



DIRO
IFT 3205

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

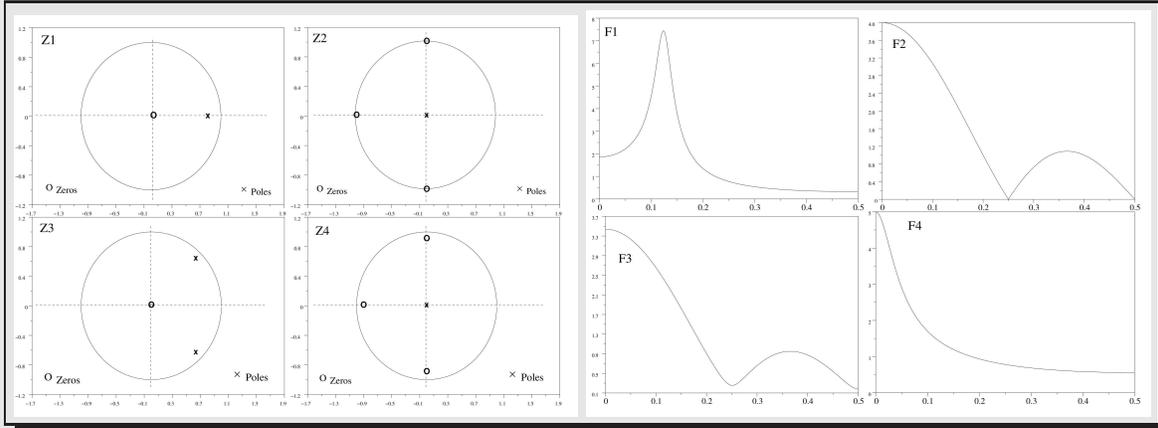
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *02/05/2014*

| | |
|-------------|---|
| I | Filtrage Numérique (39 pts) |
| II | Application Filtrage Numérique Inverse (77 pts) |
| Total | 116 points |

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Filtrage Numérique (39 pts)



1. Associer à chaque diagramme pôles-zéros (Z_i) de la figure ci-dessus une réponse fréquentielle (F_j) en justifiant brièvement (mais clairement) votre choix et indiquez pour chaque filtre s'il est stable (et pourquoi) et de quelle famille (RIF ou RII) il appartient.

<8 pts>

2. (a) Écrire la fonction de transfert $H(z)$ puis l'équation aux différences (reliant $x(n)$ à $y(n)$) associées au filtre numérique appartenant au diagramme pôles-zéros Z_2 , sachant que le pôle représenté est un pôle triple.

<7 pts>

- (b) À partir de la fonction de transfert trouvée précédemment, retrouver toutes les valeurs des *extrema* et *minima* de $|H(\nu)|$ (i.e., le gain de cette réponse fréquentielle aux fréquences numériques associées aux deux *minima* et *extrema* de $|H(\nu)|$).

<7 pts>

- (c) Peut-on écrire l'équation aux différences trouvée en (a) par une équation aux différences récursives? si oui faites le, sinon justifier pourquoi cela n'est pas possible.

<7 pts>

- (d) Exprimer ce filtrage numérique temps réel sous la forme d'un filtrage temps différé avec une convolution et un masque de convolution que l'on définira.

<3 pts>

- (e) Retrouvez la réponse fréquentielle de ce filtre à partir de la connaissance de ce masque de convolution et une TFD (Transformée de Fourier Discrète).

<7 pts>

Réponse

1.

Le diagramme Z_1 doit être associé à la figure F_4 . En effet, la réponse fréquentielle n'a qu'un maximum à la fréquence numérique (ou normalisée) $\nu = 0$. Le filtre est stable car son (ou ses) pôles sont à l'intérieur du cercle unité et ce filtre est de la famille des filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) car son (ou ses) pôle(s) ne sont pas au centre du cercle unité.

Le diagramme Z_1 doit être associé à la figure F_2 car la réponse fréquentielle s'annule pour les fréquences numériques $\nu = \pm 0.25$ (ou 0.25 et 0.75) et pour la fréquence $\nu = 0.5$ à cause des zéros placés sur le cercle unité. À la fréquence $\nu = 0$, l'éloignement de z des zéros explique le maximum obtenu par la réponse fréquentielle. Le filtre est stable car le (ou les) pôle(s) est à l'intérieur de $\mathcal{C}_{|1|}$ et de la famille RIF (réponse impulsionnelle finie) car le (ou les) pôles sont à l'origine.

Le diagramme Z_4 doit être associé à la figure F_3 . Il ressemble beaucoup au diagramme précédent, si ce n'est que les zéros ne sont pas sur le cercle unité entraînant ainsi pour les fréquences $\nu = \pm 0.25$ et 0.50, une réponse fréquentielle qui ne s'annule pas complètement.

Le diagramme Z_3 doit être associé à la figure F_1 car deux pôles (à l'intérieur de $\mathcal{C}_{|1|}$ donc stable) existent pour les fréquences numériques $\nu = \pm 1/8$ amplifiant donc cette fréquence. Les pôles n'étant pas à l'origine, le filtre est du type RII.

Donc, en résumé :

$Z_1 - F_4$, RII, stable.

$Z_2 - F_2$, RIF, stable.

$Z_4 - F_3$, RIF, stable.

$Z_3 - F_1$, RII, stable.

< 8 pts >

2(a)

Pour le filtre associé au diagramme Z_2 , on a :

$$H(z) = \frac{(z-j)(z+j)(z+1)}{z^3} = \frac{(z^2+1)(z+1)}{z^3} = \frac{z^3+z^2+z+1}{z^3} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$$\text{Et donc : } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$$Y(z) = X(z) \{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$

< 7 pts >

2(b)

Avec le changement de variable $z = \exp(2\pi j\nu)$, et la connaissance de $H(z)$:

$$\nu = 0 \quad (\textit{extrema}) : \quad |H(z=1)| = 4$$

$$\nu = 1/4 \quad (\textit{minima}) : \quad |H(z=j)| = |(j^3+j^2+j+1)/(j^3)| = |(-j+j)/(-j)| = 0$$

$$\nu = 1/2 \quad (\textit{minima}) : \quad |H(z=-1)| = |(-1+1-1+1)/(-1)| = 0$$

et enfin pour le deuxième *extrema* ;

à mi-distance de la fréquence numérique $\nu = 1/4$ et $\nu = 1/2$, i.e., $\nu = 3/8$; $z = \exp(6\pi j/8)$:

$$\begin{aligned} \nu = 3/8 \quad (\textit{extrema}) : \quad |H(z = \exp(6\pi j/8))| &= 1 + \exp(-6\pi j/8) + \exp(-12\pi j/8) + \exp(-18\pi j/8) \\ &= 1 + \exp(-6\pi j/8) + \exp(4\pi j/8) + \exp(-2\pi j/8) \\ &= 1 + \exp(-3\pi j/4) + \exp(\pi j/2) + \exp(-\pi j/4) \\ &= 1 - (1/\sqrt{2}) + (j/\sqrt{2}) + j + (1/\sqrt{2}) - (j/\sqrt{2}) = 1 \end{aligned}$$

Les résultats de ces amplitudes semblent être confirmé par le graphique.

< 7 pts >

2(c)

Le plus simple est de revenir à $H(z)$ dans sa forme la plus simple et de voir si une forme récursive apparaît :

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

Il semble que oui puisque : $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}$

$$Y(z) \{1 - z^{-1}\} = X(z) \{1 - z^{-4}\}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-4)$$

<7 pts>

NOTA : Une autre solution, tout aussi valable, aurait consisté à rester dans le domaine temporel pour trouver cette forme récursive en disant que :

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$

$$y(n-1) = x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)$$

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - x(n-4)$$

2(d)

L'équivalent de ce filtre en temps différé est : $y(n) = x(n) * h(n) = x(n) * \boxed{1 \ 1 \ 1 \ 1}$, avec $h(n)$ une fonction porte d'amplitude 4 et de largeur 4 échantillons.

<3 pts>

2(e)

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j\nu x) = \sum_{x=-1}^2 \exp(-2\pi j\nu x) \\ &= 1 + \exp(-2\pi j\nu) + \exp(-4\pi j\nu) + \exp(-6\pi j\nu) \\ &= \frac{1 - \exp(-8\pi j\nu)}{1 - \exp(-2\pi j\nu)} \\ &= \frac{\exp(-4\pi j\nu)}{\exp(-\pi j\nu)} \cdot \frac{\sin(4\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |H(\nu)| = \left| \frac{\sin(4\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|$$

NOTA : On retrouve les différentes valeurs d'*extrema* et de *minima* données dans la question 2(b). En particulier $|H(\nu = 0.25)| = |H(\nu = 0.50)| = 0$. Pour $\nu = 0$, par contre, il faut faire attention car on a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et donc on doit utiliser la règle de l'hôpital :

$$H(\nu = 0) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(4\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right| = \left| \frac{4\pi \cos(4\pi\nu)}{\pi \cos(\pi\nu)} \right| = 4$$

<7 pts>

II. Application Filtrage Numérique Inverse (77 pts)

Considérons le modèle de dégradation suivant, altérant un signal d'entrée $x(n)$ en un signal de sortie $y(n)$, donné par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = x(n) + g x(n-r) \quad (1)$$

et censé modéliser une unité de réverbération simple correspondant à la réflexion d'un son sur une surface absorbante comme un mur (situé près de la source x) avec effets d'atténuation (coefficient $g < 1$) et de propagation (retard r échantillons).

1. (a) Trouver la fonction de transfert $H(z)$ de ce modèle de dégradation et préciser de quelle famille de filtre il fait partie et quel est son ordre.
<5 pts>
- (b) Donner la réponse impulsionnelle de ce système de dégradation (solution générale $y(n) \forall n$) à l'aide de sa fonction de transfert et de la transformée en Z (TZ) inverse.
<5 pts>.
- (c) Donner la relation entre le temps de décalage de l'écho et la fréquence d'échantillonnage F_e du signal et le paramètre r .
<5 pts>.
- (d) Si on voulait trouver expérimentalement la fonction de transfert $H(z)$ associée à une salle (ou auditorium) produisant de l'écho, que l'on voudrait modéliser par ce modèle simplifié. Comment s'y prendrait-on expérimentalement ? (i.e., comment ferait-on pour estimer expérimentalement le ou les paramètres du modèle de dégradation ?) Justifier clairement votre réponse.
<5 pts>.
- (e) En utilisant le changement de variable $z = \exp(2\pi j\nu)$, trouver le module et argument de la réponse fréquentielle de ce modèle de dégradation (en simplifiant le plus possible le résultat) et tracer approximativement le module et le diagramme pôles-zéros pour $g = 0.5$ et $r = 11$.
<10 pts>.
- (f) Montrer que dans le module $|H(\nu)|$ calculé précédemment, le rapport entre les pics (*maxima*) et l'amplitudes des différentes vallées (*minima*) de $|H(\nu)|$ est donnée par la relation :
<5 pts>

$$\rho = \frac{P}{V} = \frac{1+g}{1-g} \quad (2)$$

2. On veut réduire maintenant l'effet d'écho en traitant numériquement le signal dégradé $y(n)$.
 - (a) On veut inverser la dégradation précédente produisant des échos par une technique d'égalisation dite par "zero forcing" (celle vue en Travail Pratique qui consiste à définir un filtre numérique qui tente d'inverser exactement la fonction de transfert produisant la dégradation).
Trouver le filtre inverse $H_i(z)$ permettant de restaurer le signal dégradé $y(n)$. On appellera $s(n)$ le signal restauré. Discuter de la stabilité de $H_i(z)$ et trouver ensuite l'équation aux différences permettant de générer $s(n)$ à partir de $y(n)$.
<10 pts>.
 - (b) De quelle famille de filtre il fait partie et quel est son ordre.
<3 pts>
 - (c) On va essayer maintenant de trouver le filtre inverse $H_i(z) (= \frac{1}{H(z)})$ qui inverse le $H(z)$ du modèle de dégradation exprimée en Eq. (1) en approximant $\frac{1}{H(z)}$ par un développement en série de Taylor du type : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n$ (valable donc seulement pour (la condition) $|x| < 1$).
.../...

Trouver le filtre inverse $H_i(z)$ obtenu en utilisant cette approximation de Taylor et indiquer quelles sont la ou les conditions physiques nécessaires pour que ce filtre inverse puisse être utilisé (i.e., restauré) efficacement.

<10 pts>.

(d) Donner la réponse impulsionnelle $h_i(n)$ de ce filtre inverse (trouvé à la question précédente) et préciser de quelle famille de filtre il fait partie et quel est son ordre et sa stabilité.

<7 pts>.

(e) Donner l'équation aux différences associée au filtre numérique inverse trouvé à la question 2.(c) ou 2.(d) permettant de générer $s(n)$ (le signal restauré) à partir de $y(n)$ (le signal dégradé).

<5 pts>.

3. Dans un problème réel, il est intéressant de trouver une technique d'estimation pour estimer (automatiquement) le paramètre r de notre modèle de dégradation (exprimée en Eq. (1)).

Soit donc $y(n)$, le signal corrompu par un écho pour lequel on aimerait estimer le retard r . Déterminer une méthode d'estimation du paramètre r à partir de la fonction d'autocorrélation de $y(n)$, et de la fonction d'autocorrélation de $x(n)$ (et à partir des propriétés du produit de convolution).

<7 pts>.

Réponse

1(a)

$$y(n) = x(n) + g x(n-r)$$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$Y(z) = X(z) + g z^{-r} X(z) \Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + g z^{-r} = \frac{z^r + g}{z^r} \quad (\text{filtre RIF d'ordre } r)$$

<5 pts>

1(b)

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, pour $x(n) = \delta(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = 1$, on obtient

$$\text{Pour : } X(z) = 1 \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Y(z) = 1 + g z^{-r}$$

$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$

$$y(n) = h(n) = \delta(n) + g \delta(n-r)$$

<5 pts>

1(c)

r représente concrètement le temps, en nombre d'échantillons du signal $x(n)$, mis par le signal pour se réfléchir puis s'ajouter (après atténuation g) au signal $x(n)$. Il s'agit donc simplement de

$$t_0 = r/F_e \quad \text{ou} \quad r = t_0 \cdot F_e$$

<5 pts>

1(d)

Il faudrait pouvoir réaliser expérimentalement et physiquement l'opération suivante :

$$\delta(n) \rightarrow \boxed{\text{salle réverbérante}} \rightarrow h(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z)$$

Dans un premier temps, rappelons que la réponse impulsionnelle $h(n)$ de notre système est par définition la réponse de notre salle réverbérante à une impulsion du Dirac. Une impulsion du Dirac pour un signal sonore

peut être modélisée (ou créé) par un son d'amplitude très grande et très localisé temporellement ; c'est-à-dire, concrètement, un son très fort et très bref (impulsion acoustique). La réponse de la salle réverbérante à ce signal très fort et très bref nous donnera la réponse impulsionnelle $h(t)$ sous la forme du signal initial entaché de son écho atténué (et éventuellement d'échos multiples). On devra donc, dans un deuxième temps, discrétiser ce signal $h(n)$ (et éventuellement ne retenir dans ce signal impulsionnel sonore que le premier écho créé par la pièce ou autrement-dit, estimer le délai r et l'atténuation g). Le signal discrétisé aura ainsi la forme donnée en question 2., i.e., $h(n) = \delta(n) + g\delta(n - r)$. La transformée en Z de cette réponse impulsionnelle nous permettra ensuite d'avoir $H(z)$ ou son équation aux différences.

< 5 pts >

1(e)

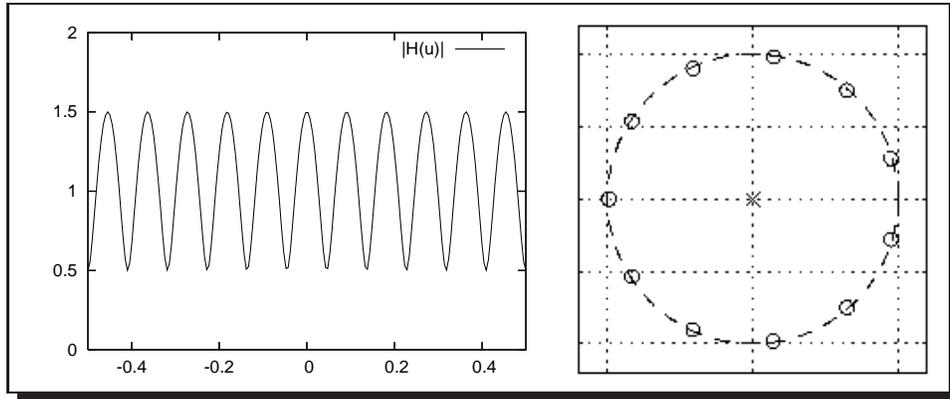
$$\begin{aligned}
 H[z = \exp(2\pi j\nu)] &= 1 + g \exp(-2\pi j\nu r) = 1 + g (\cos(2\pi\nu r) - j \sin(2\pi\nu r)) \\
 &\Leftrightarrow \\
 |H(\nu)| &= \sqrt{(1 + g \cos(2\pi\nu r))^2 + (g \sin(2\pi\nu r))^2} \\
 &= \sqrt{(1 + g^2) + 2g \cos(2\pi\nu r)}
 \end{aligned}$$

< 4 pts >

$$\text{et : } \text{Arg}(H(\nu)) = \arctan\left(\frac{-g \sin(2\pi\nu r)}{1 + g \cos(2\pi\nu r)}\right)$$

< 2 pts >

Le module et le diagramme pôles-zéros pour $g = 0.5$ et $r = 11$. Les 11 zéros sont équirépartis le long du cercle unité :



< 2 pts >

< 2 pts >

1(f)

Avec $|H(\nu)| = \sqrt{(1 + g^2) + 2g \cos(2\pi\nu r)}$, et :

$$|H(\nu)|_{\max} \text{ pour } \cos(2\pi\nu r) = 1 \text{ et } |H(\nu)|_{\min} \text{ pour } \cos(2\pi\nu r) = -1$$

$$\rho = \frac{|H(\nu)|_{\max}}{|H(\nu)|_{\min}} = \frac{\sqrt{(1 + g^2) + 2g}}{\sqrt{(1 + g^2) - 2g}} = \frac{\sqrt{(1 + g^2)^2}}{\sqrt{(1 - g^2)^2}} = \frac{1 + g}{1 - g}$$

< 5 pts >

2(a)

$$\begin{aligned}
 \text{Filtre inverse : } H_i(z) &= \frac{S(z)}{Y(z)} = \frac{1}{1 + g z^{-r}} \\
 &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
 s(n) &= y(n) - g s(n - r)
 \end{aligned}$$

Les pôles se trouvent distribués à l'intérieur du cercle unité ($g < 1$). Théoriquement donc, ce filtre inverse est stable.

<10 pts>

NOTA-1- : Si on voulait donner une expression analytique de ces pôles, on utiliserait la notation complexe et la formule de Moivre (en se souvenant aussi que $g < 1$); $z^r + g = 0 \Leftrightarrow z^r = \exp(j\pi)g \Leftrightarrow z = g^{1/r} \exp[j(\pi/r + k(2\pi)/r)]$. Ce qui rend ce filtre inverse très sensible au bruit numérique, est que ce filtre est d'une part récursif mais surtout que pour r grand $g^{1/r}$, et donc les pôles, sont très proches du cercle unité.

NOTA-2- : Si $g > 1$, l'écho nous renverrait une réponse avec une énergie (volume) supérieure au signal émis! Cela serait une création d'énergie impossible! et cela se traduirait mathématiquement par des pôles à l'extérieur du cercle unité, i.e., des pôles instables.

2(b)

Le filtre inverse $H_i(z)$ est de type RII (réponse impulsionnelle infinie) conduisant à une équation aux différences récursives et d'ordre r .

<3 pts>

2(c)

On veut donc inverser : $H(z) = 1 + g z^{-r}$ avec le filtre inverse $H_i(z) = \frac{1}{1+g z^{-r}}$ que l'on va donc approximer par la série de Taylor de $1/(1+x)$:

$$H_i(z) = \frac{1}{1+g z^{-r}} = 1 - g z^{-r} + g^2 z^{-2r} - g^3 z^{-3r} + \dots + (-1)^N g^N z^{-Nr} = 1 + \sum_{p=1}^N (-1)^p g^p z^{-pr}$$

et qui ne sera donc valable (i.e., efficace) seulement pour $|g z^{-r}| < 1$, c'est-à-dire seulement pour $g \ll 1$. Concrètement, ce filtre inverse devra être utilisé seulement pour une réverbération faible.

<10 pts>

NOTA-1- : Un faible nombre de terme suffira si g est très proche de 0 et inversement, il faudra d'autant plus de termes à cette série que g est d'autant plus grand.

NOTA-2- : On peut noter aussi, de façon équivalente $H_i(z) = \sum_{p=0}^N (-1)^p g^p z^{-pr}$

2(d)

$$H_i(z) = 1 + \sum_{p=1}^N (-1)^p g^p z^{-pr} \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} h(n) = \delta(n) + \sum_{p=1}^N (-1)^p g^p \delta(n - pr)$$

Ce filtre inverse fait donc parti de la famille des filtres à réponse impulsionnelle finie, donc du type RIF (conduisant à une équation aux différences non récursive), forcément stable et d'ordre N .

<7 pts>

2(e)

$$H_i(z) = 1 + \sum_{p=1}^N (-1)^p g^p z^{-pr} = \frac{S(z)}{Y(z)} \Leftrightarrow S(z) = Y(z) \left(1 + \sum_{p=1}^N (-1)^p g^p z^{-pr} \right) \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} s(n) = y(n) + \sum_{p=1}^N \left\{ (-1)^p g^p \cdot y(n - pr) \right\}$$

Il est important de noter qu'on ne peut intégrer un nombre infini de termes dans la série de Taylor puisque cette somme infinie se traduira par une équation aux différences non récursives avec un nombre infini de termes du signal d'entrée $y(n)$.

De façon équivalente, on peut représenter ce filtre par l'équation recursive suivante
<7 pts>

NOTA : Ce filtre RIF est plus stable que celui trouvé à la question 2(a). Par contre, il ne sera donc valable (i.e., efficace) seulement pour $|g z^{-r}| < 1$, c'est-à-dire seulement pour $g \ll 1$. Concrètement, ce filtre inverse devra être utilisé seulement pour une réverbération faible. De plus, pour être efficace, ce filtre devra intégrer un grand nombre de coefficients. Si on limite trop les coefficients (N trop faible), cela créera un effet de fenêtre et risque de créer une réponse quelque peu amplifiée du phénomène de Gibbs.

3.

Les deux fonctions d'autocorrélation se notent $C_{yy}(n) = y(n) * y(-n)$ et $C_{xx}(n) = x(n) * x(-n)$.
 On devra aussi utiliser, dans ce raisonnement, notre modèle de dégradation : $y(n) = x(n) + g x(n-r)$

$$\begin{aligned} C_{yy}(n) &= y(n) * y(-n) = (x(n) + g x(n-r)) * (x(-n) + g x(-n-r)) \\ &= [x(n) * x(-n)] + g [x(n) * x(-n-r)] + g [x(n-r) * x(-n)] + g^2 [x(n-r) * x(-n-r)] \\ &= C_{xx}(n) + g C_{xx}(n+r) + g C_{xx}(n-r) + g^2 C_{xx}(n) \end{aligned}$$

On pourra constater graphiquement (et s'en convaincre) que : $x(n-r) * x(-n) = C_{xx}(n+r)$
 ou utiliser les propriétés du dirac et de $*$ (commutativité) pour écrire que :

$$\begin{aligned} x(n-r) * x(-n) &= x(n) * \delta(n-r) * x(-n) \\ &= [x(n) * x(-n)] * \delta(n-r) \\ &= C_{xx}(n) * \delta(n-r) \\ &= C_{xx}(n+r) \end{aligned}$$

Du coup le premier pic qui se dégage à droite (ou symétriquement à gauche) par rapport à l'origine de $C_{yy}(n)$, nous donne le délai ou une bonne estimation de la valeur du paramètre r .

<7 pts>

NOTA-1- : On pourrait utiliser le même raisonnement pour simplifier :

$$\begin{aligned} x(n-r) * x(-n-r) &= x(n) * \delta(n-r) * x(-n) * \delta(n+r) \\ &= [x(n) * x(-n)] * [\delta(n-r) * \delta(n+r)] \\ &= C_{xx}(n) * \delta(n) \\ &= C_{xx}(n) \end{aligned}$$

NOTA-2- : Le paramètre g serait un peu plus difficile à estimer. Mais une stratégie consisterait, à partir de $y(n)$ à recueillir la réponse impulsionnelle $h(n)$ du modèle de dégradation puis essayer pour différentes valeurs de g , la relation $s(n) = h(n) - g h(n-r)$ celle qui élimine le plus le bruit en dehors de l'impulsion acoustique (i.e., en $n = 0$).

NOTA-3- : Une autre façon d'estimer le paramètre r serait d'utiliser la fonction d'intercorrélacion entre $x(n)$ et $y(n)$:

$$\begin{aligned} C_{yx}(n) &= y(n) * x(n) = (x(n) + g x(n-r)) * x(-n) \\ &= [x(n) * x(-n)] + g [x(n-r) * x(-n)] = C_{xx}(n) + g [x(n) * \delta(n-r) * x(-n)] \\ &= C_{xx}(n) + g C_{xx}(n-r) \end{aligned}$$

Et si r assez grand (plus grand que l'épaisseur de la fonction d'autocorrélation), alors le premier pic à droite permettrait de déterminer r .

NOTA-4- : Une autre façon d'estimer le paramètre r serait d'utiliser la méthode décrite dans le TP 2 qui utilise la fonction d'intercorrélacion et une TFD.