



DIRO  
IFT 3205

## EXAMEN INTRA

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

*e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

**Date :** 15/02/2016

|             |                                         |
|-------------|-----------------------------------------|
| I .....     | Série & Transformée de Fourier (39 pts) |
| II .....    | TFD et Calcul de Spectre (41 pts)       |
| III .....   | Filtrage Spatial (19 pts)               |
| IV .....    | Filtrage Fréquentiel (29 pts)           |
| Total ..... | 128 points                              |

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

---

**I. Série & Transformée de Fourier (39 pts)****1. CONVOLUTION**

- (a) On note dans cette question,  $\mathbf{1}(x)$  ou tout simplement  $\mathbf{1}$ , la fonction qui vaut  $\mathbf{1}$  pour tout  $x$ . De plus,  $*$  désigne l'opérateur de convolution. Soit  $f$  une fonction quelconque, calculer  $(\mathbf{1} * f)(x)$  de deux façons différentes. La première en restant dans le domaine spatial et la deuxième en exprimant ce calcul dans le domaine fréquentiel.

&lt;8 pts&gt;

- (b) En considérant les notes de cours, chapitre Transformée de Fourier, (slide 3, convolution 1D de fonctions continues), retrouver le résultat de  $(f * g)(x)$  en utilisant pas l'intégration mais seulement les propriétés (de décalage et de produit) du Dirac et le fait que la convolution d'une fonction porte ( $\Pi(x)$ ) avec une fonction porte a pour résultat la fonction Triangle ( $\Delta(x)$ ).

&lt;6 pts&gt;

**2. SÉRIE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER**

- (a) En utilisant **toutes** les propriétés de la Transformée de Fourier (TF) vues en cours, comment aurait on pu prévoir que la TF de  $\delta(x)$  est (forcément quelquechose qui ressemble à) une constante dans le domaine fréquentiel ?

&lt;5 pts&gt;

- (b) En utilisant le moins de calcul possible et possiblement en se servant des TF de fonctions que l'on a déjà calculé, trouver quel serait la TF de la fonction  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$  qui se périodiserait dans l'espace des  $x$  tous les  $T = 10$ .

&lt;5 pts&gt;

- (c) Pour ne pas avoir d'aliasing, à quelle période d'échantillonnage maximale devrait on pouvoir échantillonner  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$  sans problème ?

&lt;5 pts&gt;

- (d) Soit la fonction  $f(x)$  donnée par :

$$f(x) = \exp(-x^2) \cos(4x) \quad (1)$$

Tracer succinctement la fonction  $f(x)$ . En déduire quel type de filtre  $f(x)$  en tant que PSF correspond, énumérer les propriétés de  $F(\nu)$ , TF de  $f(x)$ , à partir des propriétés de  $f(x)$ , calculer cette TF et représenter  $F(\nu)$  graphiquement.

&lt;10 pts&gt;

---

**Réponse****1.(a)**

- En restant dans le domaine spatial, par calcul, on obtient directement :

$$(\mathbf{1} * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}(y) \cdot f(x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) dy = \int_{+\infty}^{-\infty} f(z) (-dz) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Mais le calcul est presque immédiat, en utilisant d'abord, la commutativité du produit de convolution et en écrivant :

$$(\mathbf{1} * f)(x) = (f * \mathbf{1})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \mathbf{1}(x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

&lt;4 pts&gt;

Nota : Mais, si on n'aime pas les calculs, on peut aussi raisonner qualitativement en se souvenant de ce que fait physiquement la convolution entre deux fonctions :

Pour réaliser  $f(x)$  convolué par la fonction  $\mathbf{1}(x)$ , on doit d'abord retourner  $\mathbf{1}(x)$  en considérant  $\mathbf{1}(-x)$  qui redevient  $\mathbf{1}(x)$  (car la fonction est paire), puis pour différents décalages  $y$  de cette fonction retournée, i.e.,  $\mathbf{1}(x+y)$ , i.e., pour cette même fonction  $\mathbf{1}(x)$ , qui vaut 1 pour tout  $x$  (cf. énoncé), on multiplie cette fonction décalée (qui vaut 1 pour tout  $x$ ) par  $f(x)$  et on intègre le tout pour trouver finalement la valeur de  $(f * \mathbf{1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  pour le décalage considéré  $y$ , mais aussi pour n'importe quel autre décalage. On obtient donc, quelle que soit la valeur de décalage ou quelle que soit la position d'abscisse de la fonction  $(f * \mathbf{1})$ , la fonction constante de valeur  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

• En *téléportant* la relation  $(\mathbf{1} * f)(x)$  dans le domaine fréquentiel, l'expression devient, avec la correspondance  $x \rightleftharpoons \nu$  et  $f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}(x) * f(x) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \delta(\nu) \cdot F(\nu) = F(\nu=0) \cdot \delta(\nu) = F(0) \cdot \delta(\nu) \quad (\text{car : } \delta(x-x_0) \cdot f(x) = f(x_0) \cdot \delta(x-x_0)) \\ &\text{avec par définition : } F(\nu=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \exp(2\pi j(\nu=0)x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(0) \\ &\text{et donc } F(\nu=0) \cdot \delta(\nu) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{=} F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = (\mathbf{1}(x) * f(x)) \end{aligned}$$

<4 pts>

**1.(b)**

Cela revient à exprimer le calcul de  $\Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2})$  :

$$\begin{aligned} \Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}\Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\Pi(x) * \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \delta(x - \frac{1}{2}) \quad (\text{commutativité de } *) \\ &= \frac{1}{2}\Delta(x) * \delta(x - 1) \\ &= \frac{1}{2}\Delta(x - 1) \end{aligned}$$

Une autre possibilité est de passer dans le domaine Fourier pour calculer cette expression :

$$\begin{aligned} \Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2}) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \\ \frac{1}{2}\exp(-j\pi\nu) \left( \frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) \exp(-j\pi\nu) \left( \frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) &= \frac{1}{2}\text{sinc}^2(\nu) \exp(-2j\pi\nu) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{=} \frac{1}{2}\Delta(x - 1) \end{aligned}$$

<6 pts>

Nota : On peut vérifier que la relation démontrée à la question 1.(b) est vraie dans cet exemple. En effet, l'intégrale du résultat de  $\frac{1}{2}\Delta(x-1)$  est égal à 1/2 ce qui est bien le produit entre l'aire intégrale sous  $\Pi(x - \frac{1}{2})$  qui est égal à 1 multiplié par l'aire intégrale sous  $\frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2})$  qui est égal à 1/2.

**2.(a)**

$\delta(x)$  est réel donc on aura dans l'espace fréquentiel, la symétrie hermitienne (la partie réelle de sa TF sera paire et sa partie imaginaire sera impaire). De plus  $\delta(x)$  est paire donc sa TF sera réelle (et paire si on ajoute la première contrainte).  $\delta(x)$  est non périodique donc son spectre sera continu (en plus d'être pair et réel).  $\delta(x)$  est très discontinu. En fait, cette *fonction* est la plus discontinue qui puisse exister ! donc son spectre sera à support extrêmement grand, voir le plus grand possible. En résumé on s'attend à voir un spectre continu, réel, pair et avec un support fréquentiel le plus grand possible ... comme la constante 1. Pour se convaincre encore plus que le support fréquentiel du spectre du Dirac est infiniment grand, on peut raisonner avec la propriété de contraction-dilatation de la TF en disant qu'un Dirac est une fonction extrêmement contracté donc son spectre sera infiniment dilaté comme la constante. Ou bien le dirac est la

limite d'une gaussienne infiniment étroite (avec un écart type tendant vers 0) qui elle donne, comme spectre, une gaussienne infiniment large dans le domaine spectral et qui tend vers une constante.

Bref, si on veut faire court, on peut dire que comme  $\delta(x)$  est réel et pair et infiniment contracté, son spectre est réel et pair et infiniment dilaté ... comme la constante !

<5 pts>

**2.(b)**

On sait que  $\exp(-\pi x^2) \Rightarrow \exp(-\pi \nu^2)$  et que l'opérateur qui périodise tous les  $T$  dans le domaine des  $x$  devient l'opérateur qui discrétise tous les  $1/T$  dans le domaine des  $u$ . Donc, on aura comme TF de  $\exp(-\pi x^2)$  qui se périodise tous les  $T$ , une suite d'échantillons discrétisés, tous les  $1/10$  de  $\exp(-\pi \nu^2)$ .

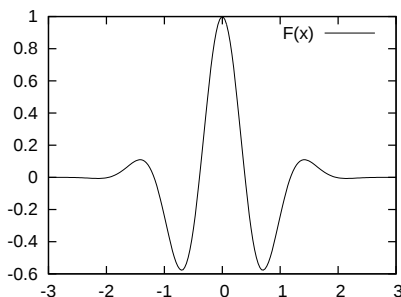
<5 pts>

**2.(c)**

On sait que  $\exp(-\pi x^2) \Rightarrow \exp(-\pi \nu^2)$  et  $\exp(-\pi(\nu = 0)^2) = 1$  et que pour  $\nu > 1.22$ ,  $\exp(-\pi \nu^2) < 0.01$ . donc la fréquence de Shannon est  $f_e = 2 \times 1.22$  ce qui donne, au maximum,  $T_e \approx 0.41$ .

<5 pts>

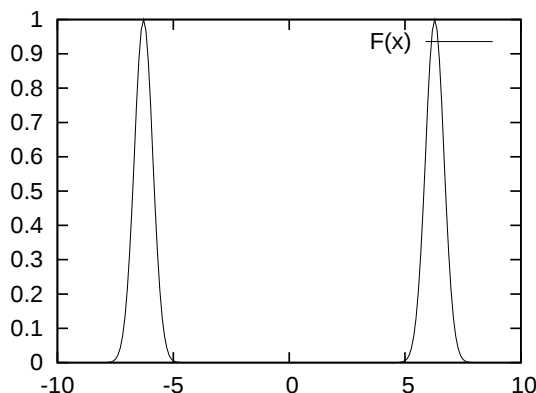
**3**



Graphiquement,  $f(x)$  ressemble beaucoup à une PSF associée à un filtre de type passe-bande.  $f(x)$  étant paire et réelle et non périodique,  $F(\nu)$  sera réelle, paire et continue. On sait que  $\exp(-\pi x^2) \Rightarrow \exp(-\pi \nu^2)$  et donc que  $\exp(-x^2) \Rightarrow \sqrt{\pi} \exp(-\pi \nu^2)$ . On sait aussi que  $\cos(2\pi \nu_0 x) \Rightarrow \frac{1}{2}(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))$  et donc que  $\cos(4x) \Rightarrow \frac{1}{2}(\delta(\nu - 4/2\pi) + \delta(\nu + 4/2\pi))$ . Du coup :

$$\begin{aligned} \exp(-x^2) \cos(4x) &\Rightarrow \sqrt{\pi} \exp(-\pi \nu^2) * \frac{1}{2}(\delta(\nu - 4/2\pi) + \delta(\nu + 4/2\pi)) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp[-\pi(\nu - 4/2\pi)^2] + \exp[-\pi(\nu + 4/2\pi)^2] \end{aligned}$$

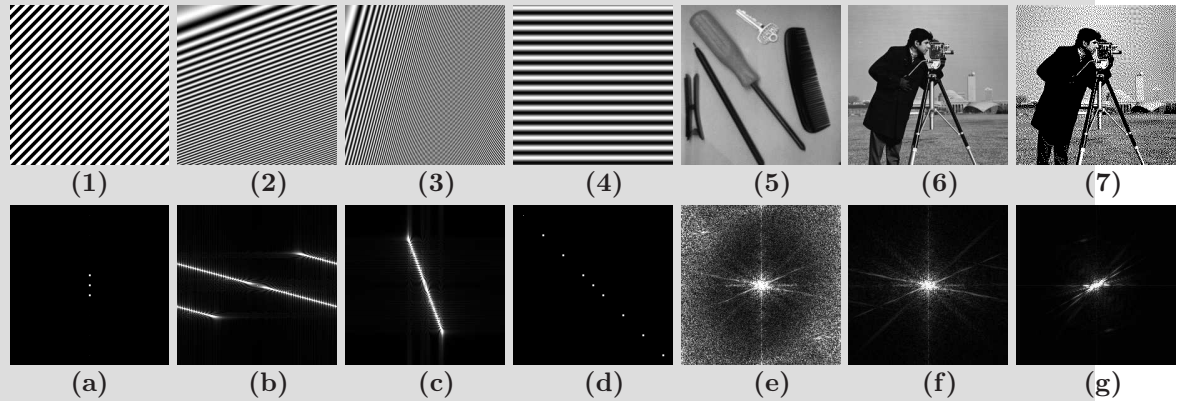
qui est bien un filtre passe bande :



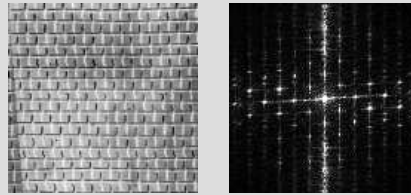
<10 pts>

## II. TFD et Spectre (41 pts)

1. Les images (1) à (7) de la Figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier (re-centré au centre de l'image) des différentes images (a) à (g). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.
- <21 pts>



2. Voici une image de taille  $128 \times 128$  que vous avez déjà utilisé en TP et son spectre (module de la TF recentré au centre de l'image).



- (a) Donner la définition d'une image texturée ou d'une texture que j'ai donnée oralement en Travaux Pratiques le vendredi 29 Janvier 2016.
- <5 pts>
- (b) Supposons que le spectre est recentré au centre de l'image, donc dans le pixel  $[64][64]$  du tableau deux dimensions de taille  $128 \times 128$  i.e., (lignes  $\times$  colonnes). Quelle est la fréquence numérique associée au pixel  $[67][67]$  de ce spectre ?
- <5 pts>
- (c) Dans ce type d'image on a l'impression de voir un spectre discrétisé, et plus précisément une fonction spectrale pour laquelle on a pris des échantillons à des intervalles régulièrement espacés de  $S(u, \nu)$  en  $u$  et en  $\nu$ , qui sont de l'ordre de  $\approx 9$  pixels pour cette image dans chacune des directions (en moyenne). Trouver la relation mathématique qui exprime que l'on voit une version discrétisée de  $S(u, \nu)$  et trouver ensuite la longueur moyenne de la brique de cette image à partir seulement du spectre.
- <10 pts>

## Réponse

1

Dans la suite,  $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$  et  $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$  avec  $y$  orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et  $x$ , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image).

On va procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident :

- $[6 - f]$  &  $[7 - e]$

Dans toutes les images de départ il existe deux images qui se ressemblent beaucoup, il s'agit de l'image (6) et (7) qui auront donc deux spectres qui se ressembleront beaucoup. Parmi les spectres existant, on voit que le spectre (e) et (f) se ressemblent beaucoup. L'un des deux, en l'occurrence le spectre (e), comporte cependant plus de hautes fréquences et ce dernier spectre devrait donc correspondre à l'image (7) qui est caractéristique d'une image que l'on a essayé d'imprimer dans un journal en essayant de reproduire les différents niveaux de gris de celle-ci à partir d'une succession de points blanc et noir, présentant ainsi beaucoup de transitions et donc de hautes fréquences dans le spectre. (En plus rappelons que le spectre de l'image (6) a déjà été calculé en TP).

En fait, il s'agit de ce qu'on appelle le demi-ton ou halftone, en reprographie. C'est en fait une technique utilisée par les journaux qui permet de rendre plusieurs niveaux de gris d'une couleur à partir d'une impression monochrome. Les journaux qui ne peuvent imprimer que des points d'encre, les arrangent de telle sorte que l'œil humain ne discerne plus ces points mais les intègre pour donner une illusion de plusieurs niveaux de gris.

- $[5 - g]$

À ce niveau, il existe une association facile à faire qui consiste à associer le spectre (g) avec l'image (5). On reconnaît dans l'image des transitions diagonales droites dues au crayon et au tournevis qui se retrouvent dans le spectre avec une orientation de  $+90$  degré de celle du tournevis et du crayon. On retrouve aussi la transition qui est verticale de l'objet à gauche (dans l'image) avec la transition horizontale présente dans le spectre.

- $[4 - a]$

Le spectre (a) doit être rattaché à l'image (4) puisque, sans ambiguïté, on peut reconstruire l'image (4) à partir d'une composante continue ou valeur moyenne et une imagerie de base (le spectre est pair) présentant un cosinus bidimensionnel ne présentant que des oscillations horizontales, i.e., dans le sens des lignes.

- $[1 - d]$

Si on regarde l'image (1) de près, on s'aperçoit que l'image semble être à mi-chemin entre une succession de lignes blanches et noires orientées dans le sens diagonal droit et un cosinus bidimensionnel ne présentant que des oscillations diagonales droites. L'image semble être construite qu'à partir de cosinus bidimensionnels orientés dans le sens diagonal droit comme le précise le spectre (d).

En plus comme les oscillations de l'image (1) sont contractées par rapport aux oscillations de l'image (4), ses harmoniques sont bien dilatées par rapport aux harmoniques du spectre (a).

- $[2 - c]$

Toutes les transitions de l'image (2) sont perpendiculaires à l'image (c) qui est visiblement une somme de basse et haute fréquence orientée dans une seule et même direction.

- $[3 - b]$

Par élimination, il ne reste que l'association  $[3 - b]$ . On peut néanmoins reconnaître cette association par la présence dans l'image d'un peu d'aliasing qui est caractéristique d'un spectre qui ne s'annule pas pour la fréquence numérique 0.5 (i.e., extrémité de l'image). Les transitions dans le domaine spatial sont aussi perpendiculaires aux transitions du spectre associées aux forts coefficients spectraux de cette image.

<21 pts>

## 2.(a)

Une texture est composée d'un élément ou d'une brique élémentaire que l'on appelle *texon* qui se répète à l'intérieur de l'image texturée avec une certaine variabilité de forme (plus ou moins grande) et une variabilité en niveaux de gris. Dans le cas de l'image du mur de brique, le *texon* représente la brique qui se répète, dans le cadre de cette texture, avec une petite variabilité de forme et une plus grande variabilité selon les niveaux de gris.

<5 pts>

## 2.(b)

La résolution fréquentielle  $\Delta\nu$  qui sépare chaque coefficient du spectre est la plus petite fréquence détectable dans le spectre et donc aussi l'inverse de la plus grande période existant dans le signal, qui est elle

même la longueur du signal donc  $\Delta\nu = 1/128$  et donc la 67 ième cellule du tableau 2D centrée sur la cellule 64 est séparée de  $3\Delta\nu = 3/128$ . Il s'agit donc de la fréquence numérique  $3/128$ .

<5 pts>

**2.(c)**

La fonction spectrale  $S(u, \nu)$  semble discrétisée, c'est à dire que mathématiquement, elle semble se mettre sous la forme (avec la correspondance  $x \rightleftharpoons u$  et  $y \rightleftharpoons \nu$ ) :

$$S(u, \nu) \cdot \text{III}_T(u, \nu) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} s(x, y) * \text{III}_{1/T}(x, y)$$

en posant  $\text{III}_T$  un peigne de dirac espacé de  $T = 9$  pixels en  $u$  et en  $\nu$ , c'est à dire espacé d'une fréquence numérique de  $T = 9\Delta\nu = 9/N$ .

La relation précédente montre donc que quelquechose (i.e.,  $s(x, y)$ ) visiblement se périodise spatialement (à cause de l'opérateur  $*\text{III}_{1/T}$ ) tous les  $1/T = N/9 = 128/9 \approx 14$  pixels (en moyenne) dans chaque direction ( $N$  étant la longueur de l'image carrée) et qui correspond (en moyenne) à la longueur ou largeur de la brique (cf. l'image texturée).

<10 pts>

### III. Filtrage Spatial (19 pts)

1. Soit le masque de convolution  $1 \times 3$  suivant :  $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 
  - (a) Rappeler pourquoi ce masque de convolution, que l'on appelle souvent masque Gaussien, n'est en fait qu'une approximation de la discrétisation de la Gaussienne.  
<5 pts>
  - (b) Donner une estimation ou un intervalle d'estimation, exprimée en nombre de pixels, de l'écart type de la Gaussienne que ce masque est censé approximer.  
<7 pts>

2. Soit le filtre précédent en 2D :  $\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

On aimerait implémenter ce masque de convolution non pas logiciellement mais en utilisant les capacités d'un DSP (processeur de traitement des signaux) pour optimiser la vitesse de ce traitement. On rappelle qu'un DSP implémente (en hardware) que des convolutions de filtres moyenneurs (*average filter*) de n'importe quelle taille possible (pour des masques moyenneurs pas forcément carrés). Indiquer la décomposition de ce filtre puis la propriété utilisée pour son implémentation sur DSP.

<7 pts>

### Réponse

**1.(a)**

La Gaussienne est une fonction continue à support infinie ; elle ne peut être discrétisée sur un support finie qu'avec une certaine approximation. De plus son amplitude, à différent intervals (dans le cas discret), est approximée sous forme de fractions d'entiers.

Connaissant l'équation de la gaussienne :  $\propto \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$ , l'abscisse  $x$  permettant d'obtenir une amplitude à mi hauteur serait  $x \approx 1.17\sigma$  où  $\sigma$  serait l'écart type de la gaussienne (et une estimation possible de l'écart

type de la gaussienne que ce masque de convolution approxime, comme nous le demande la question suivante, en nombre de pixels, serait donc de  $1/1.17 \approx 0.85$  pixels). Cependant pour  $x = 1.17 \times 2 = 2.34$ , l'amplitude de la gaussienne est  $\exp(-(2.34^2/2)) \approx 0.064$  et non pas 0.0 et pour  $x = 1.17 \times 3 = 3.51$ , l'amplitude de la gaussienne est  $\exp(-(3.51^2/2)) \approx 0.002$  et non pas 0.0.

Sans facteur de normalisation, une (meilleure) approximation d'une gaussienne (à 1% près) pour un écart type de  $\sigma = 0.85$  pixels serait donc le filtre de longueur 5 ou 7 colonnes suivant :

<4 pts>

$$\begin{bmatrix} 0.064 & 1 & 2 & 1 & 0.064 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0.002 & 0.064 & 1 & 2 & 1 & 0.064 & 0.002 \end{bmatrix}$$

1.(b)

En fait il existe deux façons d'estimer  $\sigma$  à partir de ce masque de convolution approximant une gaussienne. Ces deux façons nous donneront un interval d'estimation pour ce paramètre.

- La première façon est de dire que l'abscisse  $x$  qui permet d'obtenir une amplitude à mi-hauteur de la gaussienne ( $\propto \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$ ) est  $x \approx 1.17\sigma$ . Une estimation possible de  $\sigma$ , en nombre de pixels, est donc de  $1/1.17 \approx 0.85$  pixels.

- Une autre façon d'estimer  $\sigma$  à partir de ce masque qui approxime une gaussienne est de dire que dans le cas de ce masque, pour deux pixels éloignés du centre de ce masque, la valeur du masque est 0 et que cela doit correspondre à  $3\sigma$ .  $\sigma$  est donc supérieur à  $2/3 \approx 0.6$  pixels.

$$\text{On obtient donc :} \quad 2/3 \approx 0.6 \text{ pixels} < \sigma < 0.85 \text{ pixels}$$

Nota : Une autre démonstration est de dire que l'écart type de la Gaussienne est relié à sa largeur mi-hauteur (FWHM) par la relation :

$$\sigma = \frac{FWHM}{2\sqrt{2\ln(2)}}$$

et comme dans notre cas  $FWHM = 2$ , on trouve  $\sigma \approx 0.85$ .

<6 pts>

2

On a :  $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$  avec :

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \right\}$$

et on utilisera la propriété de distributivité/associativité du produit de convolution pour dire que (si  $I$  est l'image) :

$$I * M = (I * M_1) + (I * M_2) + (I * M_3) + (I * M_4)$$

Nota -1- : Une autre démonstration (beaucoup plus courte) est de dire que la masque Gaussien est séparable en un filtre  $(1/4) \{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \}$  où l'exposant  $T$  désigne la transposée et que l'on peut décomposer facilement ces deux filtres en deux filtres moyennés de taille 3 et 1 colonne(s), en notant simplement que :  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ .

Nota -2- : Avec ce que l'on a dit en Nota -1-, on pourrait décomposer  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$  et donc re-crée le masque gaussien, avec un DSP, en filtrant deux fois horizontalement avec  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$  et deux fois verticalement avec  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$  (puis diviser le résultat par la constante 16).

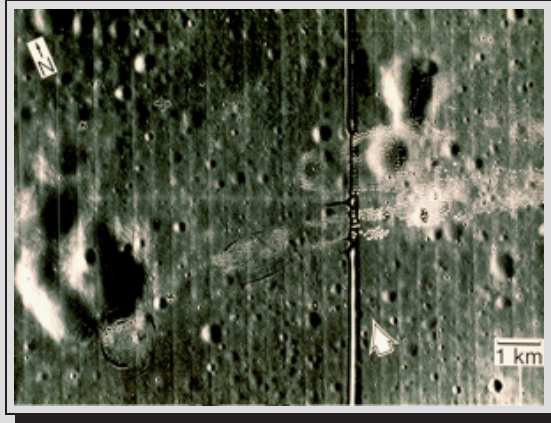
Nota -3- : On pourrait aussi décomposer le masque M en deux filtres  $2 \times 2$  moyennés selon :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<7 pts>

#### IV. Filtrage Fréquentiel (29 pts)

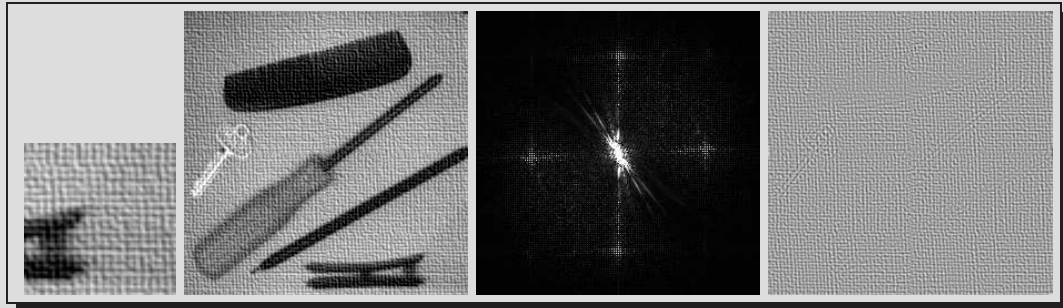
1. En digitalisant une vieille carte de la surface de la lune, on a aussi numérisé la ligne blanche verticale située à droite de cette carte et qui devait correspondre au pli de l'image de cette photo analogique prise au début des années 60. On aimerait enlever cette dégradation en utilisant la Transformée de Fourier (TF).



Indiquer d'une part comment cette dégradation influencera le module de la TF de cette image et quelle pourrait être l'opération fréquentielle permettant d'atténuer cette dégradation. Indiquez quel est le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.) s'agit-il ?

<10 pts>

2. Soit l'image ci-dessous dont un agrandissement est donné sur la première image et qui semble être imprimée sur une sorte de trame représentant du tissu.



On aimerait faire un traitement sur la deuxième image qui nous permette de retrouver le fond de cette image, soit seulement le tramage comme l'image de droite. En calculant le spectre de l'image deux, on trouve l'image donnée en troisième position.

Indiquer qu'elle pourrait être l'opération fréquentielle permettant d'obtenir l'image de droite et le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.) auquel il correspond ?

Indiquer qu'elle pourrait être l'opération fréquentielle permettant d'obtenir l'image sur un fond uniforme et le type de filtre auquel il correspond.

<11 pts>

3. Considérons les filtres fréquentiels que vous avez programmé dans le travail pratique numéro 1 à la question 2 et 3. Indiquer le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.) auquel il correspond ? Plus précisément pour la question 2-1.(a), 2-1.(b), 2-1.(c), 2-1.(d), 2-1.(e), 2-2, 3-2-(a) (pour voir marylin), 3-2-(b) pour voir Einstein).

<8 pts>

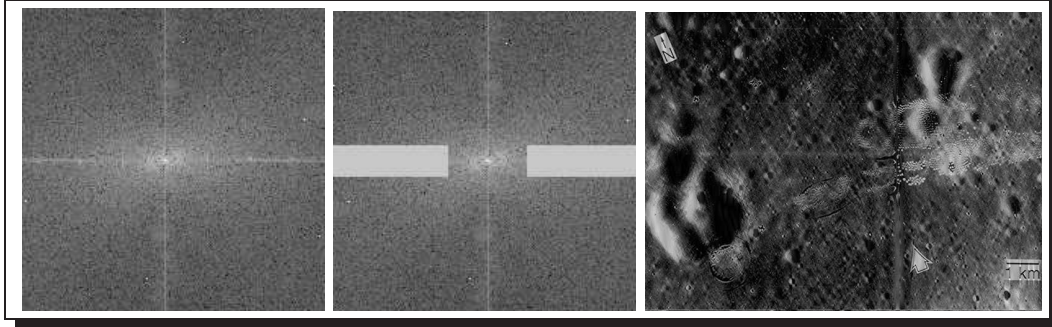
Réponse

1

À cause de cette ligne blanche verticale faisant apparaître une discontinuité verticale, on s'attend à ce que le module de la TF de cette image laisse apparaître une ligne blanche horizontale centrée dans son spectre qui correspondrait en fait à de forts coefficients spectraux nécessaires pour reconstruire l'image avec sa dégradation.

L'opération fréquentielle qui éliminerait la partie haute fréquence de cette ligne blanche horizontale dans le spectre de l'image serait donc l'opération fréquentielle appropriée permettant d'atténuer cette dégradation.

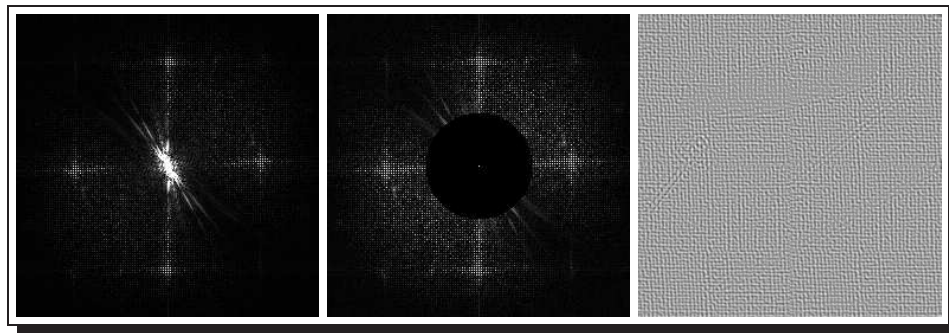
Il s'agit donc d'un filtre de la famille des passe-bandes (rejecteur de bande). En appliquant la stratégie mentionnée, on obtiendrait :



<10 pts>

2

Le spectre d'une image est concentrée dans les (très) basses et moyennes fréquences. Le spectre de l'image avec son fond tramé nous montre comme deux spectres superposés ; celui de l'image et celui de la trame qui constitue l'arrière plan de cette image et qui est constitué de plus hautes fréquences. Une façon de retrouver uniquement la trame est donc de faire un filtre passe-haut (en conservant néanmoins le coefficient spectral de la fréquence nulle pour conserver la moyenne de l'image).



<7 pts>

Si on fait l'inverse, c'est-à-dire un filtre passe-bas, on retrouve l'image sur un fond uniforme.

<4 pts>

3

[2 - 1.(a) : passe-haut], [2 - 1.(b) : passe-bas], [2 - 1.(c) : passe-haut ou amplificateur de haute fréquences ou rehausseur de contour], [2 - 1.(d) : passe-bande ou passe-bas sur les lignes], [2 - 1.(e) : passe-bande ou passe-bas sur les colonnes], [2 - 2 : passe-bande], [3 - 2 - (a) : passe-bas], [3 - 2 - (b) : passe-haut].

<8 pts>