



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 11/03/2013

I	Transformée de Fourier (44 pts)
II	TFD et calcul de Spectre (38 pts)
III	Filtrage (41 pts)
Total	120 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (41 pts)

1. Soit la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = \exp(-x)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$.
 - (a) Calculer $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, i.e., la Transformée de Fourier (TF) de $f(x)$.
<5 pts>
 - (b) Donner $G(\nu)$, la TF de $g(x) = x \exp(-x)$ si $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$, soit par calcul, ou soit en utilisant la connaissance de $\mathcal{F}[x f(x)]$.
<5 pts>
2. Par calcul ou par déduction de la question précédente et en utilisant les propriétés de la TF, donner la TF de $g(-x)$ (la fonction renversée ou retournée de $g(x)$).
<5 pts>
3.
 - (a) Tracer (succintement) l'allure de la fonction $h(x) = |x| \exp(-|x|)$ ($\forall x$).
<3 pts>
 - (b) Préciser comment cette fonction $h(x)$ peut s'écrire à partir de la fonction $g(x)$.
<3 pts>
 - (c) Que peut on dire des propriétés de la Transformée de Fourier de la fonction $h(x) = |x| \exp(-|x|)$ (sans la calculer).
<3 pts>
 - (d) En déduire finalement $H(\nu)$, la TF de $h(x)$ et tracer (succintement) l'allure de la réponse fréquentielle $H(\nu)$.
<6 pts>
4. En vous aidant des propriétés de la TF et de ce que vous avez fait précédemment, trouver $l(x)$ la TF inverse de $L(\nu) = |\nu| \exp(-|\nu|)$ ($\forall \nu$).
<4 pts>
5. En fonction de l'allure de $l(x)$, précisez de quel type de PSF (Point Spread Function) ou de filtre il s'agit ?
<4 pts>
6. Considérons que la fonction $f(x)$ est paire et réelle. Prouver (en utilisant la TF) que pour tout entier $n > 0$, on a aussi

$$\frac{\partial^{(2n+1)} f(x)}{\partial x^{(2n+1)}} \quad \text{est une fonction impaire}$$

où $\partial^n / \partial x^n$ désigne la dérivée n-ième par rapport à x .

<6 pts>

Réponse**1(a)**

Avec la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et en utilisant directement la définition de la TF (puisque le signal $f(x)$ est à énergie finie et absolument intégrable), on obtient

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-2\pi j \nu x) dx = \frac{-1}{1 + 2\pi j \nu} \left[\exp(-x(1 + 2\pi j \nu)) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1 + 2\pi j \nu}$$

<5 pts>

1(b)

En utilisant la connaissance de $\mathcal{F}[x f(x)]$ (montrée en démo 2 et 3), on a la propriété suivante

$$\mathcal{F}[x f(x)] = -\frac{1}{2\pi j} F'(\nu)$$

On trouve donc, en posant $\chi(x)$, le symbole signifiant “ pour $x > 0$ ”

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[x \exp(-x) \chi(x)] = -\frac{1}{2\pi j} \left(\frac{1}{1 + 2\pi j\nu} \right)' = \frac{1}{(1 + 2\pi j\nu)^2}$$

<5 pts>

Nota : Comme le précise l'énoncé, on peut retrouver cette TF par calcul directe, en utilisant directement la définition de la TF, puisque la fonction $g(x) = x \exp(-x)$ si $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$ est à énergie finie et absolument intégrable

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x \exp(-x) \chi(x)] &= \int_0^\infty x \exp(-x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \int_0^\infty x \exp[-x(1 + 2\pi j\nu)] dx \\ &= \left[\frac{-x}{(1 + 2\pi j\nu)} \cdot \exp[-x(1 + 2\pi j\nu)] \right]_0^\infty + \frac{1}{(1 + 2\pi j\nu)} \int_0^\infty \exp[-x(1 + 2\pi j\nu)] dx \\ &= \frac{1}{(1 + 2\pi j\nu)^2} \end{aligned}$$

2.

Comparativement à la question précédente, la fonction est inversée (i.e., retournée). Or on sait que l'inversion d'une fonction donne la conjugaison de sa Transformée de Fourier (i.e., $\# \xrightarrow{\mathcal{F}} *$) ou que (propriété de contraction-dilatation) que $f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F(\frac{\nu}{a})$ et donc que $f(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|-1|} F(-\nu) = F(-\nu)$.

$$\mathcal{F}[g(-x)] = G^*(\nu) = \frac{1}{(1 - 2\pi j\nu)^2}$$

<5 pts>

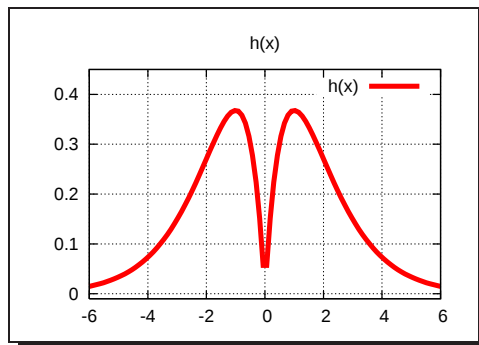
Nota-1- : On aurait pu aussi appliquer la propriété de contraction-dilatation et dire que $f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F(\frac{\nu}{a})$ et donc que $f(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|-1|} F(-\nu) = F(-\nu)$.

Nota-2- : On aurait pu retrouver cette transformée en utilisant directement la définition de la TF, puisque la fonction $g(-x) = -x \exp(x)$ si $x \leq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x > 0$ est absolument intégrable

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[-x \exp(x) \chi(-x)] &= \int_{-\infty}^0 x \exp(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \int_{-\infty}^0 x \exp[x(1 - 2\pi j\nu)] dx \\ &= \left[\frac{x}{(1 - 2\pi j\nu)} \cdot \exp[x(1 - 2\pi j\nu)] \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{(1 - 2\pi j\nu)} \int_{-\infty}^0 \exp[x(1 - 2\pi j\nu)] dx \\ &= \frac{1}{(1 - 2\pi j\nu)^2} \end{aligned}$$

3.(a)(b)

On a $h(x) = g(x) + g(-x)$ avec $h(x)$ une fonction dont l'allure est de la forme suivante



<6 pts>

3.(c)

La fonction $h(x)$ est réelle et paire, donc sa transformée sera réelle (pure) et paire. De plus, $h(x)$ n'étant pas périodique, son spectre $H(\nu)$ sera continu.

<3 pts>

3.(d)

On a donc, puisque la TF est linéaire et que $h(x) = g(x) + g(-x)$ et que $\# \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} *$

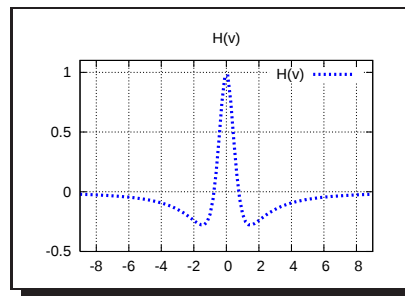
$$\begin{array}{ccccc} h(x) = g(x) & + & g(-x) = & |x| \exp(-|x|) & (\forall x) \\ \Downarrow \mathcal{F} & & \Downarrow \mathcal{F} & \Downarrow \mathcal{F} & \\ \frac{1}{(1+2\pi j\nu)^2} & + & \frac{1}{(1-2\pi j\nu)^2} & = & \frac{2-8\pi^2\nu^2}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} \propto \frac{1-\nu^2}{(1+\nu^2)^2} = H(\nu) \end{array}$$

<6 pts>

4.

La fonction $L(\nu)$ est réelle et paire donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$ et de ce fait on trouvera pour $l(x)$

$$L(\nu) = |\nu| \exp(-|\nu|) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{2-8\pi^2x^2}{(1+4\pi^2x^2)^2} = l(x)$$

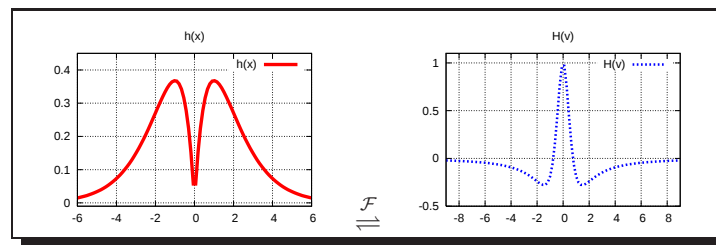


<4 pts>

5.

La forme est typique d'une PSF associée à un filtre passe-haut et on a

<4 pts>



6.

Si $f(x)$ est paire et réelle, $F(\nu)$ (i.e., sa TF) est aussi paire et réelle, de plus nous avons

$$\frac{\partial^{(2n+1)} f(x)}{\partial x^{(2n+1)}} \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi j\nu)^{2n+1} F(\nu) = (2\pi\nu)^{2n+1} (j)^{2n+1} F(\nu) \propto \nu^{2n+1} (-1)^n j F(\nu)$$

$\nu^{2n+1} (-1)^n j F(\nu)$ sera imaginaire pure donc $\frac{\partial^{(2n+1)} f(x)}{\partial x^{(2n+1)}}$ sera impaire (car une fonction impaire donne une Transformée de Fourier qui est imaginaire pure).

<7 pts>

II. TFD et Spectre (38 pts)

1. Indiquer comment on passe de la Transformée de Fourier d'une fonction continue à la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal discrétisé en N échantillons, i.e.,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi j u x) dx \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

▼

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(\frac{-2\pi j u x}{N}\right) \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

Justifier bien, par exemple, la présence du N , dans la deuxième formule.

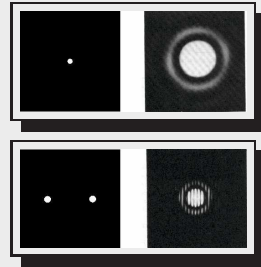
<8 pts>

2. Montrer qualitativement, que si on a une image dans le domaine spatial qui comporte une discontinuité verticale (par exemple, une ligne horizontale en son centre), alors on se retrouve avec une TF ou son spectre, représentée sous forme d'image avec une discontinuité horizontale (i.e., une ligne verticale).



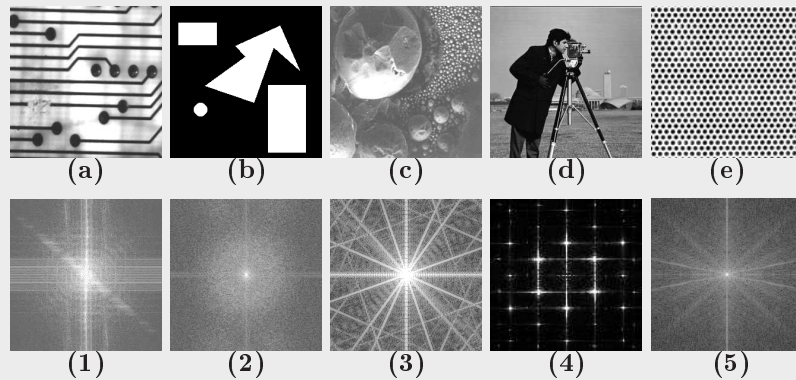
<7 pts>

3. Les deux premières images (en haut) montrent une image et son spectre (ou le module de sa TF). Montrer qualitativement, que l'image en bas à gauche donnera le spectre d'en bas à droite.



<7 pts>

4. Les images (1) à (5) de la Figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier des différentes images (a) à (e). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé.



<10 pts>

5. A quoi est égale la fonction d'autocorrélation d'un signal ne comportant que du bruit blanc Gaussien blanc d'écart type σ ?

<6 pts>

Réponse

1

Dans la Transformée de Fourier continue, on a des valeurs continues pour $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et une continuité des fréquences harmoniques $u \in \mathbb{R}$ (pour des signaux quelconques non périodiques).

Pour la TFD, on a $x = x \Delta x$, $x \in N$ avec $\Delta x = T_e$, résolution spatiale ou période d'échantillonnage et x prenant des valeurs entières correspondant au numéro d'échantillons de la fonction discrétisée. On a aussi $u = u \Delta u$, $u \in N$, résolution fréquentielle et u prenant des valeurs entières, correspondant au numéro d'échantillons du spectre (ou TF) discrétisé.

Lorsqu'on fait le passage TF $\triangleright$ TFD, on a la résolution fréquentielle Δu correspondant à la plus petite fréquence détectable dans le signal qui correspond à l'inverse de la plus grande période existant dans le signal (égale à la longueur même du signal), ce qui s'écrit :

$$\underbrace{u x \quad (u, x \in \mathbb{R}^2)}_{\text{TF}} = \underbrace{u \Delta u x \Delta x = u \frac{1}{N \Delta x} x \Delta x = \frac{u x}{N} \quad (u, x \in N^2)}_{\text{TFD}}$$

Lorsqu'on fait le passage TF $\triangleright$ TFD, de plus, l'intégrale continue se change en somme discrète sur les N échantillons du signal. Le facteur $1/N$ au début est un facteur de normalisation.

<8 pts>

2

• En prenant, comme convention, x (colonnes) ($x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} u$) et y (lignes) ($y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$), une droite horizontale et son spectre s'écrit mathématiquement, en se souvenant que $f(x) * g(y) = f(x) \cdot g(y)$ (le produit de convolution est égale au produit simple lorsqu'on l'applique à deux variables différentes)

$$\text{C}^{st}(x) \cdot \delta(y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \delta(u) * \text{C}^{st}(\nu) = \delta(u) \cdot \text{C}^{st}(\nu)$$

ce qui montre bien qu'une ligne horizontale a nécessairement pour spectre une ligne verticale et inversement.

• Une autre façon de le démontrer qualitativement est d'utiliser la propriété de contraction-dilatation de la TF et de dire qu'une droite horizontale est infiniment contracté en y et infiniment dilaté en x et donnera donc une TF infiniment dilaté en ν et infiniment contracté en u .

• Une autre façon de le démontrer qualitativement est de dire que pour reconstruire cette ligne horizontale, on utilisera que les imagerie de base de la TF (présentées en cours) utilisant des discontinuités horizontales qui se trouvent sur la ligne verticale centrée.

<7 pts>

3

Avec x (colonnes) ($x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} u$) et y (lignes) ($y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$). Si on appelle $f_0(x, y)$, le motif spatial qui est unique dans l'image d'en haut à gauche et qui se périodise, d'une demi longueur de l'image ($N/2$) en x , en se dilatant un peu, on a mathématiquement, pour la deuxième image (si $f_0(x, y) \rightleftharpoons F_0(u, \nu)$).

$$\underbrace{\text{Dilaté}[f_0(x, y)] * \text{III}_{N/2}(x)}_{\text{image en bas à gauche}} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \underbrace{\text{contracté}[f_0(x, y)] \cdot \text{III}_{2/N}(u)}_{\text{TF en bas à droite}}$$

Le spectre obtenu sera donc le même que celui de la première image, excepté qu'il sera contracté (propriété de contraction-dilatation de la TF) et discrétisé en u ; l'opérateur $\cdot \text{III}_{2/N}(u)$ discrétise en u tous les deux pixels (chaque échantillons spectral étant séparé de $\Delta u = 1/N$).

<7 pts>

4

[b-3] : Plusieurs types de transitions (horizontales, verticales, et différentes diagonales) ou contours abruptes (noir-blanc) existent dans l'image et engendrent de forts coefficients spectraux sur une orientation perpendiculaire à ces transitions ; ce qui justifie la présence de droite blanche (forts coefficients spectraux) de différentes orientations dans le domaine des fréquences. De plus des transitions franches typique des images synthétiques créent des très hautes fréquences dans l'image spectrale. Une réponse moins bonne mais tout de même valable aurait été de faire l'association b-1.

<2 pts>

[a-1] : Deux types de transitions (horiz. et diagonales droites) existent dans l'image et correspondent à deux type de fort coefficients spectraux sur une orientation perpendiculaire aux deux précédentes transitions. Une réponse moins bonne mais tout de même valable aurait été de faire l'association a-3.

<2 pts>

[c-2] : l'image présente des formes présentant des transitions de différentes importances et des formes différentes qui vont se traduire spectralement par une diversité de fréquences dans le domaine spectral. Une réponse moins bonne mais tout de même valable aurait été de faire l'association c-5.

<2 pts>

[d-5] : l'image du caméraman présente spatialement de nombreuses discontinuités suivant différents axes que l'on retrouve dans le domaine fréquentiel perpendiculairement (de nombreuses et importantes fréquences spatiales associées à différents axes). Une réponse moins bonne mais tout de même valable aurait été de faire l'association d-2.

<2 pts>

[e-4] : l'image présente un motif spatiale qui se répète ou se périodise dans le domaine spatiale (à peu près, tous les cinq pixels en x et en y). Dans le domaine fréquentiel, cela se traduit par une sorte de discrétisation du motif spectral (à peu près tous les un cinquième d'image en u et en v car [périodique $\Rightarrow$ discrétisation]).

<2 pts>

5

Soit $b(x)$, ce bruit Gaussien blanc. L'énergie spectrale de ce bruit blanc Gaussien est une constante de paramètre σ^2 , donc sa fonction d'autocorrélation est un pic de dirac pondéré par σ^2 , en effet, mathématiquement

$$b(x) * b(-x) = \sigma^2 \cdot \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} B(\nu) \cdot B^*(\nu) = |B(\nu)|^2 = \sigma^2$$

<6 pts>

III. Filtrage (41 pts)

1. Soit le filtre ou masque de convolution (3 lignes, 2 colonnes) suivant :

1	-1
1	-1
1	-1

- (a) Séparer ce filtre en deux masques de convolution une dimension (l'un en x [horizontal], l'autre en y [vertical]). Dans le cas où l'un des deux avait tous ses coefficients positifs, ajouter lui le facteur de normalisation nécessaire pour qu'après filtrage de l'image par ce masque de convolution, l'image conserve sa moyenne de niveaux de gris.

<6 pts>

- (b) Trouver les expressions mathématiques et l'allure des réponses fréquentielles, $|H(u, \nu)|$, (module de la TF) du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessus resp. en u et en ν .

<14 pts>

- (c) Tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (module) en u et en ν . Expliquer pourquoi une représentation de ces réponses fréquentielles sur $[-0.5, 0.5]$ est satisfaisante.

<7 pts>

- (d) De quel type de filtre pour chacune des dimensions considérées s'agit-t-il ? Expliquer maintenant qualitativement ce que va faire ce masque de convolution.

<7 pts>

2. Le masque de convolution

1	0	-1
---	---	----

 correspond à l'approximation et à la discrétisation du gradient en x . Ce masque a été trouvé, en cours, à partir de l'approximation (au deuxième ordre) de la fonction dérivée donnée par la formule suivante

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)}{2\epsilon}$$

Retrouver, à partir de cette approximation, la célèbre propriété suivante de la TF :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = (2\pi j\nu) F(\nu)$$

<7 pts>

Réponse

1(a)

En prenant, comme convention, x (désignant les colonnes) ($x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} u$) et y (désignant les lignes) ($y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$), ce filtre $h(x, y)$ est séparable ($h(x, y) = h(x)h(y)$) mais non symétrique ►

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } y \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ en } x$$

En $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, on doit utiliser un facteur de normalisation de $1/3$ (pour conserver la moyenne de l'image après filtrage).

<6 pts>

1(b)

► En $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, avec l'origine au centre du masque (car le masque est de dimension impaire) et avec son facteur de normalisation

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h(y)) = H(\nu) &= \sum_{y=-\infty}^{+\infty} h(y) \exp(-2\pi j \nu y) = \sum_{y=-1}^{+1} h(y) \exp(-2\pi j \nu y), \\ &= \frac{1}{3} [\exp(2\pi j \nu) + 1 + \exp(-2\pi j \nu)] = \frac{1 + 2 \cos(2\pi \nu)}{3}.\end{aligned}$$

<7 pts>

NOTA : On aurait pu prévoir à l'avance que cette MTF allait être réelle, car le masque de convolution est pair.

► En $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} u$, avec l'origine au début du masque (car le masque est de dimension paire)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h(x)) = H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=0}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x), \\ &= 1 - \exp(-2\pi j u) = 1 - \cos(2\pi u) + j \sin(2\pi u).\end{aligned}$$

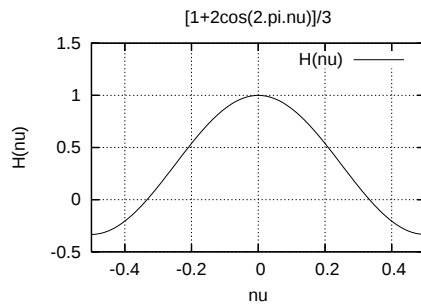
En module on a donc $|H(u)| = \sqrt{[1 - \cos(2\pi u)]^2 + \sin^2(2\pi u)} = \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi u)}$

<7 pts>

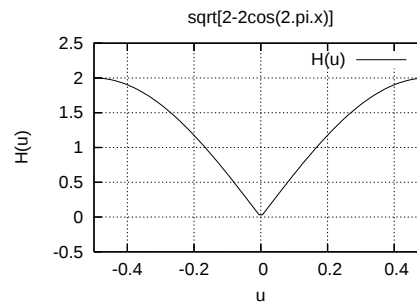
NOTA : On aurait pu prévoir à l'avance que cette MTF allait être complexe, car le masque de convolution est ni pair, ni impair.

1(c)

On trouve graphiquement :



<2.5 pts>



<2.5 pts>

Le spectre est périodique puisque le signal dans le domaine spatial est discret et il se répète tous les $1/T_e = 1/\Delta x = 1$ (fréquence numérique puisqu'à aucun moment, on ne connaît la période d'échantillonnage). Donc un support de 1 dans le domaine spectral est suffisant. Comme on est intéressé à voir (mathématiquement) l'allure spectrale de cette MTF centrée en 0, une réponse fréquentielle sur $[-0.5, 0.5]$ est satisfaisante.

<2 pts>

1(d)

En y , c'est un filtre passe-bas ; ce que l'on pouvait prévoir en constatant que tous les coefficients de ce filtre sont positifs.

<2.5 pts>

En x , c'est un filtre passe-haut ; ce que l'on pouvait un peu prévoir en constatant que certains des coefficients de ce filtre sont négatifs (à la rigueur un filtre Passe-bande mais la bande de fréquence de ce filtre est largement concentrée dans les hautes fréquences). On reconnaît, grâce au cours, qu'il s'agit de l'opérateur gradient en x , qui est bien un filtre passe-haut.

<2.5 pts>

Finalement ce filtre va lisser en y et calculer une dérivée en x . Il sert à faire la détection des contours (verticales) grâce au filtre passe-haut en x , tout en étant robuste au bruit (grâce au filtre passe-bas en y).

<2 pts>

2.

En utilisant le fait que la TF est linéaire et une approximation du premier ordre $\exp(x) \approx 1 + x$ (ou du deuxième ordre $\exp(x) \approx 1 + x + x^2/2$), et que : $f(x - x_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-2\pi j\nu x_0) F(\nu)$, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= \frac{1}{2\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}[f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)] = \frac{1}{2\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ F(\nu) [\exp(2\pi j\nu\epsilon) - \exp(-2\pi j\nu\epsilon)] \right\} \\ &= \frac{1}{2\epsilon} F(\nu) [(1 + 2\pi j\nu\epsilon) - (1 - 2\pi j\nu\epsilon)]\end{aligned}$$

et donc : $\mathcal{F}[f'(x)] = (2\pi j\nu) F(\nu)$

<7 pts>

NOTA : On aurait trouvé la même chose si on avait fait une approximation au deuxième ordre de la fonction exponentielle au voisinage de zéro.