



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 17/02/2014

I	Série & Transformée de Fourier (60 pts)
II	TFD et calcul de Spectre (28 pts)
III	Filtrage (30 pts)
Total	118 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Série & Transformée de Fourier (60 pts)

1. Expliquer en quelques lignes quelle est la différence, en terme de modèle, entre la série de Fourier, la série de Fourier complexe, la Transformée de Fourier (TF), la Transformée de Fourier Discrète (TFD) et la Fast Fourier Transform (FFT).

<15 pts>

2. Expliquer ce qu'est la symétrie hermitienne pour une Transformée de Fourier exprimée dans la notation mathématique et la notation physique et montrer aussi que cette propriété implique nécessairement que $F(-\nu) = F^*(\nu)$ si on considère que $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ et que "*" désigne la conjuguée complexe.

<10 pts>

3. Calculer en série de Fourier et en Transformée de Fourier (TF) le module du spectre de la fonction de variable x , $f(x) = \sin^2(x)$ et représenter dans les deux cas sa représentation fréquentielle (en module) et expliquer les différences des deux spectres.

<10 pts>

4. Expliquer pourquoi le calcul de la Transformée de Fourier Discrète sur une image est équivalente au calcul de la Transformée de Fourier sur une image qui a été périodisée en ligne et en colonne.

<5 pts>

5. Soit la fonction :

$$f(x) = x \exp(-|x|)$$

- (a) Que peut-on dire des propriétés de $F(\nu)$, la TF de la fonction $f(x) = x \exp(-|x|)$ (sans la calculer). Calculer ensuite cette TF.

<10 pts>

- (b) Calculer $|F(\nu)|$ son module et la phase $\Phi(\nu)$ de $F(\nu)$ et représenter (approximativement) son module graphiquement et préciser de quelle famille de filtre cette représentation fréquentielle fait partie.

<10 pts>

Réponse

1.

La Transformée de Fourier (TF) est la généralisation de la série de Fourier complexe aux signaux (intégrables) quelconques (pas forcément périodiques), qui elle-même est la généralisation de la série de Fourier incluant la notion (ou le modèle) de fréquences négatives (grâce aux nombres complexes).

Autrement dit, la TF s'applique à des signaux quelconques (périodiques ou non périodiques) et inclue la notion de fréquences négatives. La série de Fourier complexe ne s'applique que pour des signaux périodiques mais inclue le modèle des fréquences négatives. La série de Fourier ne s'applique qu'aux signaux périodiques et ne modélise que les fréquences réelles (ou physiques), *i.e.*, les fréquences positives.

La TFD est la version implémentée sur ordinateur de la TF utilisant une version discrétisée du signal et du fait que la TFD est nécessairement obligée de stocker aussi une version discrétisée du spectre ou représentation fréquentielle de ce signal et que la discrétisation dans un espace implique la périodicité dans l'autre espace; le calcul de la TFD sur une image revient à calculer la TF d'une image périodique en ligne et en colonne. La FFT, en terme de modèle, est la même chose que la TFD, si ce n'est que son calcul se fait en $\mathcal{O}(N^2 \log_2(N))$ au lieu de $\mathcal{O}(N^4)$ pour une image de taille $(N \times N)$.

<15 pts>

2.

La symétrie hermitienne est une propriété que possédera tout spectre $F(\nu) = R(\nu) + jI(\nu)$ (ou représentation fréquentielle) de tout signal réel. Cette propriété indique que la partie réelle de $F(\nu)$ est paire ($R(-\nu) = R(\nu)$) et que la partie imaginaire de $F(\nu)$ est impaire ($I(-\nu) = -I(\nu)$) si on considère la notation

mathématique. Si on considère la notation physique, que le module du spectre est pair ; $|F(-\nu)| = |F(\nu)|$ et que sa phase (ou argument) est impaire ; $\Phi(-\nu) = -\Phi(\nu)$.

Si on concatène $R(-\nu) = R(\nu)$ avec $I(-\nu) = -I(\nu)$, on trouve donc $F(-\nu) = F^*(\nu)$.

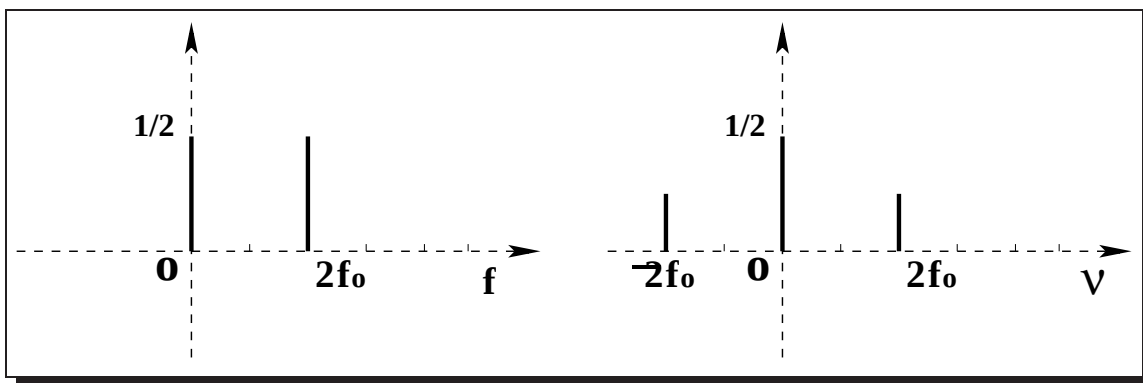
<10 pts>

3.

Pour la décomposition en série de Fourier, on va donc décomposer la fonction $f(x)$ de fréquence fondamentale $f_0 = 1/2\pi$ (ou période $T = 2\pi$) sur la base de fonctions élémentaires en cosinus et sinus, multiple de la fréquence fondamentale, c-a-d en considérant les fonctions $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Le plus simple est donc, dans ce cas, de linéariser $f(x) = \sin^2(x)$.

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

Avec pour représentation fréquentielle ($2f_0 = 1/\pi$), en module (donc en valeur absolue), le graphique à gauche :



Pour le calcul de la TF, avec la convention $x \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$ et $\exp(2\pi j x \nu_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu - \nu_0)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \delta(\nu) - \frac{1}{4} \delta\left(\nu - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{1}{4} \delta\left(\nu + \frac{1}{\pi}\right)$$

La différence avec la série de Fourier (graphique en haut à droite) est la présence ici de raies spectrales paires à des fréquences négatives. Ces fréquences négatives proviennent de l'exponentiel complexe du modèle de Fourier.

<10 pts>

Nota : puisque la fonction $\sin^2(x)$ est paire et périodique, on s'attendait à voir, pour la TF, un spectre discrétisé réel, ce qui est bien le cas.

4.

Le plus simple est de dire que, puisque tout ce qui est discrétisé dans un espace est forcément périodique dans l'autre espace, la TFD (modèle simplifié de la TF) va forcément stocker des valeurs discrétisées du spectre, l'image va donc forcément se périodiser.

Une autre façon, équivalente de le concevoir est de dire que puisque l'on sait qu'un signal périodique de période N (donc de fréquence fondamentale $f_0 = 1/N$) a un spectre discrétisé (ou spectre de raies) tous les $f_0 = 1/N$. La TFD qui va stocker des valeurs discrétisées du spectre à une résolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/N$ considérera donc forcément une image périodisée en ligne et en colonne.

Une autre façon de s'en convaincre est de dire, que si $i(x, y)$ désigne l'image et $I(u, \nu)$ son spectre, puisque

$$\begin{aligned} i(x, y) &\rightleftharpoons I(u, \nu) \\ \text{donc, } \underbrace{i(x, y) * \text{III}_N(x, y)}_{\text{image périodisée}} &\rightleftharpoons \underbrace{I(u, \nu) \cdot \text{III}_{1/N}(u, \nu)}_{\text{spectre discrétisé}} \end{aligned}$$

<5 pts>

5.(a)

La fonction $f(x)$ est réelle et impaire, donc sa transformée sera imaginaire pure et impaire. On pourrait dire aussi que la fonction étant non périodique, son spectre sera continu.

$$\text{On sait que si } f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) \text{ alors } x f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} -F'(\nu)/(2\pi j)$$

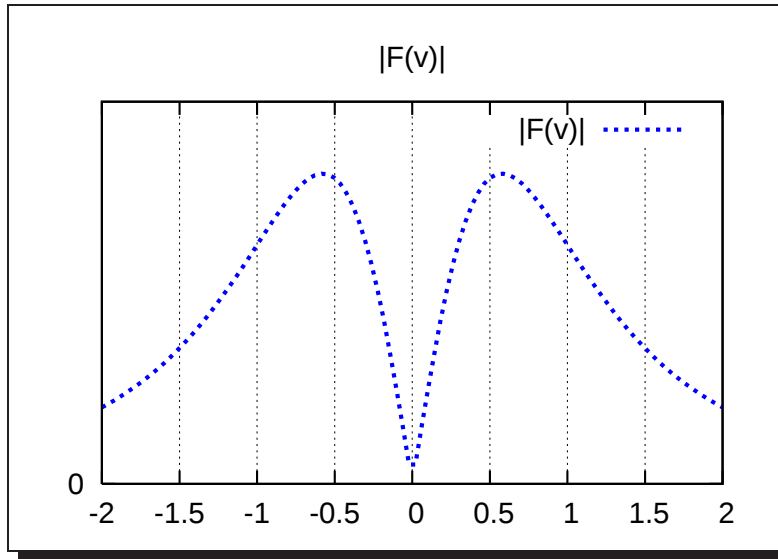
$$\begin{aligned} \text{Dans notre cas : } f(x) = \exp(-|x|) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} \\ \text{donc ; } x \exp(-|x|) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-1}{2\pi j} \cdot \frac{-16\pi^2\nu}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} = \frac{-8j\pi\nu}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} \end{aligned}$$

On retrouve bien le fait que $\mathcal{F}([x \exp(-|x|)])$ est impair et imaginaire pure.

<10 pts>

5.(b)

On a une phase $\Phi(\nu) = -\pi/2$ et $|F(\nu)| = \frac{8\pi|\nu|}{(1+4\pi^2\nu^2)^2}$ de type passe-bande :



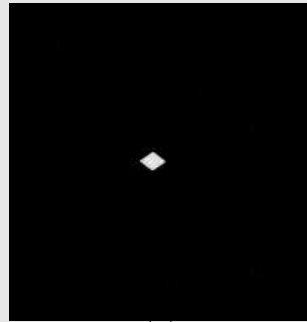
<10 pts>

Nota-1- : On aurait pu prévoir que $f(x) = x \exp(-|x|)$ allait être une PSF associée à un filtre passe-bande, car $h(x) = \exp(-|x|)$ est une PSF associée à un passe-bas (tous ses coefficients sont positifs) et l'opération dans le domaine spatial $x f(x) \rightleftharpoons \propto H'(\nu)$ revient à calculer une dérivée dans le domaine fréquentiel, soit l'équivalent d'un filtre passe-haut. La combinaison d'un passe-bas et d'un filtre passe-haut est un filtre passe-bande (dans le cours, on avait étudié que la combinaison d'un filtre Gaussien (passe-bas) avec un filtre laplacien (passe-haut) était aussi un filtre passe-bande).

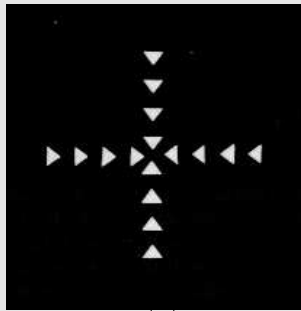
Nota-2- : Si on voulait changer la bande de fréquences de ce filtre passe-bande, il faudrait varier le paramètre σ , dans $h(x) = \exp(-|x|/\sigma)$. Lorsque σ tend vers 0, la PSF associée au filtre passe-bas se contracte et sa MTF se dilate, déplaçant ainsi la bande de fréquences du passe-bande à droite.

II. TFD et Spectre (28 pts)

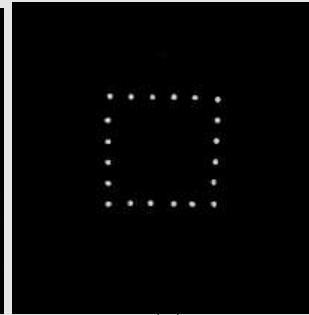
1. Pour chacune de ces six images :



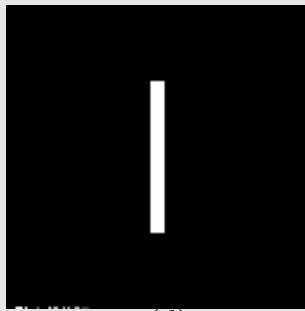
(a)



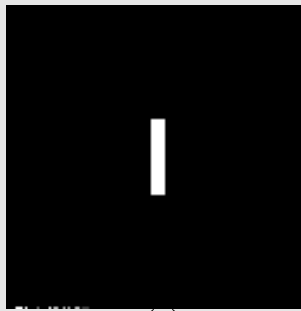
(b)



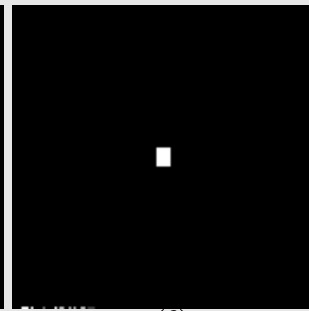
(c)



(d)

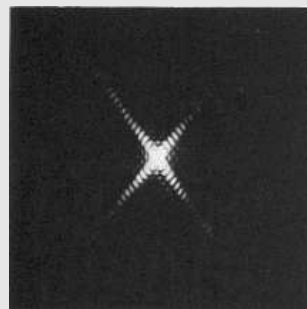


(e)

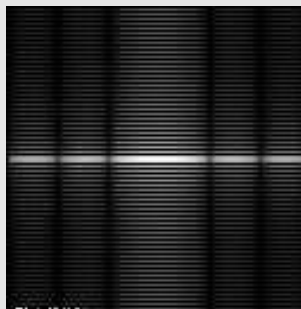


(f)

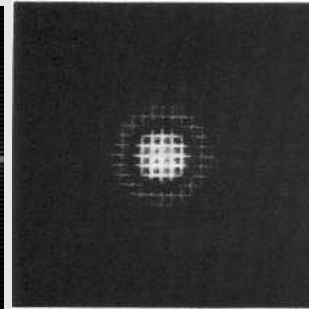
Indiquer sa transformée de Fourier (module) correspondante après avoir fourni une explication.



(I)



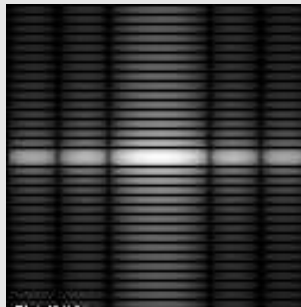
(II)



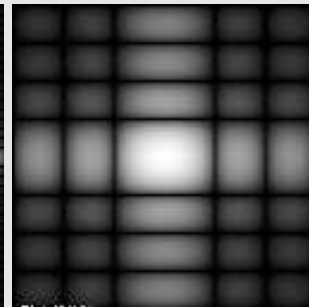
(III)



(IV)



(V)



(VI)

<18 pts>

2. Comment pourrait-on faire pour calculer une TFD 3D à partir d'une TFD 2D ?

<10 pts>

Réponse

1

On va utiliser dans la suite, la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image) croissantes.

- On va procéder par élimination. Dans les six images possibles (a-f), on voit qu'il existe trois images qui se ressemblent à un facteur de contraction près en y . On devrait donc avoir pour ces trois images, trois spectres qui se ressemblent avec un facteur de dilatation en v près. Ces trois spectres sont certainement les spectres (II), (V) et (VI). Sachant qu'une contraction $\rightleftharpoons$ dilatation, on se retrouve donc avec l'association (d-II), (e-V) et (f-VI).

Nota : On aurait pu être aussi un peu plus précis en disant que mathématiquement, le motif blanc dans l'image s'écrit $\Pi(x/T_x) \cdot \Pi(y/T_y) \rightleftharpoons \propto \text{sinc}(2\pi\nu T_x) \cdot \text{sinc}(2\pi v T_y)$. On reconnaît le spectre en sinc dans les images (II), (V) et (VI).

<6 pts>

- On va prendre maintenant la figure (a), celle-ci ne comporte que des discontinuités seulement suivant les 4 diagonales. Son spectre aura donc les mêmes discontinuités plus 90 degré c-a-d, des discontinuités pour les quatre directions diagonales seulement. On a donc la correspondance (a-I).

Nota : On aurait pu être aussi un peu plus précis en disant que mathématiquement, le motif blanc dans l'image s'écrit $\Pi(x, y/)$ rotationné de 45 degré $\rightleftharpoons \propto \text{sinc}(2\pi\nu T) \cdot \text{sinc}(2\pi v T)$ rotationné de 45 degré. On reconnaît le spectre en sinc rotationné de 45 degré dans l'image (I).

<6 pts>

- Il reste l'image (b) et (c) dans lesquelles on voit des motifs (plus semblables dans l'image (c) et quelquefois inversé dans (b)) qui se répète en x et y et les deux spectres (III) et (IV). Si on se base sur la propriété que tout ce qui est périodique dans un espace est discrétisé dans l'autre espace et inversement, on voit bien que les deux spectres (III) et (IV) des successions de zones noires et blanches. Dans le spectre (III), cette succession est plus marquée et doit correspondre à l'image (c) donc association (c-III) et (b-IV).

Nota : On aurait pu être aussi un peu plus précis en disant que mathématiquement, le motif blanc dans l'image est un cercle qui se périodise en x et y . Le spectre résultant sera la fonction sombrero (vue en cours) discrétisée en ν et v .

<6 pts>

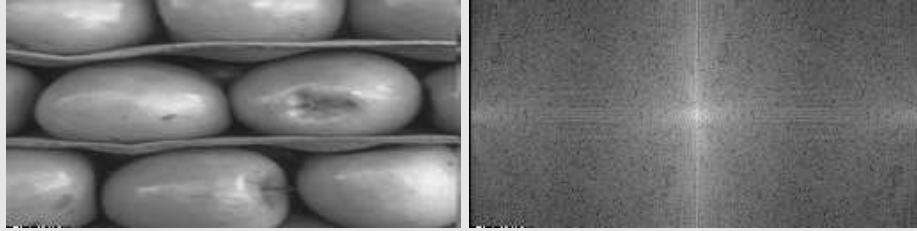
2.

On pourrait utiliser la propriété de séparabilité que l'on utilise déjà lorsqu'on veut calculer une TFD 2D sur une image de longueur et largeur N (de complexité $\mathcal{O}(N^4)$) à partir de $2N$ TFD 1D (de complexité $\mathcal{O}(N^2)$) (cf. slide TFD slide 7). Pour un cube d'images de N images de dimension $N \times N$, par exemple $i(x, y, z)$ avec $x \rightleftharpoons \nu$, $y \rightleftharpoons u$, $z \rightleftharpoons v$, on va calculer d'abord les N TFD 2D des N images pour réaliser $i(x, y, z) \rightleftharpoons F_1(\nu, u, z)$ puis il nous restera à calculer les N^2 TFD 1D (à partir de TFD 2D) des N^2 vecteur de profondeur de cube pour réaliser le passage $F_1(u, \nu, z) \rightleftharpoons F(\nu, u, v)$.

<10 pts>

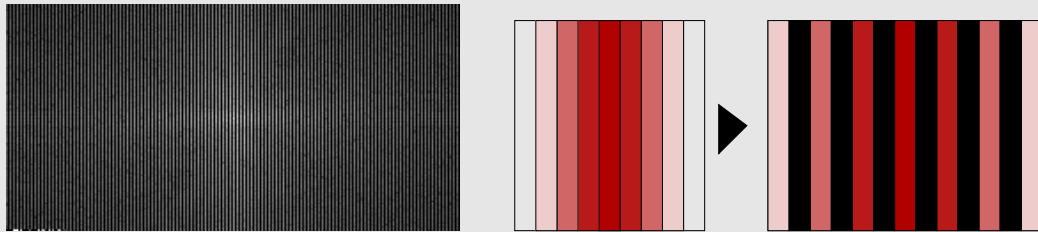
III. Filtrage (30 pts)

1. Donner le nombre d'opérations nécessaires pour un filtrage fréquentiel (utilisant une FFT) versus un filtrage spatial avec un masque de convolution de taille et une image de même taille $N \times N$ (on prendra la convention qu'une multiplication entre deux complexes correspond à 6 opérations élémentaires) et que l'on désire faire un filtrage spatial qui donne le même résultat final que le filtrage fréquentiel.
<10 pts>
2. Soit une image et son spectre après recalage cyclique (fréquence $(0,0)$ au centre de l'image spectrale) :



On réalise le filtrage fréquentiel suivant : La colonne 0 est laissée telle quelle, on insère une colonne de noire ou de valeurs nulles, puis la colonne 1, puis une colonne de valeurs nulles, puis la colonne 2, etc. Bref, on dilate et discrétise le spectre. Puis on fait une TFD inverse et on recalc l'image obtenue entre $[0, 255]$. Que va-t-il se passer pour l'image. Justifiez votre réponse le mieux possible.

<10 pts>



3. Quels sont l'avantage et l'inconvénient principal d'utiliser une dérivée seconde (*via* le calcul d'un laplacien) sur une dérivée première (*via* le calcul d'un gradient) pour déterminer quels sont les pixels de l'image appartenant à un contour ?

<10 pts>

Réponse

1.

Pour le filtrage fréquentiel, on a donc besoin de faire 3 transformées ; une pour l'image et une pour le masque de convolution donc, on a besoin de $2N^2 \log_2 N$ opérations. Auquel s'ajoute la multiplication des deux spectres nécessitant $6N^2$ opérations plus une dernière transformée inverse demandant $N^2 \log_2 N$ opérations, soit en tout $6N^2 + 3N^2 \log_2 N \approx \mathcal{O}(N^2)$ opérations. Puisque l'on désire avoir le même résultat final que le filtrage fréquentiel, on doit supposer que l'image est toroidale. Pour le filtrage spatial, on a besoin de calculer donc N^2 valeurs discrétisées de convolution, chacune demandant N^2 opérations soit en tout $\mathcal{O}(N^4)$ opérations.

<10 pts>

2.

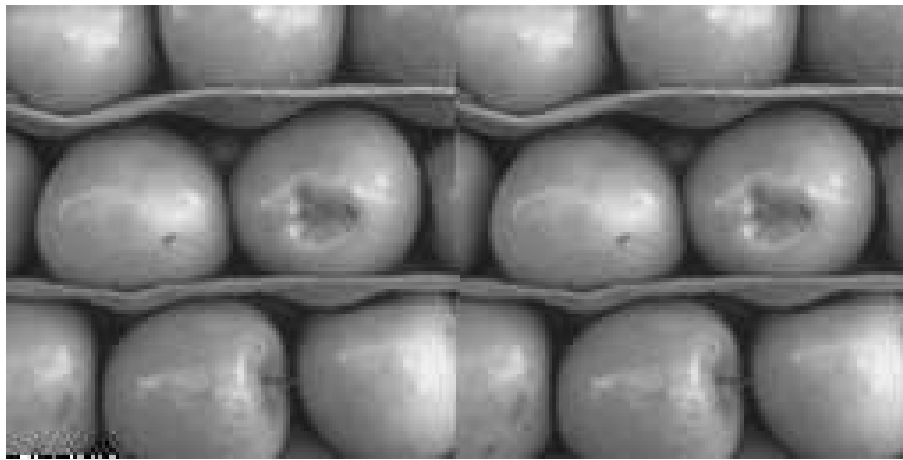
Dilatation en u (par un facteur 2) et discrétisation selon u du spectre tous les $k \cdot 2/N$ (avec k entier) donc dans le domaine spatial, contraction de l'image en x (par un facteur 2) et périodisation en x (i.e., suivant

les colonnes ou la largeur de l'image) de cette image contractée tous les $N/2$ (colonnes), c-a-d deux fois dans l'image (selon sa largeur).

Si on veut être plus détaillé; Si $i(x, y)$ désigne l'image et $I(u, \nu)$ son spectre, l'opération qui consiste à supprimer une colonne sur deux du spectre est une opération de discrétisation (selon u) avec un peigne de Dirac espacé de deux pixels (selon l'axe des u) dans le domaine fréquentiel. Cette opération de filtrage est donc mathématiquement $I(u, \nu) \cdot \text{III}_{T=2/N}(u, \nu)$. Chaque Dirac du peigne est donc espacé de $2/N$ car chaque pixel dans le domaine des fréquences est séparé de $1/N$. Donc puisque :

$$\begin{array}{ccc} i(x, y) & \rightleftharpoons & I(u, \nu) \\ \text{donc, Dilaté en x (fact. 2)} \underbrace{[i(x, y)] * \text{III}_{N/2}(x, y)}_{\text{image périodisée en x}} & \rightleftharpoons & \text{Contracté en u (fact. 2)} \underbrace{[I(u, \nu)] \cdot \text{III}_{2/N}(u, \nu)}_{\text{spectre discrétisé en u}} \end{array}$$

L'image va se périodiser tous les $N/2$ colonnes, N étant la largeur de l'image. On aura donc, dans le domaine spatial



<10 pts>

3.

La technique utilisant l'utilisation d'une estimation du gradient (dérivée première) pour savoir si un pixel de l'image est un contour est relativement sensible à un seuil. Par contre, l'utilisation d'une estimation du d'une dérivée seconde permet de déterminer un point de contour en se basant, après filtrage, sur la détection de passage à zéro (entouré de valeurs d'estimée de dérivée seconde de signe opposé), donc sans réellement de seuil. Le désavantage de l'estimation d'une dérivée seconde sur la dérivée première est sa considérable sensibilité au bruit.

<10 pts>