



DIRO
IFT 3205

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 22/04/2016

I	Filtrage Numérique (75 pts)
II	Filtrage Numérique (24 pts)
III	Analyse Spectrale (23 pts)
Total	122 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Filtrage Numérique (75 pts)

Considérons le filtre numérique défini par l'équation aux différences suivante (entre un signal d'entrée $x(n)$ en un signal de sortie $y(n)$ et où b est une constante réelle différente de 0) :

$$y(n) = x(n) + b y(n - 1) \quad (1)$$

1. Trouver la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre et préciser de quelle famille de filtre, $H(z)$ fait partie et quel est son ordre, ses pôles et ses zéros, et la condition sur b pour qu'il soit stable.
<6 pts>
2. Dessiner la structure du filtre (en mettant l'entrée $x(n)$, la sortie $y(n)$, une case mémoire sera symbolisée par un carré avec un z^{-1} à l'intérieur et une multiplication par b par un triangle sur lequel est inscrit b .
<3 pts>
3. Donner la réponse impulsionnelle de ce filtre à partir de l'équation aux différences (3 premiers échantillons, *i.e.*, $y(n = 0), y(n = 1), y(n = 2)$) et pour le n -ième échantillon $y(n)$. Quelle est la condition sur $y(n)$ qui permette d'exprimer la stabilité du filtre ?
<6 pts>
4. Donner la réponse impulsionnelle de ce filtre (solution générale $y(n), \forall n$), à l'aide de sa fonction de transfert et de la transformée en Z (TZ) inverse.
Calculer la transformée en Z de la réponse impulsionnelle trouvée précédemment et vérifier qu'elle est égale à la fonction de transfert $H(z)$.
<6 pts>
5. Donner la solution générale de la réponse indicielle de ce système (solution générale $y(n) \forall n$) à l'aide de sa fonction de transfert et de la TZ inverse. Donner aussi la limite de cette réponse indicielle quand $n \rightarrow \infty$.
<8 pts>
6. Donner la réponse indicielle de ce filtre à partir de l'équation aux différences (3 premiers échantillons, *i.e.*, $y(n = 0), y(n = 1), y(n = 2), y(n = 3)$) et donner aussi la limite de cette réponse indicielle quand $n \rightarrow \infty$ et vérifier que l'on obtient la même réponse que celle obtenue à la question précédente et exprimer finalement cette réponse indicielle, à l'itération n , sous la forme d'une somme de n termes. On pourra utiliser avec profit la relation suivante que l'on rappelle :
<8 pts>
$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + b a^{n-2} + b^2 a^{n-3} + \dots + b^{n-2} a + b^{n-1}) \quad (2)$$
7. Donner la solution générale de la réponse à une rampe de ce système (solution générale $y(n) \forall n$) à l'aide de sa fonction de transfert et de la TZ inverse.
<8 pts>
8. Dans cette question, on veut retrouver la réponse fréquentielle de notre filtre numérique d'une façon différente de celle déjà vue en cours et consistant à faire un changement variable entre z et ν . Cette méthode consiste à (et on vous demande de le faire) :
 - (a) Donner la réponse de ce filtre à partir de l'équation aux différences (3 premiers échantillons, *i.e.*, $y(n = 0), y(n = 1), y(n = 2), y(n = 3)$) lorsque $x(n)$ est un signal de fréquence pure, *i.e.*, lorsque $x(n) = \exp(2\pi j n \nu)$ (*i.e.*, $x(0) = 1, x(1) = \exp(2\pi j \nu), x(2) = \exp(4\pi j \nu)$, etc.).
 - (b) En déduire la solution générale $y(n), \forall n$.
 - (c) Donner la limite de $y(n)$ quand $n \rightarrow \infty$ qui correspond, en fait, au régime permanent de notre système (par opposition à son régime transitoire) en utilisant la stabilité du filtre et éventuellement l'Équation (2).
 - (d) En déduire finalement la transmittance $H(\nu) = \frac{y(n)}{x(n)}$ lorsque $x(n) = \exp(2\pi j n \nu)$ par cette méthode.

<10 pts>

9. Trouver la réponse fréquentielle $H(\nu)$, de ce filtre comme on l'a vue en cours, *i.e.*, par changement de variable et à partir de $H(z)$, et trouver puis tracer le module de $|H(\nu)|$ si $b = 0.5$ et si $b = -0.5$ avec le gain statique et le gain à la fréquence de Shannon. En déduire le type de filtre qu'il s'agit si $b > 0$ et si $b < 0$.

<10 pts>

10. On désirerait définir un système de restauration $H_i(z)$ qui aurait pour but d'inverser les effets du filtre exprimé par l'Équation (1) et qui permettrait, à partir du signal numérique $y(n)$ (entrée de ce filtre de restauration) de trouver le signal $w(n) = x(n)$. Donner l'équation aux différences, associé à ce filtre $H_i(z)$ et reliant le signal restauré $w(n)$ et le signal dégradé $y(n)$ et les caractéristiques de ce filtre (famille, stabilité, ordre).

<10 pts>

Réponse

1

$$y(n) = x(n) + by(n-1)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

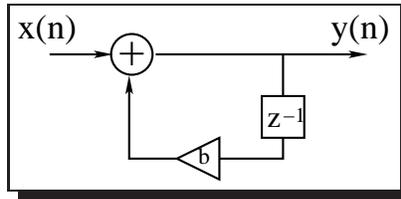
$$Y(z) = X(z) + bz^{-1}Y(z) \Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{z}{z - b}$$

Dans le cas général où $b \neq 0$, on trouve un filtre RII (réponse impulsionnelle infinie) associée à une équation récursive ou les pôles sont non centrés en zéros, d'ordre 1 avec un pôle en b et un zéro en 0 et une condition de stabilité exigeant que nécessairement $|b| < 1$.

<6 pts>

2

Structure du filtre :



<3 pts>

3

En utilisant l'équation aux différences $y(n) = x(n) + by(n-1)$, et pour $x(n) = \delta(n)$, on obtient :

$$y(0) = x(0) + by(-1) = 1$$

$$y(1) = x(1) + by(0) = b$$

$$y(2) = x(2) + by(1) = b^2$$

$$y(3) = x(3) + by(2) = b^3$$

Supposons que $y(n-1) = b^{n-1}$. En utilisant l'équation aux différences, on obtient : $y(n) = x(n) + by(n-1) = b \times b^{n-1} = b^n$ et donc $y(n) = b^n, (\forall n)$.

On exprime la condition de stabilité du filtre en exigeant que sa réponse impulsionnelle tende vers 0 lorsque $b \rightarrow \infty$, ce qui est bien le cas ici pour $|b| < 1$ (cf. Q.1(a)).

<6 pts>

4

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, et pour $x(n) = \delta(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} X(z) = 1$, on obtient :

$$\text{Pour : } X(z) = 1 \quad Y(z) = \frac{z}{(z - b)} \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\Leftrightarrow} y(n) = b^n \mathcal{U}(n) \quad (\text{cf. table})$$

En calculant la transformée en Z de $y(n)$, on trouve :

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b^n \mathcal{U}(n)) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (b z^{-1})^n = \frac{1 - (b z^{-1})^{\infty}}{1 - b z^{-1}} = \frac{1}{1 - b z^{-1}} \quad \text{si } |b/z| < 1 \text{ ou } |z| > b$$

<6 pts>

5

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, et pour $x(n) = \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = z/(z-1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Pour : } X(z) &= \frac{z}{z-1} & Y(z) &= \frac{z}{(z-b)} \cdot \frac{z}{(z-1)} = \frac{z^2}{(z-b)(z-1)} = 1 + \frac{z(1+b)-b}{(z-b)(z-1)} \\ & & &= 1 - \frac{b^2/(1-b)}{(z-b)} + \frac{1/(1-b)}{(z-1)} \\ & & &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \delta(n) + \frac{1}{(1-b)} \{1 - b^2 \cdot b^{n-1}\} \cdot \mathcal{U}(n-1) \\ y(n) &= \delta(n) + \frac{1}{(1-b)} \{1 - b^{n+1}\} \cdot \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

On trouve, si $|b| < 1$ (filtre stable), $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{1}{(1-b)}$

<8 pts>

NOTA : On aurait pu résoudre cette question de cette manière :

$$\begin{aligned} \text{Pour : } X(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} & Y(z) &= \frac{1}{(1-bz^{-1})} \cdot \frac{1}{(1-z^{-1})} = \frac{1/1-b^{-1}}{(1-bz^{-1})} + \frac{1/(1-b)}{(1-z^{-1})} \\ & & &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \left(\frac{1}{1-b^{-1}}\right) b^n \cdot \mathcal{U}(n) + \left(\frac{1}{1-b}\right) \cdot \mathcal{U}(n) \end{aligned}$$

Et on peut vérifier que cela donne les mêmes échantillons que la relation trouvée 7 lignes au dessus.

6

En utilisant l'équation aux différences $y(n) = x(n) + b y(n-1)$, et pour $x(n) = \mathcal{U}(n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) + b y(-1) = 1 \\ y(1) &= x(1) + b y(0) = 1 + b \\ y(2) &= x(2) + b y(1) = 1 + b(1+b) = 1 + b + b^2 \\ y(3) &= x(3) + b y(2) = 1 + b(1+b+b^2) = 1 + b + b^2 + b^3 \end{aligned}$$

Une solution générale du type $y(n) = 1 + b + \dots + b^n$ semble se dégager.

Si on utilise la relation de la question, on trouve ; $y(0) = 1$, $y(1) = (1-b^2)/(1-b) = (1-b)(1+b)/(1-b) = 1 + b$, $y(2) = (1-b^3)/(1-b) = 1 + b + b^2$ en utilisant la relation donnée par l'énoncé ou en effectuant simplement, pour $y(3)$, la division de $(1-b^3)$ par $(1-b)$.

On trouve donc la solution simplifiée pour la réponse indicielle de notre filtre $y(n)$ que l'on peut exprimer à partir d'une somme de n termes comme cela a été demandé dans l'énoncé : $y(n) = \sum_{k=0}^{k=n} b^k$.

On trouve, si $|b| < 1$ (filtre stable), $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{1-b^n}{(1-b)} = \frac{1}{(1-b)}$

<8 pts>

7

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, et pour $x(n) = n \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = z/(z-1)^2$, on obtient :

$$\text{Pour : } X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad Y(z) = \frac{z^2}{(z-b)(z-1)^2} = \frac{b^2/(b-1)^2}{(z-b)} - \frac{1/(b-1)}{(z-1)^2} + \frac{(1-2b)/(b-1)^2}{(z-1)}$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = \frac{1}{(b-1)} \left\{ \frac{b^{n+1}}{b-1} - (n-1) + \frac{(1-2b)}{(b-1)} \right\} \cdot \mathcal{U}(n-1)$$

<8 pts>

NOTA : Plutôt qu'utiliser l'astuce vue en classe pour calculer les coefficients de la décomposition en fraction simple, on aurait pu raisonner de la façon suivante :

$$\frac{z^2}{(z-b)(z-1)^2} = \frac{A}{(z-b)} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)}$$

$$z^2 = A(z-1)^2 + B(z-b) + C(z-b)(z-1)$$

pour $z = b$:	$A(b-1)^2 = b^2$	$A = b^2/(b-1)^2$
pour $z = 1$:	$B(1-b) = 1$	$B = 1/(1-b)$
pour $z = 0$:	$b^2/(b-1)^2 + bC + b/(b-1) = 0$	$C = (1-2b)/(b+1)^2$

8

En utilisant l'équation aux différences $y(n) = x(n) + by(n-1)$, et pour $x(n) = \exp(2\pi jn\nu)$, on obtient :

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) + by(-1) = 1 \\ y(1) &= x(1) + by(0) = \exp(2\pi j\nu) + b \\ y(2) &= x(2) + by(1) = \exp(4\pi j\nu) + b \exp(2\pi j\nu) + b^2 \\ y(3) &= x(3) + by(2) = \exp(6\pi j\nu) + b \exp(4\pi j\nu) + b^2 \exp(2\pi j\nu) + b^3 \end{aligned}$$

Une solution générale semble se dégager et elle est du type :

$$\begin{aligned} y(n) &= \exp(2\pi n j\nu) + b \exp(2\pi (n-1) j\nu) + \dots + b^{n-1} \exp(2\pi j\nu) + b^n \\ &= \sum_{i=0}^n b^{n-i} \exp(2i\pi j\nu) = \sum_{i=0}^n b^n \left(b^{-1} \exp(2\pi j\nu) \right)^i = b^n \sum_{i=0}^n \left(b^{-1} \exp(2\pi j\nu) \right)^i \end{aligned}$$

d'une somme d'une suite géométrique de $(n+1)$ termes et de raison $q = b^{-1} \exp(2\pi j\nu)$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{b^{n+1}}{b} \left\{ \frac{1 - b^{-(n+1)} \exp(2\pi j(n+1)\nu)}{1 - b^{-1} \exp(2\pi j\nu)} \right\} \\ &= \frac{\exp(2\pi j(n+1)\nu) - b^{n+1}}{\exp(2\pi j\nu) - b} \\ &= \frac{\exp(2\pi jn\nu) - b^{n+1} \exp(-2\pi j\nu)}{1 - b \exp(-2\pi j\nu)} \end{aligned}$$

En régime permanent $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{\exp(2\pi jn\nu)}{1 - b \exp(-2\pi j\nu)}$ car $|b| < 1$ (filtre stable) et donc :

$$H(\nu) = \frac{y(n)}{x(n) = \exp(2\pi jn\nu)} = \frac{1}{1 - b \exp(-2\pi j\nu)}$$

<10 pts>

9

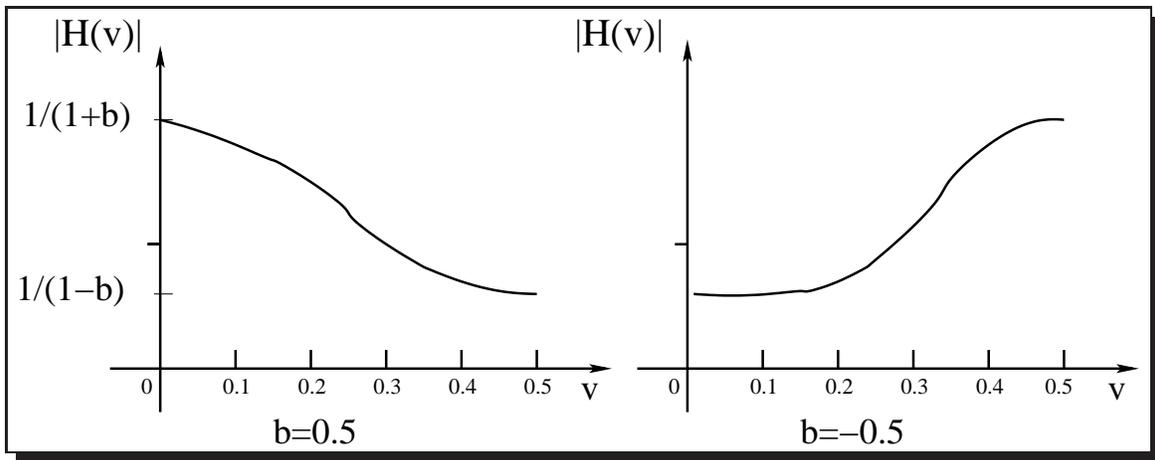
En partant de $H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}}$ et en faisant le changement de variable $z = \exp(2\pi j\nu)$, on trouve immédiatement la réponse fréquentielle de ce filtre, *i.e.*,

$$H(\nu) = \frac{1}{1-b \exp(-2\pi j\nu)} = \frac{1}{1-b \cos(2\pi\nu) + jb \sin(2\pi\nu)}$$

Et son module est :

$$\begin{aligned} |H(\nu)| &= \frac{1}{\sqrt{(1-b \cos(2\pi\nu))^2 + b^2 \sin^2(2\pi\nu)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2b \cos(2\pi\nu) + b^2 \cos^2(2\pi\nu) + b^2 \sin^2(2\pi\nu)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2-2b \cos(2\pi\nu)}} \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas si $b > 0$ et d'un filtre passe-haut si $b < 0$.



<10 pts>

NOTA : On pourrait aussi écrire : $H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b} = 1 + \frac{b}{z-b} = 1 + \frac{b}{\exp(2\pi j\nu)-b}$ et donc : $|H(\nu)| = 1 + \left| \frac{b}{\sqrt{(1+2b)+2b \cos(2\pi\nu)}} \right|$, ce qui donnerait les mêmes résultats et est aussi valable mais notons que la forme de $|H(\nu)|$ est un moins sympathique pour trouver le comportement de $|H(\nu)|$ quand ν varie.

10

On désire faire le filtre inverse de $H_i(z)$ *i.e.*, : $H_i(z) = \frac{W(z)}{Y(z)} = 1 - bz^{-1} = \frac{z-b}{z}$

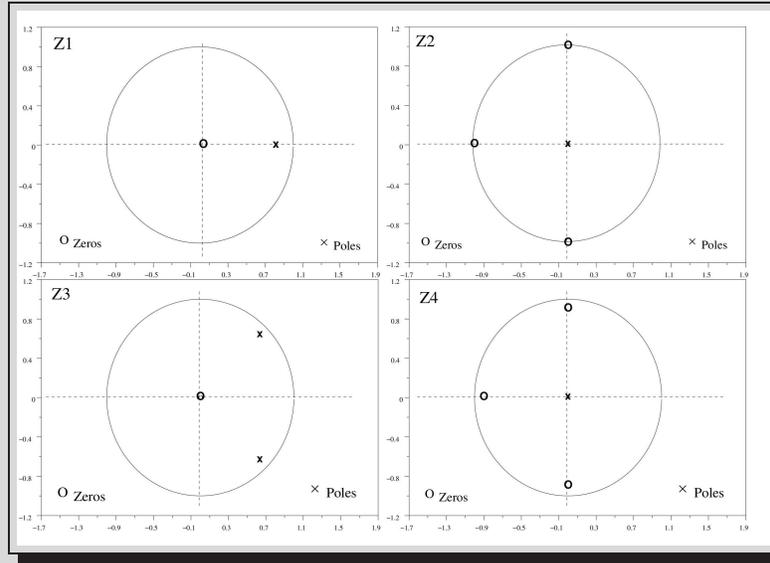
qui permettrait d'obtenir $H(z) \cdot H_i(z) = 1$. Dans ce cas de figure, $H_i(z)$ est un filtre RIF, d'ordre 1, forcément stable et l'équation aux différences se trouve immédiatement :

$$H_i(z) = \frac{z-b}{z} = \frac{W(z)}{Y(z)} \stackrel{z^{-1}}{\iff} w(n) = y(n) - by(n-1)$$

<10 pts>

NOTA : On peut vérifier que si on a un signal $x(n) = \delta(n)$, donc un signal $y(n) = b^n$ (cf. Question 3), alors pour $\{y(n)\} = \{1, b, b^2, b^3, \dots\}$, l'application de l'équation aux différences $w(n) = y(n) - by(n-1)$, permet de retrouver en sortie le dirac, *i.e.*, $w(n) = \delta(n)$. En effet, $w(0) = 1$, $w(1) = y(1) - by(0) = b - b = 0$, $w(2) = y(2) - by(1) = b^2 - by(1) = b^2 - b^2 = 0$, etc.

II. Filtrage Numérique (24 pts)



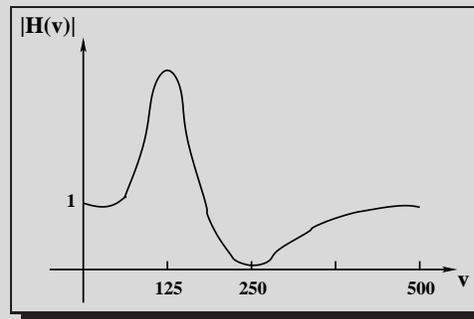
1. Associer à chaque diagramme pôles-zéros (Z_i) de la figure ci-dessus, l'équation aux différences correspondantes (reliant $x(n)$ à $y(n)$).

On prendra une distance de 0.9 par rapport au centre lorsque le pôle ou/et le zéro n'est pas complètement sur le cercle de rayon unité et un angle de 45 degré pour les pôles du diagramme $Z3$ et autant de pôles que de zéros pour chaque système (donc pour $Z2$, il y a un pôle triple au centre du cercle, pour $Z3$, un zéro double au centre du cercle, etc.)

<12 pts>

2. On aimerait synthétiser un filtre stable réel dont le gabarit fréquentiel est approximé ci-dessous (pour un signal échantillonné à la fréquence de 1000 Hertz). Donner le diagramme pôle-zéro (justifier le diagramme que vous proposer) et l'équation aux différences de ce filtre en utilisant seulement un total d'au plus 8 pôles ou zéros et en faisant en sorte que cette équation aux différences reste réelle.

<12 pts>



1

Pour Z_1 :
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{(z - 0.9)} \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$$

Pour Z_2 :
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(z - j)(z + j)(z + 1)}{z^3} = \frac{(z^2 + 1)(z + 1)}{z^3} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$$\stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$

Et en rappelant que $(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta}) = (z^2 - 2z\rho \cos\theta + \rho^2)$, on a donc pour $\theta = 45^\circ \approx 0.7854$ radian :

$$\text{Pour } Z_3 : \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta})} = \frac{z^2}{(z^2 - 2\rho z \cos\theta + \rho^2)} = \frac{z^2}{(z^2 - 1.27z + 0.81)}$$

$$\stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} y(n) = 1.27y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n)$$

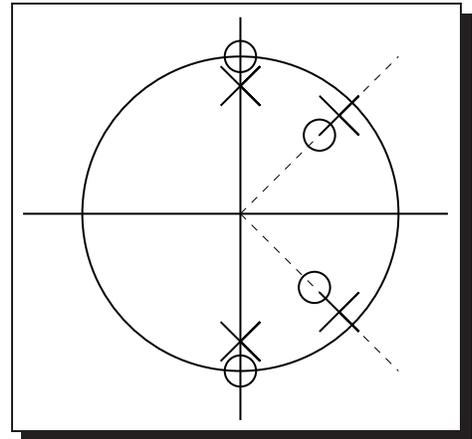
$$\text{Pour } Z_4 : \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(z - 0.9j)(z + 0.9j)(z + 0.9)}{z^3} = \frac{z^3 + 0.9z^2 + 0.81z + 0.729}{z^3}$$

$$\stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} y(n) = x(n) + 0.9x(n-1) + 0.81x(n-2) + 0.729x(n-3)$$

<12 pts>

2

L'énoncé nous autorise seulement à un total d'au plus 8 pôles ou zéros. Premièrement, on voit que le gain en fréquence $|H(\nu)|$ commence à un et finit avec un gain unité. Pour réaliser cela, on mettra pour chaque pôle, un zéro qui sera au même angle sur le cercle de rayon unité. De plus, on doit rejeter complètement la fréquence 250 hertz, c'est-à-dire la fréquence numérique 0.25 (correspondant à l'angle 90 degré sur ce cercle). On fera cette contrainte en plaçant un zéro en $z = j$ ou $\nu = 0.25$ sur ce cercle. Puisque ce zéro n'est pas réel, on utilisera un deuxième zéro qui sera conjugué au premier pour avoir une équation aux différences qui reste réelle. On doit amplifier maintenant la fréquence 125 Hertz (fréquence numérique 0.125 et correspondant à l'angle 45 degré sur ce cercle), on le fera en plaçant un pôle sur l'angle 45 degré sur ce cercle mais pas complètement sur ce cercle car l'amplification n'est pas infinie. Bref, satisfaire toutes ces contraintes donneront le diagramme pôle-zéro suivant :



En rappelant que $(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta}) = (z^2 - 2z\rho \cos\theta + \rho^2)$, on a donc pour $\theta = 45^\circ \approx 0.7854$ radian, et $\rho = 0.9$, $(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta}) = (z^2 - 1.272z + 0.81)$.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(z - j)(z + j)(z - 0.9e^{j\theta})(z - 0.9e^{-j\theta})}{(z - 0.9j)(z + 0.9j)(z - 0.95e^{j\theta})(z - 0.95e^{-j\theta})} \approx \frac{(z^2 + 1)(z^2 - 1.272z + 0.8)}{(z^2 + 0.8)(z^2 - 1.34z + 0.9)}$$

$$\approx \frac{z^4 - 1.27z^3 + 1.8z^2 - 1.27z + 0.8}{z^4 - 1.34z^3 + 1.7z^2 - 1.1z + 0.7}$$

$$\stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} y(n) = 1.34y(n-1) - 1.7y(n-2) + 1.1y(n-3) - 0.7y(n-4)$$

$$+ x(n) + 1.27x(n-1) - 1.8x(n-2) + 1.27x(n-3) - 0.8x(n-4)$$

<12 pts>

NOTA : Le filtre qu'on nous demande de faire est utile par exemple pour des systèmes de détection de la présence d'une fréquence dans un signal bruité pour lequel une fréquence parasite très proche de la fréquence que l'on veut détecter ou non la présence existe.

III. Analyse Spectrale (23 pts)

Les questions de cet exercice seront reliées au Travail Pratique (TP) ANALYSE SPECTRALE, qui, on le rappelle ici, correspondait à la lecture de 8192 échantillons d'un signal réel de bruit de moteur (moteur1.dat), à la fréquence d'échantillonnage 11025 échantillons par seconde (*sampling rate*) (cf. Question 2 et Question 3.1 3.2 3.3 du TP "ANALYSE SPECTRALE").

1. Si on considère que le pic principal, associé à la vitesse de rotation de ce moteur, correspond à la 145 i-ème valeur discrète de son spectre échantillonné (la valeur du spectre associé à la fréquence 0 étant la première de ces valeurs discrètes). Redonner le raisonnement permettant de retrouver le nombre de tours par minute de ce moteur mais en précisant cette fois l'incertitude (ou l'imprécision ou l'erreur) que l'on fait sur cette estimation (par exemple en exprimant cette estimation de la façon suivante "nombre de tours par minute = $x \pm \text{incertitude}$) et ensuite en précisant son incertitude sous la forme d'une erreur relative.
<5 pts>
2. Le signal de ce bruit de moteur est échantillonné à la fréquence $f_e = 11025$ échantillons par seconde ("*sampling rate*"). Si on garde la même durée ou longueur temporelle du signal, est-ce que ce signal aurait-il pu être échantillonné à une fréquence d'échantillonnage deux fois moins grande? Justifier votre réponse le plus précisément possible. Comment auriez-vous fait pour simuler ce sous-échantillonnage par un facteur 2? De plus, indiquez si dans le cas de sous-échantillonnage d'un facteur 2, quelles auraient été les différences ou non en terme de numéro du pic associé à la vitesse de rotation de ce moteur, incertitude sur l'estimation de la vitesse de rotation de ce moteur, amplitude du pic principal par rapport aux autres pics, bruit du spectre?
<5 pts>
3. Si on garde la même durée ou longueur temporelle du signal, est-ce que ce signal aurait-il pu être échantillonné à une fréquence d'échantillonnage quatre fois moins grande? Si oui justifier votre réponse sinon, indiquer quel type de problème on aurait eu sur cette estimation spectrale.
<5 pts>
4. Dans la question 3.2 du TP où on demande de réaliser un périodogramme moyenné, on demande de diviser le signal de longueur 8192 en blocs de 512 échantillons se chevauchant de 50% dont on moyenne ensuite leur spectre.
 - (a) De combien a-t-on diminué la variance du bruit de notre spectre par cette technique?
 - (b) Préciser maintenant quel serait le numéro du pic associé à la vitesse de rotation de ce moteur, dans ce périodogramme moyenné, si on considère la portion des fréquences positives et le fait que le pic numéro 0 correspond à la fréquence 0 de ce signal.
 - (c) Indiquer aussi (en le justifiant) quelle serait l'incertitude sur l'estimation de la vitesse de rotation de ce moteur.
 - (d) Indiquer aussi (en le justifiant) si l'amplitude du pic principal par rapport aux autres pics a changé et pourquoi?
<8 pts>

Réponse

1

Puisqu'il y a 8192 échantillons temporels du signal, il y a 8192 échantillons du signal discrétisé du spectre. Le pic 145 correspond donc à la fréquence numérique $145/8192 \approx 0.0177$ et à la fréquence physique $\approx (145/8192) \times 11025 \approx 195.144$ Hertz ou tours par seconde mais avec une incertitude de $\pm(\Delta\nu)/2$ ou l'incertitude fréquentielle est liée à la longueur du signal par la relation $\Delta\nu = 1/T$ avec $T = 8192/11025 \approx 0.743$ secondes, c'est-à-dire $\approx 1.3458/2 \approx 0.6729$ Hertz ou tours par seconde.

En sachant qu'il y a deux explosions par tour du moteur, la vitesse de rotation 195.144 ± 0.6729 tours par

seconde devient une vitesse de rotation de 5854 ± 20 tours par minute que l'on peut exprimer sous la forme aussi d'une erreur relative (en tours par minute) de $(40/5854) \times 100 = 0.34\%$ d'erreur.

<5 pts>

2

Avec la fréquence d'échantillonnage de $f_e = 11025$ Hz échantillons par seconde, le spectre des fréquences positives du signal s'étend dans l'intervalle $[0, \dots, 0.5]$ en fréquences numériques ou $[0, \dots, 5512]$ en fréquences physiques exprimées en Hertz entre le pic numéro 0 et le pic numéro $8192/2 = 4096$. Si on échantillonnait à une fréquence deux fois moins grande, le spectre s'étendrait entre $[0, \dots, 2756]$ en fréquences physiques exprimées en Hertz entre le pic numéro 0 et le pic numéro $8192/4 = 2048$. On peut voir sur le spectre du signal que les composantes fréquentielles comprises après les fréquences 2756 Hertz (après le 2048 i-ème pic de fréquence positive) sont inférieurs à 1% de la valeur maximale du spectre. Il s'agit donc de bruit et on peut donc réaliser ce sous-échantillonnage par un facteur 2 sans crainte de repliement spectral.

Dans le cas d'un sous-échantillonnage par un facteur 2, le pic associé à la vitesse de rotation de ce moteur aurait été inchangé (car le calcul précédent aurait été; fréquence physique = $(145/4096) \times 5512$ puis le reste aurait été pareil car la durée du signal reste la même), l'incertitude sur l'estimation de la vitesse de rotation de ce moteur aurait été la même (car la durée du signal reste la même), l'amplitude du pic principal aurait été le même, même chose pour le bruit du spectre.

On aurait pu simuler ce sous-échantillonnage par un facteur 2 en prenant tout simplement un échantillon sur deux du signal du moteur.

<5 pts>

3

Dans le cas d'un sous-échantillonnage par un facteur 4, le spectre des fréquences positives du signal s'étend dans l'intervalle $[0, \dots, 1378]$ en fréquences physiques exprimées en Hertz entre le pic numéro 0 et le pic numéro $8192/8 = 1024$. On peut voir sur le spectre du signal que les composantes fréquentielles comprises après les fréquences 1378 Hertz (après le 1024 i-ème pic de fréquence positive) sont supérieures à 1% de la valeur maximale du spectre. Il s'agit donc d'information et on ne peut donc pas réaliser ce sous-échantillonnage par un facteur 4 sans crainte de repliement spectral.

<5 pts>

4.(a)-(b)-(c)-(d)

Un signal de 8192 échantillons en blocs de 512 échantillons se chevauchant de 50% nous donne 31 blocs donc la variance du bruit est diminué par 31 par cette technique.

<2 pts>

On a pris des blocs de longueur 512 pour une fréquence d'échantillonnage de 11025, soit une longueur du signal (par bloc) de $T = 0.0464$ seconde et une résolution fréquentielle de $\Delta\nu = 1/T = 1/0.0464 \approx 21.53$. Le plus grand pic correspondant à la fréquence de rotation du moteur ($f_m = 195$ Hertz) correspond dans ce cas au 9 i-ème pic.

<2 pts>

Avec une incertitude pour le 9 i-ème pic de $\pm(\Delta\nu)/2 \approx 10.8$, c'est-à-dire de ± 324 tours par minute.

<2 pts>

Oui pas seulement parce que le bruit du spectre à changer mais surtout par le fait que la résolution du spectre a changé. En effet, en faisant cette technique, les bins (ou largeurs de pixels dans le domaine spectral) se sont agrandi de $8192/512 = 16$, donc l'amplitude du 9 i-ème pic résulte grossièrement maintenant de la moyenne des 16 fréquences du spectre de départ de part et d'autre de cette fréquence maximale (à une pondération près due à la technique de fenêtrage).

<2 pts>