans notre cas, le filtre (inverse) de réponse impulsionnelle $h_i(n)$ et de fonction de transfert $H_i(z)$ n'est pas stable car un de ces deux pôles ($p_1 = 3$) n'est pas à l'intérieur du cercle unité. On peut néanmoins contourner ce problème de stabilité en introduisant un troisième filtre de gain unité et de fonction de transfert $H_s(z) = (z - 3)/(1 - 3z)$.

La combinaison de ces deux filtres de fonction de transfert $H_i(z)$ et $H_s(z)$ permet de considérer le filtre inverse corrigé et stable de fonction de transfert $H_{is}(z)$ suivant :

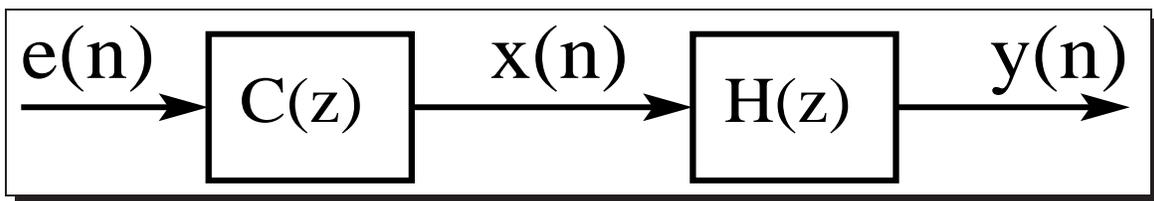
$$\begin{aligned}
 H_{is}(z) = H_i(z) \cdot H_s(z) &= \frac{z^2}{(z-3)(z-0.5)} \cdot \frac{(z-3)}{(1-3z)} = \frac{z^2}{(1-3z)(z-0.5)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \\
 &\quad \downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
 -3y(n+2) + \frac{5}{2}y(n+1) + \frac{1}{2}y(n) &= x(n+2) \\
 y(n) &= \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) - \frac{1}{3}x(n)
 \end{aligned}$$

<15 pts>

NOTA : On se retrouve avec une équation aux différences récursive caractéristiques d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) d'ordre 2, stable (les deux pôles sont à l'intérieur du cercle unité), de gain statique $|H_{is}(z=0)| = 1$ et de gain à la fréquence de Shannon $|H_{is}(z=0.5)| = 1/6$ avec une réponse fréquentielle qui est exactement l'inverse de celle dessinée à la question [8]. Normalement, l'équation aux différences précédente devrait inverser sans problème l'équation aux différences simulant la dégradation de notre canal de transmission donnée à la question [1]. Le problème d'un tel filtre numérique inverse est qu'il est très sensible au bruit et qu'il donnera le signal d'entrée restauré avec un retard d'un échantillon, i.e., un retard de $t = T_e$ où T_e est la période d'échantillonnage de notre signal d'entrée.

10.

Rappelons le type de problème que l'on doit considérer dans cet exercice. Nous avons un signal d'entrée $e(n)$ (de N échantillons) qui rentre dans un canal de transmission, modélisé par sa fonction de transfert $C(z)$, et qui subit une dégradation particulière. Soit $x(n)$ le signal dégradé. On propose, à la question [9], un filtre numérique *stable* permettant d'inverser les dégradations de $C(z)$. Appelons $y(n)$, le signal restauré et $H(z)$, la fonction de transfert de ce filtre correcteur.



[1] La première mesure possible, vue en cours et en Travaux Pratiques (TP), est le traditionnel RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT qui est simplement le rapport entre la puissance du signal sur la puissance du bruit et dont la définition, pour notre filtre correcteur est

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^N e^2(n)}{\sum_{n=0}^N (y(n) - e(n))^2} \right) \quad (\text{en db})$$

Afin d'utiliser pleinement cette mesure, il est souvent utile de préciser cette mesure après avoir quantifié l'importance de la dégradation (générée par le canal dans notre exemple) qui est

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^N e^2(n)}{\sum_{n=0}^N (x(n) - e(n))^2} \right)$$

Plus la mesure du premier SNR est importante, en comparaison de la deuxième mesure, plus le filtre correcteur sera efficace et éliminera des dégradations existantes dans le signal.

[2] Une mesure qui résume les deux mesures précédentes est l'AMÉLIORATION DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT ou ISNR (en anglais IMPROVEMENT SIGNAL TO NOISE RATIO), vue lors du TP "*Filtre de Wiener*" et dont la définition, pour notre filtre correcteur est

$$\text{ISNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^N (e(n) - x(n))^2}{\sum_{n=0}^N (e(n) - y(n))^2} \right) \quad (\text{en db})$$

Une valeur positive et d'autant plus grande permettra de conclure que le filtre correcteur est (d'autant plus) efficace.

[3] Une troisième mesure est celle vue lors du TP débruitage et permet simplement de mesurer la différence au carré entre le signal restauré et le signal d'entrée. C'est le MSE ou MINIMAL SQUARE ERROR. Une valeur d'autant plus petite permettra de quantifier un filtre correcteur d'autant plus efficace.

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (y(n) - e(n))^2$$

[4] Une alternative serait de calculer la réponse impulsionnelle de notre système combinant $C(z)$ et $H(z)$ (i.e., dégradation et correction) pour voir si le résultat, i.e., la sortie $y(n)$ (corrigée) ressemble à un pic de Dirac et quantifier cette ressemblance car celle-ci serait directement liée à la qualité de notre modèle de restauration (ou de dégradation inverse).

NOTA : En prenant comme signal d'entrée de notre filtre correcteur $H(z)$, la réponse impulsionnelle de notre dégradation estimée à la question [3], c'est à dire, $x(n=0) = 1.0$, $x(n=1) = -3.5$, $x(n=2) = 1.5$ et $x(n \geq 3) = 0$. on obtient, avec l'équation aux différences donnée en [9], $y(0) \approx -0.3$, $y(1) \approx 0.89$, $y(2) \approx 0.10$, $y(3) \approx 0.05$, $y(4) \approx 0.023$, $y(5) \approx 0.008$, ..., soit presque un Dirac avec un retard d'un échantillon.

[5] On pourrait utiliser une mesure d'intercorrélation entre le signal $e(n)$ et $y(n)$. Celle-ci, en effet, mesure la ressemblance d'un signal avec un autre et permettrait de quantifier à quel point notre modèle de dégradation inverse restitue bien le signal avant que celui-ci ne soit dégradé par le canal de transmission.

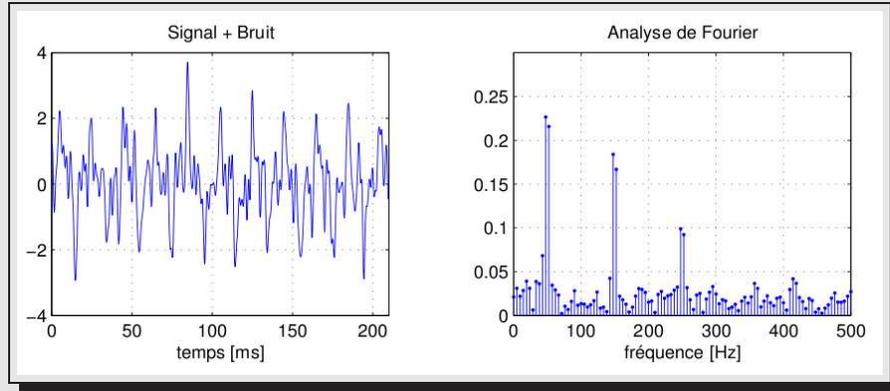
<10 pts>

II. Analyse Spectrale (40 pts)

Soit un signal analogique $x(t)$ de durée $T = 210$ ms (milliseconde) de la forme :

$$x(t) = \alpha_1 \sin(2\pi \cdot 50t) + \alpha_2 \sin(2\pi \cdot 150t) + \alpha_3 \sin(2\pi \cdot 250t) + \text{Bruit}$$

dont on souhaite analyser numériquement le spectre et pour lequel les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont compris dans l'intervalle $[0 : 1]$ et représente de l'information utile.



1. On discretise le signal de durée $T = 210$ ms avec $N = 1050$ échantillons à l'aide d'une TFD (Transformée de Fourier Discrète) et on obtient le spectre de l'image ci-dessus à droite. As-t-on respecté le théorème de Shannon? Justifier bien votre réponse (par un calcul).
<5 pts>
2. Le spectre laisse voir des pics de différentes amplitudes aux fréquences $\{50, 150, 250\}$ Hz, mais ces pics sont dédoublés. Pourquoi? Expliquer clairement ce qui se passe concrètement.
<5 pts>
3. On aimerait garder les mêmes 1050 échantillons du signal précédent, mais utiliser une technique qui nous permette d'utiliser une (et non plusieurs) Fast Fourier Transform (FFT) plus rapide qu'une TFD (pour une implémentation temps réel par exemple). Comment pourrait-on s'y prendre? Discuter du gain en temps de calcul, de la résolution fréquentielle et discuté aussi si cette technique d'analyse spectrale permettrait d'atténuer ou non le problème discuté à la question précédente? Justifier bien votre réponse.
<10 pts>
4. Si on voulait privilégier la résolution fréquentielle pour empêcher autant que possible le dédoublement de pics aux fréquences informatives, et si on voulait garder le nombre $N = 1050$ échantillons et la même période d'échantillonnage ΔT de la question 1. et une seule TF. Expliquer et montrer clairement ce que l'on devrait changer dans cette analyse spectrale qui permettrait de minimiser le problème de dédoublement de pics aux fréquences informatives et qui permettrait néanmoins de respecter le théorème de Shannon.
<5 pts>
5. En utilisant toutes vos connaissances en analyse spectrale, proposer maintenant une stratégie qui permettrait de minimiser le plus possible le problème lié au dédoublement de pics aux fréquences informatives. On désire conserver les $N = 1050$ échantillons de départ (et donc la période d'échantillonnage ΔT qui a permis de les trouver). Donner toutes les informations permettant de reproduire cette analyse spectrale plus précise et justifier les clairement.
<15 pts>

Réponse

1.

On doit échantillonner à une fréquence qui est égale à (au moins) deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal. Dans notre cas, où l'information dans le signal $x(t)$ est modélisée par la présence (plus ou moins importante) des fréquences informatives $\{50, 150, 250\}$ Hz, on devra échantillonner à une fréquence minimale supérieure à 500 Hz ; soit plus de 500 échantillons par seconde. En prenant 1050 échantillons du signal, pour un signal de durée $T = 210$ ms, on échantillonne, dans cet exemple, à $F_e = 5000$ Hz (ou 5000 échantillons par seconde), ce qui assure largement que la fréquence d'échantillonnage de Shannon soit respecté.

<5 pts>

2.

1-] La résolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/T = (1/N\Delta T) = (1/N)F_e = 4.76$ (avec $\Delta T = 0.21/1050 = 0.2$ ms, la période d'échantillonnage et $F_e = 1/\Delta T = 5000$ Hz) n'étant pas un sous multiple de 5 ou de 2.5 Hz (i.e., le multiple commun des trois fréquences informatives $\{50, 150, 250\}$ Hz), l'énergie fréquentielle de chacune des sinusoides se répartira donc entre deux bins fréquentiels.

Par exemple, l'énergie de la sinusoïde de 50 Hz sera répartie entre les bins de fréquences 47.6 Hz ($10 \times \Delta\nu = 10 \times 4.76$) et 52.36 Hz ($11 \times \Delta\nu = 11 \times 4.76$). Étant donné que 50 Hz est à mi chemin des bins de fréquence 47.6 Hz et 52.36 Hz, cette énergie fréquentielle se répartira identiquement entre ces 2 bins conduisant à deux pics de même amplitude (à un bruit près) comme nous le montre le graphique spectral de l'énoncé pour le 10 et le 11 ième échantillon.

2-] De plus la fenêtre rectangulaire d'acquisition, (qui va prendre en compte des fausses discontinuités du signal aux extrémités parce que nous n'avons pas un nombre de périodes entières) va augmenter cette élargissement fréquentiel et réaliser, en fait, une convolution du spectre idéale avec la TF d'une porte, i.e., un sinus cardinal.

3-] De plus, la présence du bruit blanc dans ce signal $x(t)$ va créer des composantes fréquentielles à toute les fréquences et élargir aussi ces raies spectrales.

<5 pts>

3.

La seule solution est donc d'utiliser la technique dite de "zero padding" pour augmenter le nombre d'échantillons de 1050 à 2048 (correspondant à la première puissance de 2 suivant le nombre 1050).

1-] En faisant cela, on diminue bien sur la vitesse de traitement d'un facteur $O(1050^2)/O(2048 \log_2(2048)) \approx 49$!

2-] On augmente aussi artificiellement la durée du signal de $T' = 2048 \times \Delta T = 2048 \times (0.21/1050) = 0.4096$ et on diminue $\Delta\nu = 1/T = 2.44$ Hz ce qui est bien car cela permettra d'augmenter la résolution fréquentielle de notre estimation spectrale.

3-] Est-ce que la résolution fréquentielle permettra d'obtenir des pics non dédoublé comme ceux observés dans le spectre de l'énoncé? Non puisque $\Delta\nu = 2.44$ n'est toujours pas un multiple de 2.5 Hz (i.e., le multiple commun des trois fréquences informatives $\{50, 150, 250\}$ Hz). Par contre, relativement au problème de la question 2., les pics paraîtront certainement moins dédoublés car 2.44 Hz étant très proche de 2.5 Hz, beaucoup moins d'énergie fréquentielle de chacune des sinusoides se répartira donc entre deux bins fréquentiels.

<10 pts>

4.

- Le seul paramètre possible est d'utiliser une fenêtre d'apodisation comme celle de Hanning qui va

réduire les discontinuités du signal aux extrémités de la fenêtre d'acquisition et donc enlever un biais dans le spectre et ainsi augmenter sa résolution spectrale.

• Si on considère dans cette question, que l'on peut changer la période d'échantillonnage qu'en l'abaissant (et ainsi respecter le théorème de Shannon), alors on pourrait combiner aussi l'approche précédente avec le seul paramètre qui nous reste qui est donc la longueur du signal (et dans notre cas, on ne peut que le raccourcir). En prenant une durée du signal $T = 0.2$ ms, on aurait $\Delta\nu = 5$, soit la résolution fréquentielle idéale pour éviter un dédoublement des pics (car c'est un multiple commun des trois fréquences informatives $\{50, 150, 250\}$ Hz).

Avec $T = 0.2$ ms et $N = 1050$ échantillons, la période d'échantillonnage devient $\Delta T \approx 1.90 \times 10^{-4}$ et étant plus petite que celle de la question 1., on respecte donc forcément le théorème de Shannon.

<5 pts>

5.

On va donc utiliser dans cette question la stratégie dite de “*periodogramme moyenné*” qui consiste à calculer la moyenne des spectres obtenus sur chaque bloc de longueur L du signal. Cette stratégie est très adaptée pour un signal bruité et permettra d'augmenter la précision du spectre. Chaque bloc de L données sera aussi pondéré avec une fenêtre de pondération d'acquisition qui va gommer les fausses discontinuités du signal aux extrémités et ainsi augmenter encore la précision spectrale. On pourra utiliser par exemple une fenêtre de Hanning. Dans cette stratégie, énoncée plus haut, nous avons quelques degrés de liberté et quelques contraintes.

1-] En premier lieu le chevauchement de chaque bloc de L données pourra être entre 0% et 50% comme il est conseillé en cours. De plus chaque bloc de L données devra être d'une durée permettant d'assurer une résolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/T = 1/(L \Delta T)$ qui soit un multiple commun des trois fréquences informatives $\{50, 150, 250\}$ Hz afin que l'énergie fréquentielle de chacune des sinusoides ne se répartisse pas entre deux bins fréquentiels.

2-] En tant que contrainte, on devra conserver les 1050 échantillons de départ et conserver $\Delta T = 0.2$ ms.

Donc, on a , $\Delta\nu = 50$ ou 25 ou 12.25 ou 6.25 Hz si on considère des blocs plus petits que 1050 échantillons. Or $\Delta\nu = 1/T$ donc $T = 0.02$ ou 0.04 ou 0.08 ou 0.16 seconde. Le signal durant 0.21 seconde, la valeur de $T = 0.16$ est à écarter car il ne permettrait pas de découper le signal de durée 0.21 sec. en deux blocs se chevauchant entre 0% et 50%. Il reste $T = 0.02$ ou 0.04 ou 0.08 . Avec ces trois valeurs de T possibles et $\Delta T = 0.2$ ms imposé, on aura donc des blocs de longueur $L = 100$ ou 200 ou 400 échantillons.

Prenons pour limiter le nombre de cas le chevauchement de blocs le plus grand entre 0% et 50%. Finalement, on pourra prendre soit des blocs de longueur $L = 100$, ou 200 , ou 400 échantillons, les pondérer par une fenêtre de Hanning. Pour ces trois possibilités, on aura $P = 20$, ou 6 , ou 3 , blocs pour un chevauchement respectivement de 50%, 15%, ou 18.75% (dans tous ces cas, on respecte toujours la fréquence de Shannon, car T_e n'a pas changé).

<15 pts>

NOTA-1- : La plus intéressante des trois possibilités me semble être des blocs de longueur $L = 200$ pondérés par une fenêtre (e.g., de Hanning) pour obtenir $P = 6$ blocs se chevauchant de 15%. Cette stratégie permet de faire un bon moyennage et d'assurer une résolution fréquentielle $\Delta\nu = 25$ Hz qui est un sous multiple des fréquences informatives recherchées.

NOTA-2- : Une autre stratégie plus simple et qui n'utiliserait pas le périodogramme moyenné (et moins efficace) consisterait à faire du “zéro padding” entre le 1050 ième et 2000 ième échantillons. Ce qui permettrait d'assurer une résolution fréquentielle de $\Delta\nu = 1/T = 1/(2000 \times 2 \times 10^{-4}) = 2.5$ Hz qui est un sous multiple des fréquences informatives recherchées.