



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 16/02/2015

I	Série & Transformée de Fourier (63 pts)
II	TFD et Calcul de Spectre (28 pts)
III	Filtrage (32 pts)
Total	123 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

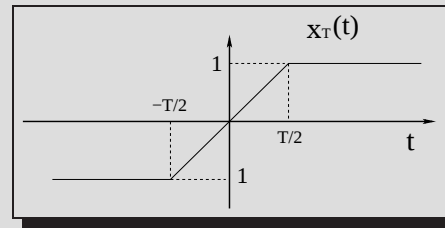
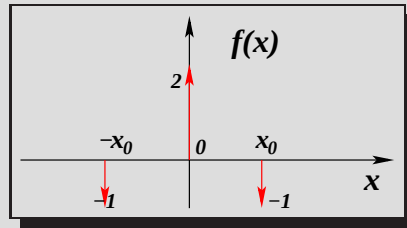
I. Série & Transformée de Fourier (63 pts)

1. Expliquer ce que le modèle des fréquences négatives de la Transformée de Fourier (TF) nous a permis de comprendre comme problème(s) qui ne pouvait être compris à partir du modèle plus simple de série de Fourier.

<8 pts>.

2. Que peut-on dire de **toutes** les propriétés de $F(\nu)$, la TF de la distribution $f(x)$ (sans la calculer) représentée par le graphe ci-dessous (à gauche). Calculer ensuite cette TF.

<12 pts>



3. (a) Soit la fonction temporelle $x_T(t)$ représentée ci-dessus (à droite). Soit aussi $X_T(\nu) = \mathcal{F}[x_T(t)]$, i.e., la TF de $x_T(t)$. Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés de $X_T(\nu)$ que l'on pourrait déduire des propriétés de $x_T(t)$ et des propriétés de la TF.

<4 pts>

- (b) Représenter l'allure de $x'_T(t)$, la dérivée de la fonction $x_T(t)$ et exprimer analytiquement $x'_T(t)$ à partir d'une fonction connue pour laquelle on connaît sa TF.

<4 pts>

- (c) En déduire finalement, à partir d'une propriété de la TF, $X_T(\nu)$, la TF de $x_T(t)$.

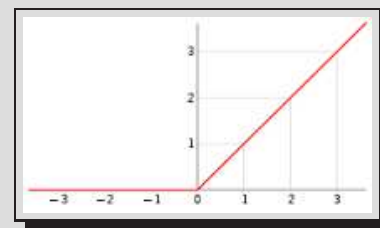
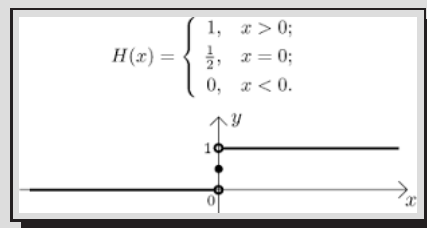
<4 pts>

- (d) Que devient (i.e., quel est le nom de la fonction) $x_T(t)$ quand $\lim_{T \rightarrow 0}$. Déduire des questions précédentes que la TF de cette fonction est $\mathcal{F}[x_{T \rightarrow 0}(t)] = 1/(\pi j\nu)$ et rappeler pourquoi on n'aurait pas pu calculer la TF de cette fonction en utilisant directement la définition de la TF utilisant la formule intégrale.

<4 pts>

4. (a) Sachant que la fonction $f(x) = \text{sgn}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} 1/(\pi j\nu)$. En ajoutant à $f(x)$, la bonne constante et le bon facteur d'échelle, en déduire la TF de la fonction d'Heaviside $H(x)$:

<6 pts>



- (b) Connaissant la transformée de la fonction Heaviside, et en utilisant la TF de la fonction $xf(x)$, en déduire la TF de la fonction rampe $r(x)$ (représenté ci-dessus à droite).

<8 pts>

- (c) Connaissant la transformée de la fonction Heaviside, et en utilisant la TF d'une fonction dérivée en déduire la TF de la fonction rampe $r(x)$.

<8 pts>

5. Calculer $F(\nu)$, la TF de $f(x) = \exp(-x^2)$ et vérifier quel est le produit entre l'écart type de la Gaussienne $f(x)$ et l'écart type de la Gaussienne $F(\nu)$.

<5 pts>.

Réponse

1.

Les fréquences négatives sont une abstraction du modèle de la Transformée de Fourier (TF) qui nous a permis, en fait, de comprendre dans ce cours, deux concepts ;

[1–] Le premier est l'aliasing ou repliement spectral qui ne pouvait être initialement expliqué à partir du modèle trop simpliste de série de Fourier et qui en fait, dans la TF, est dû à l'altération des (généralement hautes) fréquences du motif spectral de base (centré sur la fréquence nulle et associé au spectre du signal continu) par les fréquences négatives du même motif spectral se répétant, dans le domaine des fréquences, tous les nf_e avec $n \in \mathbb{N}$) (signal échantillonné avec $f_e \Rightarrow$ spectre périodique tous les nf_e avec $n \in \mathbb{N}$).

[2–] Le deuxième concept apporté par les fréquences négatives, nous a permis de comprendre que la TF discrète (TFD) nous donne en fait une petite fenêtre spectrale d'un spectre beaucoup plus grand qui est cyclique (périodique en u et en ν) et dont le module est pair. Ainsi, une translation du spectre dans le domaine des fréquences en $u = \nu = N/2$ avec N la taille de l'image nous a permis de retrouver le spectre du signal centré au centre de l'image (technique dite du recalage cyclique).

<8 pts>

Nota : D'autres concepts intéressants en traitement du signal sont expliqués par cette abstraction créée par ces fréquences négatives mais qui ne sont pas au programme de ce cours. En particulier, cette abstraction permet d'expliquer la TF de signaux complexes mais aussi la notion de repliement spatial et plein d'autres choses...

2.

La distribution $f(x)$ est réelle et paire, sa transformée $F(\nu)$ sera aussi réelle et paire. La distribution $f(x)$ étant non périodique, son spectre $F(\nu)$ sera continu et comme $f(x)$ possède des discontinuités, le support spectral de $F(\nu)$ sera grand (beaucoup d'harmoniques seront nécessaires pour reconstruire ce signal).

<6 pts>

$$\text{Sachant que : } f(x) = -\delta(x - x_0) + 2\delta(x) - \delta(x + x_0) \quad \text{et que :} \\ \delta(x - x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-2\pi j\nu x_0) \quad \text{et} \quad \delta(x + x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(2\pi j\nu x_0) \quad \text{on a donc :}$$

$$\begin{aligned} f(x) = -\delta(x - x_0) + 2\delta(x) - \delta(x + x_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -\exp(-2\pi j\nu x_0) + 2 - \exp(2\pi j\nu x_0) \\ &= 2 - \left(\exp(2\pi j\nu x_0) + \exp(-2\pi j\nu x_0) \right) \\ &= 2 - 2 \cos(2\pi\nu x_0) = 4 \sin^2(\pi\nu x_0) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } f(x) = -\delta(x - x_0) + 2\delta(x) - \delta(x + x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) = 4 \sin^2(\pi\nu x_0)$$

<6 pts>

3.(a)

La fonction $x_T(t)$ est impaire, sa TF sera donc imaginaire pure. $x_T(t)$ étant de plus une fonction réelle, sa TF sera donc à symétrie hermitienne. Sa TF sera donc imaginaire pure et impaire.

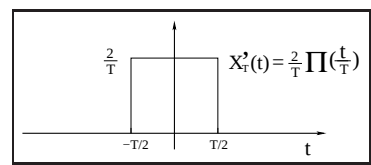
De plus, le signal étant non périodique, sa TF sera continue et $x_T(t)$ possédant deux discontinuités (à l'origine), sa TF demandera beaucoup d'harmoniques pour reconstruire cette discontinuité ce qui se traduira par un support fréquentiel assez grand (cette dernière remarque sera d'autant plus vraie lorsque T tendra vers 0, faisant apparaître une discontinuité pour laquelle la dérivée en ce point sera infinie).

<4 pts>

3.(b)

On trouve facilement que $x'_T(t)$ s'exprime à partir de la fonction porte (appelée aussi fonction ouverture ou rectangle), i.e., : $x'_T(t) = \frac{2}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$.

<4 pts>



3.(c)

Avec la correspondance $t \rightleftharpoons \nu$, on va se servir de la propriété de dérivation qui stipule que $\mathcal{F}[f'(t)] = (2\pi j\nu) F(\nu)$ et bien sur de la relation précédente pour écrire :

$$x'_T(t) = \frac{2}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu) F(\nu) = 2 \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T}$$

qui nous permet de trouver $F(\nu) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[x_T(t)] : \quad \mathcal{F}[x_T(t)] = \frac{1}{\pi j \nu} \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} = -j \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi^2 \nu^2 T}$
<4 pts>

Nota : A ce stade, on peut vérifier que ce qui avait été intuité à la question 1.(a) est vraie ; à savoir que la TF de $x_T(t)$ est continue, imaginaire pur et impair et à grand support fréquentiel.

3.(d)

Quand $\lim_{T \rightarrow 0}$, on retrouve la fonction signe, notée $\text{sgn}(t)$ et pour laquelle :

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

dont la TF devrait être : $\lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi j \nu} \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right\} = F(\nu) = \frac{1}{\pi j \nu}$

Et on n'aurait pas pu calculer cette TF à partir de la définition intégrale sur $x_T(t)$ car celle-ci n'est pas carré ou absolument sommable.

<4 pts>

4.(a)

Par linéarité de la TF : $H(x) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(x) + 1) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} H(\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi j \nu} + \delta(\nu)\right) = \frac{-j}{2\pi \nu} + \frac{\delta(\nu)}{2}$
<6 pts>

4.(b)

On a : $\mathcal{F}[xf(x)] = -\frac{F'(\nu)}{2\pi j}$ (puisque $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$, et donc par la propriété duale ; $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2\pi jxf(x)$). De ces faits, soit $R(\nu)$, la TF de la fonction rampe, on a :

$$r(x) = xH(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} R(\nu) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi j} \left(\frac{-j}{\pi \nu} + \delta(\nu) \right)' = -\frac{1}{4\pi j} \left(\frac{j}{\pi \nu^2} + \delta'(\nu) \right) = \frac{-1}{4\pi^2 \nu^2} + \frac{j \delta'(\nu)}{4\pi}$$

<8 pts>

4.(c)

On a : $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$, et donc puisque :

$$\begin{aligned} r'(x) = H(x) & \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu) R(\nu) = H(\nu) = \frac{-j}{2\pi \nu} + \frac{\delta(\nu)}{2} \\ R(\nu) & = \frac{-1}{4\pi^2 \nu^2} + \frac{-j \delta(\nu)}{4\pi \nu} \end{aligned}$$

<8 pts>

Nota : De la relation 4.(b) et 4.(c), on voit que, nécessairement :

$$\frac{j \delta'(\nu)}{4\pi} = \frac{-j \delta(\nu)}{4\pi \nu} \Leftrightarrow \nu \delta'(\nu) = -\delta(\nu) \quad \text{ou} \quad x \delta'(x) = -\delta(x)$$

on retrouve ici la célèbre relation liant le Dirac et sa version dérivée faite en exercice (Démonstration 3).

5.

Avec la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, on a vu la propriété de contraction dilatation et montré en cours que :

$$\begin{aligned} \exp(-\pi x^2) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \exp(-\pi \nu^2) \\ f(ax) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \exp(-x^2) = \exp\left(-\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} x\right)^2\right) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \sqrt{\pi} \exp(-\pi \nu^2) = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 \nu^2)$$

Et on peut vérifier que $\sigma_s \sigma_\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{2\pi}$ dans ce cas aussi.

<5 pts>

II. TFD et Spectre (28 pts)

- Pour chacune de ces six petites images extraites de l'image de LENA, indiquer sa transformée de Fourier (module) correspondante après avoir fourni une explication ou une justification (vous pouvez procéder en utilisant aussi la technique d'élimination).

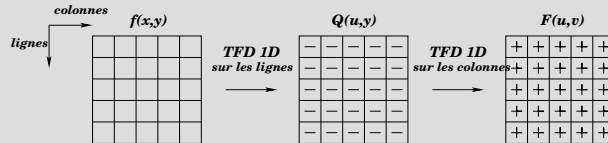


Pour les imagerie, de gauche à droite et de haut en bas, on a l'imagerie I (ligne verticale), II (ligne diagonale), III (chapeau), IV (oeil), V (texture du chapeau), VI (épaule) et pour les transformées de Fourier, à gauche de haut en bas (spectre a, b, c) et à droite de haut en bas (spectre d, e, f).

<18 pts>

- (a) En utilisant la propriété de séparabilité, quelle est la complexité algorithmique d'une TFD (Transformée de Fourier Discrète) sur une image de taille $N \times N$?

<5 pts>



- (b) Dire, en le justifiant, si la transformée d'Hadamard (avec la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} u$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$), donné par la formule ci-dessous, possède la propriété de séparabilité comme la Transformée de Fourier.

<5 pts>

$$H(u, \nu) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) a_i(u) + b_i(y) a_i(\nu)}$$

Réponse

1.

On va utiliser dans la suite, la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image) croissantes. On va procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident :

- $VI - f$: L'imagette VI (épaule) présente une région presque homogène en niveaux de gris, relativement smooth, lisse avec très peu de hautes fréquences, c'est-à-dire de discontinuités ; on doit donc trouver le spectre le plus concentré dans les basses fréquences sans valeur spectrale exhibant une direction privilégiée. C'est donc, sans ambiguïté le spectre f .

<3 pts>

- $II - d$: L'imagette II (ligne diagonale) présente deux discontinuités diagonales bien marqué ; au niveau du spectre, on aura donc un ensemble de coefficients spectraux orienté dans la direction perpendiculaire. Aucun doute possible, c'est le spectre d . On note aussi une légère discrétisation dans cette direction perpendiculaire qui nous indique qu'un motif se répète dans le domaine spatial ; c'est en fait la ligne diagonale qui se répète deux fois.

<3 pts>

- $III - b$: L'imagette III (chapeau) présente une ligne diagonale ou discontinuité diagonale. au niveau du spectre, on aura donc un ensemble de coefficients spectraux orienté dans la direction perpendiculaire. Aucun doute possible, c'est le spectre b .

<3 pts>

- $V - c$: L'imagette V (texture du chapeau) est celle qui a le plus de discontinuités et de variations rapides spatiales ou détails dans toutes les directions. Au niveau du spectre, on aura un spectre avec beaucoup de hautes fréquences dans toutes les directions possibles et un support le plus grand possible. Aucun doute possible, c'est le spectre c .

<3 pts>

- $IV - e$: L'imagette IV (oeil) possède beaucoup de détails ; c'est-à-dire de hautes fréquences mais pas autant que l'imagette V. De plus dans l'oeil, des discontinuités en forme de ligne verticale (noir et blanc de l'oeil) et horizontale (blanc de l'oeil et paupière) apparaît. Son spectre contiendra de hautes fréquences privilégiant des coefficients spectraux forts donc des lignes blanches dans la direction horizontale et verticale. Aucun doute possible, c'est le spectre e .

<3 pts>

- $I - a$: L'imagette I (ligne verticale) comporte somme toute peu de détails mais une discontinuité sous forme de ligne verticale avec une transition un peu floue. Son spectre comportera peu de hautes fréquences mais une discontinuité spectrale sous forme d'une légère ligne horizontale. Aucun doute possible, c'est le spectre a .

<3 pts>

2.(a)

Pour chaque ligne et colonne ($2N$), on fait une TFD 1D qui demande de calculer N coefficients spectraux et pour chacun d'eux une somme sur N valeurs discrètes du signal est nécessaire. Soit une complexité de $O(2N^3)$.

<5 pts>

2.(b)

Oui le noyau de cette transformée peut être séparé en deux termes :

$$(-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)a_i(u)} \quad \text{et} \quad (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(y)a_i(v)}$$

que l'on peut appliquer au vecteur 1D ligne puis colonne de l'image.

<5 pts>

III. Filtrage Spatial et Fréquentiel (32 pts)

1. Soit l'image ci-dessous dégradée par un défaut de transmission par ligne qui génère des pertes d'information sur celle-ci se traduisant sur l'image par quelques segments de lignes horizontales noires d'épaisseur 1 pixel et de taille variable.



- (a) Trouver parmi les filtres proposés, le filtre spatial qui vous semble le plus adéquat pour restaurer (par filtrage spatial) cette image dégradée par ce défaut de transmission par ligne. Justifier bien votre réponse. S'agit-il de :

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<7 pts>

- (b) On aimerait calculer la fonction de transfert en module (ou réponse fréquentielle) $H(\nu)$ du masque de convolution suivant :

$$h(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sans calculer de TF, énumérer toutes les propriétés que possède $H(\nu)$ à partir des propriétés de la fonction discrète $h(x)$. En utilisant la TFD, calculer puis tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (module). Interpréter l'allure de cette réponse fréquentielle. De quel type de filtre (passe-bas, passe-haut, Passe-bande, etc.) s'agit-il ? Quel effet aura ce filtre sur une image naturelle (non synthétique) ?

<12 pts>

- (c) Supposons que l'on convolve l'image dégradé ($i(x, y)$) avec ce filtre avec la formule habituelle :

$$\forall x, y \quad o(x, y) = i(x, y) * h(x) = \sum_{i=-1}^{i=1} i(x+i, y) h(i)$$

Comment pourrait-on améliorer la restauration (pour que celle-ci soit meilleur par rapport à une simple convolution) qui permettrait de prendre en compte intelligemment le fait que dans le cas d'une image dégradée par un défaut de ligne, les pixels affectés par cette dégradation sont nécessairement noirs, i.e., ont toujours un niveaux de gris nulle ?

<5 pts>

2. On aimerait maintenant enlever ou atténuer cette dégradation en utilisant le filtrage fréquentiel, i.e., la Transformée de Fourier (TF). Indiquer d'une part comment cette dégradation influencera le module de la TF de cette image et quelle pourrait être l'opération fréquentielle permettant d'atténuer cette dégradation.

<8 pts>

Réponse

1.(a)

Du fait que les lignes sont d'épaisseur un seul pixel, il est plus judicieux, dans ce cas, de ne pas tenir en compte, dans ce filtrage spatial, du niveau de gris du pixel centrale qui est dégradé. De plus, les lignes étant horizontales, on écarte d'emblée les filtres horizontales (ou construit avec un filtre horizontale comme les filtres spatiaux proposés 2D) qui moyenneront localement, dans ces zones dégradées, que des valeurs de niveaux de gris erronés.

Il ne reste que le filtre $3 \times \text{lignes}$ (vertical) suivant : $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ qui permettra de bien restorer cette image.

<7 pts>

1.(b)

Tous les coefficients de ce filtre sont positifs, c'est donc un filtre passe-bas qui ne changera pas la moyenne de l'image (car ce masque est normalisé avec une somme de coefficients égale à un). De plus la MTF $H(\nu)$ sera réelle et pair, car le masque de convolution est pair et réel.

<3 pts>

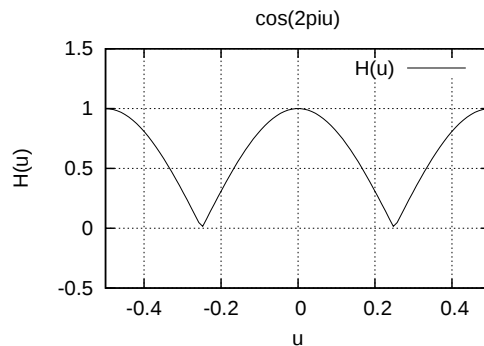
$$\begin{aligned} \text{Avec } x \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu, \quad \mathcal{F}(h(x)) = H(\nu) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j \nu x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j \nu x) \\ &= \frac{1}{2} [\exp(2\pi j \nu) + \exp(-2\pi j \nu)] = \frac{1}{2} [2 \cos(2\pi \nu)] = \cos(2\pi \nu) \end{aligned}$$

<5 pts>

Nota-1- : On aurait pu facilement prévoir l'allure de ce spectre en utilisant le résultat de l'exercice I.2. En effet, dans le domaine spatial, $h(x)$ a l'allure de $f(x)$ multiplié par -1 pour lequel on a ajouté $2\delta(x)$. Du coup, dans le domaine spectral, à cause de la linéarité de la TF, on obtient $F(\nu)$ multiplié par $-1 + 2$, c'est à dire $F(\nu) \propto \cos(2\pi \nu x_0)$. Comme $x_0 = \Delta x = 1$ dans notre cas, on s'attend donc à une réponse fréquentielle du type $F(\nu) \propto \cos(2\pi \nu)$.

Nota-2- : On aurait pu aussi le démontrer en disant que $h(x)$ est paire et réelle donc $H(\nu)$ sera réel et paire et le calcul de sa F ou F^{-1} nous donnera la même chose. Le calcul de F^{-1} de $h(x)$ est un signal de fréquence pure dans l'autre espace et nécessairement un cos, car celui-ci est paire. Le calcul de la fréquence de ce cos, comme réponse fréquentielle se fait ensuite comme dans Nota-1-.

Le spectre est périodique puisque le signal dans le domaine spatial est discret et il se répète tous les $1/T_e = 1/\Delta x = 1$ (fréquence numérique puisqu'à aucun moment, on ne connaît la période d'échantillonnage). Donc un support de 1 dans le domaine spectral est suffisant. Comme on est intéressé à voir (mathématiquement) l'allure spectrale de cette MTF centré en 0, une réponse fréquentielle sur $[-0.5, 0.5]$ est satisfaisante. Le tracé de $|H(\nu)|$ nous donne :



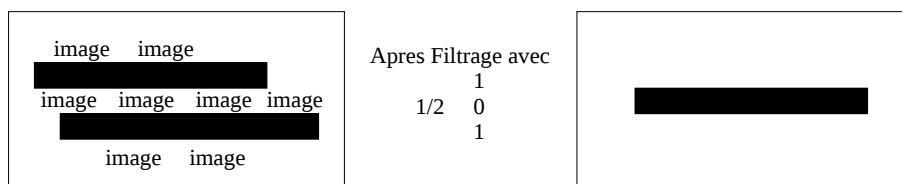
Le filtre obtenu est un filtre passe-bas jusqu'à la fréquence numérique $\nu = 0.25$ (pour laquelle $\cos(2\pi \nu) = 1/4$) s'annule. Après, on peut constater que le filtre comporte un très gros lobe secondaire qui fera en sorte

de ne pas atténuer beaucoup les fréquences numériques très élevées voire même pas du tout filtrer (i.e., atténuer) les fréquences numériques $\nu = 0.5$ ($|H(\nu = 0.5)| = 1$).

Pour une image naturelle (non synthétique), on sait que le spectre est concentré dans les basses ou moyennes fréquences (< 0.25 ou spectre concentré dans la première moitié du support fréquentiel de longueur total 0.5). Le filtre se comportera donc comme un filtre Passe-Bas éliminant les hautes fréquences en lignes (c'est à dire les discontinuités comme des lignes horizontales noires d'épaisseur 1 pixel créées par un défaut de transmission par ligne).

<4 pts>

Nota : Comme cela a été précédemment dit, ce filtre va laisser passer les hautes fréquences $\nu = 0.5$ sans les atténuer. Une fréquence numérique de $\nu = 0.5$ correspond concrètement à une période numérique de $T = 2$ pixels (une fréquence physique de $\nu = 0.5 f_e$ correspondant à une période physique de $T = 2 T_e$ et ici $T_e = \Delta x = 1$). Donc le filtre va laisser passer toute les dégradations, sans les atténuer, de fréquence $\nu = 0.5$ ou de période $T = 2$ pixels en y . Une telle dégradation de période $T = 2$ pixels en y pourrait être donnée par deux lignes noires horizontales espacés de un pixel :



et dans ce cas, on voit bien que notre filtrage laisserait passer une telle dégradation. On voit donc (et on comprend aussi), dans ce cas, les limite de notre filtre $h(x)$ qui ne doit pas être confronté à des défauts de ligne séparés d'un seul pixel.

1.(c)

On pourrait-on améliorer la restauration et prendre en compte intelligemment le fait que dans le cas d'une image dégradée par un défaut de ligne, les pixels affectés par cette dégradation ont un niveau de gris nulle en ne filtrant, par ce filtre, que les pixels possédant le niveau de gris nul.

<5 pts>

$$\text{if } (i(x, y) == 0) \quad o(x, y) = i(x, y) * h(x) = \sum_{i=-1}^{i=1} i(x + i, y) h(i)$$

2.

À cause de ces lignes noires horizontales faisant apparaître plusieurs discontinuités dans l'image, on s'attend à ce que le module de la TF de cette image laisse apparaître une ligne blanche verticale centrée dans son spectre qui correspondrait en fait à de fort coefficients spectraux nécessaires pour reconstruire l'image avec ses dégradations.

L'opération fréquentielle qui éliminerait (mettrait à zéro) la partie haute fréquence de cette ligne blanche verticale dans le spectre de l'image serait donc l'opération fréquentielle appropriée permettant d'atténuer fortement cette dégradation.

<8 pts>

Nota : La technique de filtrage qui serait tout de même la plus efficace est celle donnée dans la question 1.c qui utiliserait au mieux toute l'information de la dégradation; notamment le fait que les pixels altérés reste toujours avec un niveau de gris nulle; ce qui permet de cibler exactement où se trouve les dégradations et de corriger seulement ces pixels dégradés.