



DIRO
IFT 3205

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 17/04/2015

I	Filtrage Numérique (88 pts)
II	Analyse Spectrale (27 pts)
Total	115 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Filtrage Numérique (88 pts)

Considérons le filtre numérique défini par l'équation aux différences suivante (entre un signal d'entrée $x(n)$ en un signal de sortie $y(n)$ et où b et c sont des constantes) :

$$y(n) = x(n) - by(n-1) - cy(n-2) \quad (1)$$

1. (a) Trouver la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre et préciser de quelle famille de filtre fait partie et quel est son ordre.
<6 pts>
- (b) Donner la réponse impulsionnelle de ce filtre à partir de l'équation aux différences (5 premiers échantillons, i.e., $y(n=0), y(n=1), y(n=2), y(n=3), y(n=4)$).
<6 pts>

On veut étudier maintenant la stabilité de ce filtre suivant les valeurs des coefficients b et c .

2. (a) Rappeler dans quel domaine du plan complexe doivent se trouver les pôles de $H(z)$ pour que le filtre soit stable.
<3 pts>
 - (b) Rappeler que pour avoir des coefficients réels b et c dans une telle équation aux différences, on doit nécessairement avoir deux pôles, si ceux-ci sont complexes, conjugués (c'est à dire $z = \rho e^{\pm j\phi}$. Donner la valeur de b et c en fonction de ρ et ϕ .
<6 pts>
 - (c) Calculer les pôles z_1, z_2 de $H(z)$ dans les trois cas suivants :
1] $b^2 > 4c$ 2] $b^2 = 4c$ 3] $b^2 < 4c$
<9 pts>
 - (d) Dans le cas où $b^2 > 4c$, montrer que la condition $|b| > c + 1$ doit être respectée pour que le critère de stabilité soit respecté. (raisonner pour $b > 0$ puis pour $b < 0$ et intégrer ensuite ces deux conditions.)
<8 pts>
 - (e) Dans le cas où $b^2 = 4c$, montrer quel est la condition sur b et c pour que le critère de stabilité soit respecté.
<4 pts>
 - (f) Même question dans le cas où $b^2 < 4c$.
<5 pts>
 - (g) D'après les trois résultats précédents, si on rassemble les trois conditions ou inéquations que doit vérifier b et c pour que le filtre (Eq. 1) soit stable, on peut délimiter un domaine du plan, dont les axes sont dirigés par b et c , à l'intérieur duquel un point de coordonnées (b, c) doit se trouver pour que le filtre soit stable. Préciser quel est ce domaine.
<6 pts>
3. On choisit $b = -1.2$ et $c = 0.61$.
 - (a) Calculer les deux pôles de $H(z)$ (expression mathématique et physique) et vérifier qu'avec ces deux pôles, le filtre (Eq. 1) est bien stable.
<5 pts>
 - (b) Donner les pôles et les zéros de la fonction de transfert et représenter les dans le plan complexe avec le cercle de rayon unité. À partir de la position de ces pôles et de ces zéros et la connaissance de la fonction de transfert, calculer le gain statique et le gain à la fréquence de Shannon et le gain à la fréquence de résonance et tracer l'allure du module de la réponse fréquentielle de ce filtre de dégradation.
<10 pts>

4. On choisit maintenant $b = 0$ et $c = 1$.

(a) Donner la réponse impulsionnelle de ce filtre (solution générale $y(n) \forall n$) à l'aide de sa fonction de transfert et de la transformée en Z (TZ) inverse.

<5 pts>

(b) Donner la réponse impulsionnelle de ce filtre à partir de l'équation aux différences (8 premiers échantillons, i.e., $y(n = 0), \dots, y(n = 2), y(n = 3), y(n = 7)$).

<5 pts>

(c) Donner la solution générale de la réponse indicielle de ce système à l'aide de sa fonction de transfert et de la TZ inverse.

<10 pts>

Réponse

1(a)

$$y(n) = x(n) - by(n-1) - cy(n-2)$$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$Y(z) = X(z) - bz^{-1}Y(z) - cz^{-2}Y(z) \Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + bz^{-1} + cz^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + bz + c}$$

Filtre RII (réponse impulsionnelle infinie car équation recursive ou pôles non tous centrés en zéros) d'ordre 2 dans le cas général où $c \neq 0$ et $b \neq 0$.

Ou encore d'ordre 1 si $c = 0$ (dans ce cas : $H(z) = z/(z + b) = 1 - bz^{-1}$)

Ou d'ordre 0 si $c = 0$ et $b = 0$ (dans ce cas $H(z) = 1$)

<6 pts>

1(b)

En utilisant l'équation aux différences $y(n) = x(n) - by(n-1) - cy(n-2)$, et pour $x(n) = \delta(n)$, on obtient :

$$y(0) = x(0) - by(-1) - cy(-2) = 1$$

$$y(1) = x(1) - by(0) - cy(-1) = -b$$

$$y(2) = x(2) - by(1) - cy(0) = b^2 - c$$

$$y(3) = x(3) - by(2) - cy(1) = -b^3 + 2bc$$

$$y(4) = x(4) - by(3) - cy(2) = b^4 - 3b^2c + c^2$$

<6 pts>

2(a)

Pour que le filtre soit stable, il faut que tous les pôles de $H(z)$ soit situées à l'intérieur du cercle de rayon unité (i.e. ; de rayon 1 centré sur l'origine).

<3 pts>

2(b)

Une telle équation aux différences conduit (cf. Q.1(a)) à une fonction de transfert $H(z)$ avec 2 pôles :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 + bz + c} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

Appelons $z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2}$ les deux pôles (possiblement) complexes de $H(z)$, on a :

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - \rho_1 e^{j\phi_1})(z - \rho_2 e^{j\phi_1}) = z^2 - \underbrace{z(\rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2})}_{-b} + \underbrace{\rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}}_c$$

dans le cas où ces pôles sont conjugués ; $z_1 = z_2^*$ (i.e. ; $\rho_1 = \rho_2 = \rho$) et $\phi_1 = -\phi_2 = \phi$, b et c sont réels :

$$\Leftrightarrow b = -2\rho \cos(\phi) \quad \text{et} \quad c = \rho^2$$

<6 pts>

NOTA : Si on voulait exprimer non pas b et c en fonction de ρ et ϕ mais l'inverse, c'est-à-dire ρ et ϕ en fonction de b et c (que j'ai compté juste aussi), on trouverait :

$$\rho = \sqrt{c}$$

$$\phi = \arccos(-b/2\sqrt{c}) \quad \text{ou} \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{|b^2 - 4c|}}{-b}\right)$$

2(c)

Les pôles z_1 et z_2 de $H(z)$ sont solution de l'équation du second degré : $z^2 + bz + c = 0$ dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4c$

- Si $b^2 > 4c$, on trouve deux pôles réels distincts :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

- Si $b^2 = 4c$, on trouve deux pôles réels confondus : $z_1 = z_2 = -b/2$
- Si $b^2 < 4c$, on trouve deux pôles complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-b - j\sqrt{|b^2 - 4c|}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + j\sqrt{|b^2 - 4c|}}{2}$$

si ces pôles sont exprimées en notation mathématiques mais si on préfère les exprimer en notations physiques alors :

$$z_{1,2} = \sqrt{c} \cdot \exp\left(\pm j \arctan \sqrt{|1 - 4c/b^2|}\right)$$

<9 pts>

2(d)

Si $b^2 > 4c$, le filtre est stable si $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$. On a alors :

- pour $b > 0$: $|z_1| = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} > |z_2|$

Il faut donc $|z_1| < 1$ (pour avoir $|z_2| < 1$) donc $b + \sqrt{b^2 - 4c} < 2$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4c < 4 - 4b + b^2 \Leftrightarrow b < c + 1$$

- pour $b < 0$: $|z_2| = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} > |z_1|$

Il faut donc $|z_2| < 1$ (pour avoir $|z_1| < 1$) donc $-b + \sqrt{b^2 - 4c} < 2$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4c < 4 + 4b + b^2 \Leftrightarrow b > -c - 1$$

Ces deux conditions ($b < c + 1$ et $b > -c - 1$) intégrés en une seule nous donne donc $|b| > c + 1$.

<8 pts>

2(e)

Si $b^2 = 4c$, puisque $z_1 = z_2 = -b/2$, le filtre est stable si $|b| < 2$, c'est-à-dire si $b^2 = 4c < 4$, soit $c < 1$.
 <4 pts>

2(f)

Dans le cas où $b^2 < 4c$, on doit avoir : $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{b^2 + 4c - b^2}}{2} = \sqrt{c} < 1 \Leftrightarrow c < 1$

et seulement $c < 1$ car nécessairement $c > 0$ (car on est dans le cas : $4c > b^2$).

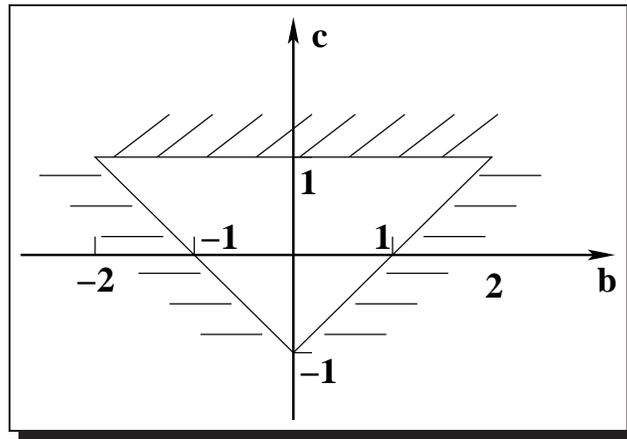
<5 pts>

2(g)

Les trois conditions trouvées en Q.2(d), Q.2(e), Q.2(f) sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} b < c + 1 & (Q.2(d)) \\ b > -c - 1 & (Q.2(d)) \\ c < 1 & (Q.2(f)) \end{cases}$$

définissant trois droites du plan (b, c) et donc un triangle dans lequel; si b et c sont des valeurs telles que le point de coordonnées (b, c) soit à l'intérieur de ce triangle de stabilité, le filtre est stable.



<6 pts>

3(a)

$$z^2 - 1.20z + 0.61 = 0$$

$$\Delta = (1.2)^2 - (4 \times 0.61) = -1 = j^2 \quad \text{donc : } z_{1,2} = \frac{1.2 \pm j}{2} = 0.6 \pm 0.5j \approx 0.78 e^{(0.69j)}$$

$$|z_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow \text{filtre stable}$$

<5 pts>

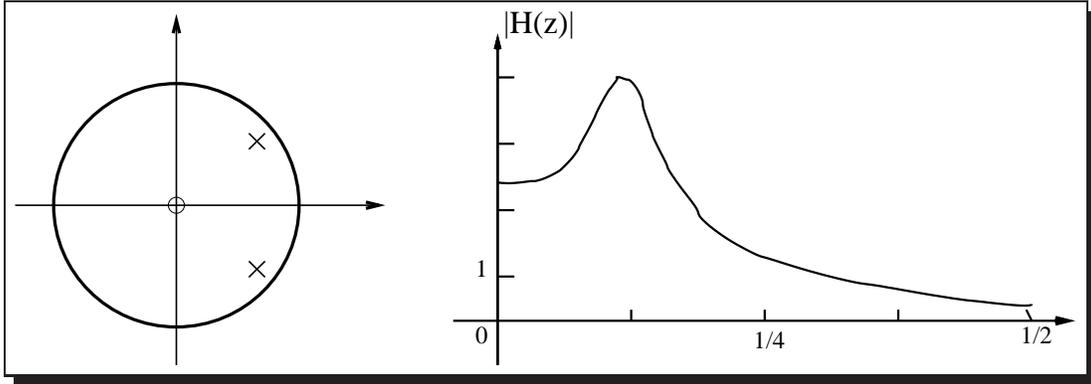
3(b)

On a 2 pôles conjugués ($z_{1,2} = 0.6 \pm 0.5j \approx 0.78 e^{(0.69j)}$) à l'intérieur du cercle unité. On a, respectivement pour le gain statique $H(z = 1)$ (i.e., pour la fréquence numérique $\nu = 0$) et gain à la fréquence de Shannon (pour la fréquence numérique $\nu = 1/2$) $H(z = -1)$:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.2z + 0.61} \quad \text{donc } |H(z = 1)| = \left| \frac{1}{0.41} \right| \approx 2.44 \quad \text{et} \quad |H(z = -1)| = \left| \frac{1}{2.81} \right| \approx 0.36$$

Lorsque z va évoluer sur le cercle unité $\mathcal{C}_{|z|=1}$ faisant ainsi évoluer la fréquence numérique entre $\nu = 0$ et $\nu = 0.5$, $|H(\nu)|$ va croître jusqu'à la fréquence numérique $\nu = 0.69/(2\pi) \approx 0.11$ ou qui sera la fréquence de résonance pour $z = \exp(2\pi \cdot 0.11) \approx 0.77 + 0.64j$ avec :

$$|H(z = 0.77 + 0.64j)| \approx \left| \frac{0.18 + 0.99j}{0.18 + 0.99j - 0.924 - 0.768j + 0.61} \right| \approx \left| \frac{0.18 + 0.99j}{-0.134 + 0.222j} \right| \approx \frac{1.00623}{0.25} \approx 4$$



<10 pts>

4(a)

Ce choix de b et c conduit à la fonction de transfert $H(z)$ suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 + 1} = \frac{z^2}{(z + j)(z - j)}$$

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, et pour $x(n) = \delta(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} X(z) = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Pour : } X(z) = 1 \quad Y(z) &= \frac{z^2}{(z^2 + 1)} \\ &\downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \mathcal{U}(n) \quad (\text{cf. table}) \end{aligned}$$

<5 pts>

NOTA -1- : On aurait pu trouver le résultat par simple division et déduction :

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6} + \dots \stackrel{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} y(n) = \{1, 0, -1, 0, \dots\} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \mathcal{U}(n)$$

NOTA -2- : On obtient comme signal impulsionnel, le signal $\{1, 0, -1, 0, \dots\}$ qui est en fait le signal périodique de 4 échantillons donc de fréquence numérique $\nu = 0.25$. On aurait pu prévoir ce résultat car, vu les pôles du filtre en j et $-j$ dans le plan complexe, le filtre amplifie la fréquence numérique $\nu = 0.25$. Si on lui présente en entrée de ce filtre le dirac ; la sortie de ce filtre présentera en sortie le signal périodique de fréquence numérique $\nu = 0.25$ *i.e.*, se répétant tous les 4 échantillons.

4(b)

En utilisant l'équation aux différences $y(n) = x(n) - y(n - 2)$, et pour $x(n) = \mathcal{U}(n)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
y(0) &= x(0) - y(-2) = 1 - 0 = 1 \\
y(1) &= x(1) - y(-1) = 1 - 0 = 1 \\
y(2) &= x(2) - y(0) = 1 - 1 = 0 \\
y(3) &= x(3) - y(1) = 1 - 1 = 0 \\
y(4) &= x(4) - y(2) = 1 - 0 = 1 \\
y(5) &= x(2) - y(0) = 1 - 0 = 1 \\
y(6) &= x(3) - y(1) = 1 - 1 = 0 \\
y(7) &= x(4) - y(2) = 1 - 0 = 0
\end{aligned}$$

<5 pts>

NOTA : On obtient comme signal indiciel, le signal $\{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots\}$ qui est en fait aussi un signal périodique de 4 échantillons donc de fréquence numérique $\nu = 0.25$.

4(c)

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, et pour $x(n) = \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} X(z) = z/(z-1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{Pour : } X(z) = \frac{z}{z-1} \quad Y(z) &= \frac{z^2}{(z^2+1)} \cdot \frac{z}{(z-1)} = \frac{z^3}{z^3 - z^2 + z - 1} = 1 + \frac{z^2 - z + 1}{(z-j)(z+j)(z-1)} \\
&= 1 + \frac{(1+j)/4}{z-j} + \frac{(1-j)/4}{z+j} + \frac{1/2}{z-1} \\
&\quad \downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
y(n) &= \delta(n) + \frac{\sqrt{2}}{4} \exp(-j\pi/4) \exp(jn\pi/2) - \frac{\sqrt{2}}{4} \exp(j\pi/4) \exp(-jn\pi/2) + 1/2 \cdot \mathcal{U}(n-1) \\
y(n) &= \delta(n) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(n\pi/2 - \pi/4) \cdot \mathcal{U}(n-1) + 1/2 \cdot \mathcal{U}(n-1)
\end{aligned}$$

<10 pts>

NOTA -1- : On aurait pu raisonner de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)} = 1 + \frac{z^2 - z + 1}{(z-j)(z+j)(z-1)} \\
&= 1 + \frac{az+b}{z^2+1} + \frac{c}{z-1} = 1 + \frac{0.5z-0.5}{z^2+1} + \frac{0.5}{z-1} \\
&\quad \downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
y(n) &= \delta(n) - 0.5 \sin[\pi/2(n-1)]\mathcal{U}(n-1) + 0.5\mathcal{U}(n-1)
\end{aligned}$$

qui conduit bien aussi au signal numérique $\{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots\}$.

c se trouve facilement. b et a ont été trouvés en faisant $z = 0$ et $z = -1$ conduisant aux équations $-1 = b - c$ et $1 = a - b$.

NOTA -2- : On obtient comme signal indiciel, le signal $\{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots\}$ qui est en fait aussi un signal périodique de 4 échantillons donc de fréquence numérique $\nu = 0.25$. Cela se comprend car, vue les pôles du filtre en j et $-j$ dans le plan complexe, le filtre amplifiera toujours cette fréquence numérique $\nu = 0.25$ quelque soit le signal présenté en entrée de ce filtre et présentera toujours en sortie un signal se répétant tout les 4 échantillons si cette fréquence est présente dans le signal d'entrée (ce qui est le cas ici, cf. Examen Intra de cette année).

II. Analyse Spectrale (27 pts)

Soit un signal analogique $x(t)$ de durée $T = 200$ ms (milliseconde) de la forme :

$$x(t) = \alpha_1 \sin(2\pi \cdot 100 t) + \alpha_2 \sin(2\pi \cdot 150 t) + \text{Bruit}$$

que l'on a discretisé avec $N = 1000$ échantillons et dont on souhaite analyser numériquement le spectre et pour lequel les valeurs α_1 et α_2 sont compris dans l'intervalle $[0 : 1]$ et représente de l'information utile.

1. Si on discretise le signal de durée $T = 200$ ms avec $N = 1000$ échantillons à l'aide d'une TFD (Transformée de Fourier Discrète). As-t-on respecté le théorème de Shannon ? Justifier bien votre réponse (par un calcul).

< 5 pts >

2. Sachant que le bruit est très important, proposer une stratégie, en la justifiant, qui permettrait de récupérer le plus précisément possible, les valeurs α_1 et α_2 de cette analyse. Donner tous les détails de cette stratégie afin que celle-ci soit reproductible et si une variable de cette stratégie doit être vérifiée en pratique, préciser laquelle et pourquoi (on utilisera dans cette question une TFD).

< 15 pts >

3. On voudrait faire la stratégie précédente avec une FFT pour diminuer le temps de calcul. Indiquer si c'est possible et comment ou à quel prix ?

< 7 pts >

Réponse

1.

On doit échantillonner à une fréquence qui est égale à (au moins) deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal. Dans notre cas, où l'information utile dans le signal $x(t)$ est modélisée par la présence (plus ou moins importante) des fréquences informatives $\{100, 150\}$ Hz, on devra échantillonner à une fréquence minimale supérieure à 300 Hz ; soit plus de 300 échantillons par seconde. En prenant 1000 échantillons du signal, pour un signal de durée $T = 200$ ms, on échantillonne, dans cet exemple, à $F_e = 5000 = 1000/0.2$ Hz (ou 5000 échantillons par seconde), ce qui assure largement que la fréquence d'échantillonnage de Shannon soit respectée.

< 5 pts >

2.

•1] Puisque le signal est très bruité, on va donc utiliser dans cette question la stratégie dite du périodogramme moyenné qui consiste à calculer la moyenne des spectres obtenus sur chaque blocs de longueur L du signal. De plus, on se rappellera que le chevauchement des blocs du périodogramme moyenné doit être idéalement entre 25% et 50% et cette variable sera précisément notre variable inconnue qui mériterait d'être vérifiée expérimentalement car elle dépend du bruit qui lui est précisé être grand mais sans plus de détails.

•2] De plus, on fera en sorte d'obtenir une résolution fréquentielle qui permette d'obtenir des pics non dédoublés donc il faudra faire en sorte que $\Delta\nu = 1/T_b$ soit un sous-multiple de 50 et 60 Hz avec T_b la longueur de chaque bloc du périodogramme moyenné.

•3] On prendra une fenêtre de Hanning qui possède un bon compromis résolution fréquentielle et amplitude pour pondérer chaque bloc et qui va gommer les fausses discontinuités du signal aux extrémités et ainsi augmenter encore la précision spectrale.

En prenant des blocs de longueur $T = 20$ ms, (100 échantillons) on a $\Delta\nu = 1/T = 50$ Hz, soit la résolution fréquentielle idéale pour éviter un dédoublement des pics (car c'est un multiple commun des deux fréquences

informatives $\{100, 150\}$ Hz). En utilisant donc ces blocs de $T = 20$ ms ou 100 échantillons, on peut créer 13 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 24\%$ ou 14 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 29\%$ ou 15 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 34\%$ ou 16 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 38\%$ ou 17 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 42\%$ ou 18 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 45\%$ ou 19 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 48\%$ ou 20 blocs avec un taux de recouvrement de $\approx 50\%$.

<15 pts>

3.

En plus de prendre des blocs de 100 échantillons que l'on pondère avec une fenêtre de Hanning, on ajoute (principe du *zero padding*) 28 zéros pour obtenir un signal sur chaque bloc T_b avec un nombre d'échantillons en puissance de deux que l'on pourrait calculer à l'aide d'une FFT. Mais, dans ce cas, la nouvelle résolution fréquentielle est $\Delta\nu = 1/T = 1/(128 \times 0.2 \times 10^{-3}) = 39$ Hz qui n'est plus un sous multiple des fréquences à détecter. On gagnerait en vitesse mais on perdrait en résolution en amplitude.

<7 pts>