



DIRO
IFT 3205

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http: //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail: mignotte@iro.umontreal.ca

Date: 21/04/2017

I	Restauration et Questions Relatives au TP <i>Filtre de Wiener</i> (36 pts)
II	Système LIT et Questions Relatives au TP <i>Filtres RIF et RII</i> (43 pts)
III	Analyse Spectrale (25 pts)
IV	Filtrage Numérique (16 pts)
Total	120 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Restauration et Questions Relatives au TP: *Filtre de Wiener* (36 pts)

1. Dans ce TP, on cherchait à restaurer une image dégradée (synthétiquement) par du flou uniforme de taille $p \times p = 9 \times 9$ pixels et du bruit Gaussien de variance $\sigma^2 = 0.5$.

On s'intéressait au processus de restauration ou de dégradation inverse (qui consiste à retrouver l'image originale avant que celle-ci ne soit altérée par cette dégradation) en considérant que l'on savait d'avance que le flou était uniforme (rectangulaire) et de taille identique en ligne et colonne (*i.e.*, carré) et de taille $p = 9$ pixels et la variance $\sigma^2 = 0.5$ du bruit Gaussien.

Dans la vraie vie, il aurait fallu estimer, dans un premier temps, la variance du bruit additif qui entache cette image dégradée puis dans un deuxième temps, la nature du flou qui dégrade cette image puis dans un troisième temps les paramètres de ce flou (ou paramètre de la psf).

- (a) Donner une méthode pour estimer la variance du bruit additif Gaussien qui entachait cette image. Si votre méthode dépend d'un paramètre discuter la sensibilité de ce paramètre sur le résultat de l'estimation.

<7 pts>

- (b) Discuter comment on pourrait faire pour déterminer la nature du flou (à un paramètre près) sur une image dégradée. C'est-à-dire savoir que pour une image, le flou est probablement uniforme carré (mais de taille inconnue) ou donnée par une fonction porte (dont la largeur est inconnue) ou donnée par une PSF Gaussienne (dont la variance) n'est pas connue, etc.

<7 pts>

- (c) Supposons maintenant que nous avons fait les deux précédentes étapes; nous avons donc une estimation de l'écart-type σ du bruit additive dégradant l'image et nous savons que le flou de cette image est majoritairement donnée par une psf carrée mais de taille inconnue p . Donner la méthode qui permettrait d'estimer ce paramètre en étant le plus précis possible (sur comment ce paramètre serait estimé).

<8 pts>

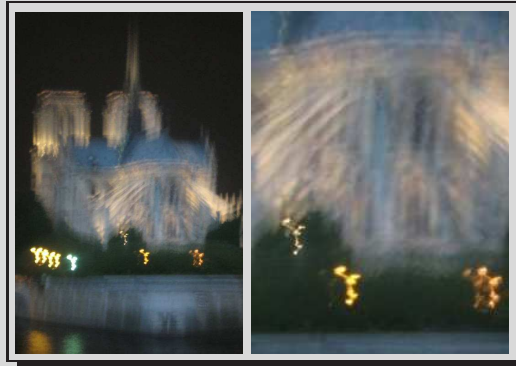
2. Si on ne considère pas le flou créé intrinsèquement par une caméra dont la taille des capteurs n'est pas infiniment petite (ou le nombre de capteurs infiniment grand), ni le flou que pourrait créer un zoom (analogique ou numérique); quels sont les trois types de flou les plus connus d'une caméra (appareil photo numérique). Expliquer brièvement à quoi est dû chacun d'entre eux.

<6 pts>

3. Soit l'image ci-dessous (cathédrale Notre-dame) prise par une caméra numérique (et un agrandissement à droite).

Expliquez précisément à quoi est dû la dégradation de cette image. Si on voulait restaurer cette image en utilisant efficacement un maximum du code du TP *Filtre de Wiener* que vous avez implémenté, expliquer ce qu'il faudrait d'une part estimer et comment l'estimer (précisément) puis comment utiliser ce code (*i.e.*, en changeant quelle structure de données ?) pour ensuite restaurer cette image.

<8 pts>



Réponse

1(a)

Une méthode possible consisterait, pour chaque pixel, à estimer dans une petite fenêtre W (par exemple de dimension $N \times N$) et centrée sur ce pixel), la variance empirique. La variance minimale obtenue sur l'ensemble de ces estimations serait une borne supérieure et une assez bonne estimation de la variance de ce bruit. En effet l'image comporte obligatoirement quelques zones homogènes et lorsque W se fixera sur l'une d'entre elles, la variance obtenue sur cette zone sera une assez bonne estimation de la variance du bruit.

Le seul paramètre de cette méthode est la taille de la fenêtre W (la valeur de N). Il faut que cette taille soit assez grande pour inclure assez d'échantillons pour que l'estimation de la variance soit bonne mais cette taille doit être assez petite pour que l'imagette puisse se fixer sur une zone homogène de l'image.

<7 pts>

NOTA -1- : Avec une taille $N = 15$, on obtient, par cette méthode simple, une estimation de la variance de $\hat{\sigma}^2 \approx 0.57$ et l'image ci-dessous nous montre la zone homogène, de variance minimale, où l'imagette s'est fixée sur l'image.



NOTA -2- : Une autre méthode consisterait à calculer la DSP de l'image bruitée ($|Y(u, \nu)|^2$) et essayer d'estimer la constante de cette DSP aux niveaux des très hautes fréquences de cette image bruitée où il n'y aurait que du bruit (puisque l'on sait que le bruit additif gaussien blanc a une DSP constante égale à σ^2).

1(b)

De trois façons différentes:

- Suivant le contexte. Plus précisément si on sait que l'image a été prise pendant que l'objet sur l'image se déplaçait très vite dans une direction, on sait que le flou est du flou de mouvement et donc que c'est une fonction porte dont on estimera plus tard le paramètre. Si on sait que le flou est dû aux perturbations atmosphériques, on sait que celui-ci est Gaussien dont le paramètre sera estimé plus tard, si on sait que ce flou est dû majoritairement au mauvais réglage de la focale, on sait que celui-ci est circulaire dont le rayon sera estimé plus tard etc.

- On peut regarder quoi ressemble la TF de cette fonction de flou (ou psf) en calculant le spectre et en relevant les hautes fréquences (avec la fonction LOG et la fonction MULT) (et plus particulièrement les zéros de cette fonction). À partir de la forme constatée, on peut en déduire la forme de la psf et donc la nature du flou dégradant l'image. Un exemple; si en calculant le module du spectre de l'image dégradée après avoir rehaussé grandement les hautes fréquences, on observe une Gaussienne, la TF inverse d'une gaussienne est une gaussienne et une psf gaussienne est caractéristique d'un flou dû à des perturbations atmosphériques. Dans ce cas, il ne reste qu'à calculer l'écart type de cet psf gaussienne.

- On peut regarder à quoi ressemble la dégradation d'un point fixe (ou ce qui serait considéré comme point fixe avant la dégradation comme une petite lumière). La forme de l'étalement de ce point fixe une fois altéré par la dégradation est la psf (point spread function) ou fonction d'étalement du point et suivant la forme de celui-ci, nous aurions des indications sur la nature du flou qui dégrade l'image.

<7 pts>

NOTA : D'autres façons, non citées en cours, existent.

1(c)

Dans notre cas spécifique de flou uniforme carré, si on calcule le module du spectre de l'image dégradée après avoir rehaussé grandement les hautes fréquences, on devrait observer nécessairement une enveloppe sinus cardinal bidimensionnel de même taille en fréquence ligne ou colonne car la TF inverse de celle-ci est une fonction carrée.

Puisque ce sinus cardinal engendre des zéros dans le domaine fréquentiel, on peut estimer le paramètre p par la méthode des zéros fréquentiels. Raisonnons en une dimension puisque le flou est uniforme en ligne et colonne.

$$h(x) = \Pi\left(\frac{x}{d_x}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin(\pi\nu d_x)}{(\pi\nu d_x)} = H(\nu) \quad (\text{à une constante de proportion près})$$

Avec le sinc qui s'annule tous les $\nu = 1/d_x$. Sachant que $H(\nu)$ est représenté pour $\nu \in [-1/2 : 1/2]$ (fréquences numériques), on en déduit immédiatement $\nu = 1/d_x = 1/9$; soit un sinus cardinal qui s'annule 9 fois dans le support fréquentiel $\nu \in [-1/2 : 1/2]$. Si on calcule le module du spectre de notre image dégradée après avoir rehaussé grandement les hautes fréquences, c'est bien ce que l'on observe très précisément !

<8 pts>

NOTA : La méthode qui consiste à déconvoluer l'image avec une fonction de flou uniforme carré de paramètre d , variant dans un interval, et qui consiste à retenir le paramètre d qui aboutit à la meilleure image restaurée, n'est pas très intéressante car cette méthode est longue et surtout très supervisée !

2.

- Le flou créé par le déplacement du sujet photographié. Si le sujet bouge pendant que l'obturateur enregistre l'image ("motion blur").
- Le flou créé par le mouvement de la caméra. Souvent, c'est la main qui fait bouger la caméra d'où le nom "hand-shaking blur".
- Le flou créé par une mauvaise mise au point. "out-of focus blur"

<6 pts>

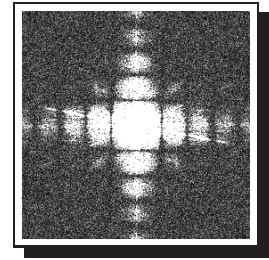
NOTA : On pourrait ajouter aussi un flou de compression (ex. jpg) mais celui-ci n'est pas directement lié à la caméra mais à son système de stockage de données.

3.

Il s'agit d'un flou créé par le mouvement de la caméra, lequel est certainement dû au mouvement de la main qui tenait la caméra pendant que l'obturateur enregistrerait l'image. Mathématiquement, si $g(x, y)$ est l'image floue, nous avons $g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$ avec $h(x, y)$, la psf et $*$ l'opérateur de convolution.

On reconnaît ce flou facilement car l'objet visualisé (la cathédrale Notre-Dame) est statique et pourtant, on a l'impression, dans cette image, qu'elle bouge. Un deuxième indice nous est donné par la lumière, tel un point fixe, d'un lampadaire (au milieu de l'image, légèrement en bas) qui trace un certain chemin de lumière (ou fonction) pendant que la main était en train de bouger et pendant que l'obturateur enregistrerait l'image *via* les capteurs de la caméra.

Ce chemin peut être utilisé pour estimer l'étalement d'un point fixe (de largeur un pixel) communément appelé *point spread function* ou fonction de flou ou PSF de la dégradation; pour cela, on doit isoler ce tracé de lumière et trouver celui qui aurait été créé par une lumière de lampadaire de largeur un pixel. Ce motif 2D est notre fonction de flou ou psf et doit être enregistré dans $h(x, y)$, un tableau 2D dans lequel on recrée ce motif au centre informatique de ce tableau par un ensemble de coefficients identiques (on suppose que la main a bougé à la même vitesse durant le temps où l'obturateur enregistrerait l'image, cf. image ci-dessous) dont la somme intègre à un (le flou est un filtre passe-bas qui ne doit pas modifier la moyenne de l'image).



On peut ensuite utiliser le reste du code du TP pour déconvoluer cette image par le filtre de Wiener après avoir estimé la variance du bruit qui entache cette image (cf. méthode de la question 1(a)).

<10 pts>

II. Questions Relatives au TP: *Filtres RIF et RII* (43 pts)

1. Dans la première question “Analyse d’un filtre inconnu” de ce TP, on vous demandait de simuler numériquement (i.e., générer sur ordinateur) le signal de sortie créé par le filtre numérique défini par l’équation récurrente suivante:

$$y(n) - 2\rho \cos \theta y(n-1) + \rho^2 y(n-2) = x(n) - x(n-1) \quad (1)$$

avec $\rho = 0.99$ et $\theta = \pi/16$, lorsque le signal d’entrée $x(n)$ à ce filtre est un signal aléatoire.

Si on remplaçait le signal d’entrée $x(n)$ par un dirac $\delta(n)$ donner deux raisonnements; un qualitatif et un quantitatif (i.e., à l’aide d’équation mathématique) ou deux raisonnements qualitatifs différents qui nous indiqueraient quel serait le signal de sortie $y(n)$ que l’on obtiendrait ?

<10 pts>

2. Concernant la deuxième question “Suppression d’une composante sinusoïdale” de ce TP, tracer brièvement la réponse fréquentielle du filtre que l’on vous demande d’implémenter (Eq. (2) avec $\rho = 0.99$ et $\theta = \pi/8$) en donnant les valeurs du gain statique et celui obtenu à la fréquence de Shannon.

$$H(z) = \frac{1 - 2 \cos \theta z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \rho \cos \theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} = \frac{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})}{(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta})} \quad (2)$$

Super-imposer sur cette réponse fréquentielle la réponse fréquentielle obtenue si on avait mis les deux pôles de ce filtre rejeteur de fréquence en $z = 0$ (avec toujours $\theta = \pi/8$ et en précisant les valeurs du gain statique et celui obtenu à la fréquence de Shannon). Quelle aurait été la classe de ce filtre ? Expliquer ce que l’on aurait obtenu si on avait filtré le signal d’entrée “Hasta la vista” de Arnold Schwarzenegger parasité par la fréquence parasite $\nu = 1/16$ avec ce filtre rejeteur de fréquence avec les deux pôles à zéro.

<10 pts>

3. Concernant la troisième question “Égalisation” de ce même TP:

- (a) On vous demandait de simuler numériquement (i.e., implémenter sur ordinateur) la sortie d’un canal, de fonction de transfert $C(z)$, lorsqu’on appliquait à celui-ci, en entrée, une impulsion de Dirac $\delta(n)$ et, dans un deuxième temps, un échelon unité; $\mathcal{U}(n)$.

$$H(z) = C(z) = (1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \quad (3)$$

Retrouver par théorie (solution générale $y(n), \forall n$), cette réponse impulsionnelle et la réponse indicielle de ce filtre par transformée en Z (TZ) inverse.

<10 pts>

- (b) Donner la réponse indicielle du filtre (3) à partir de l’équation aux différences (3 premiers échantillons, i.e., $y(n=0), y(n=1), y(n=2)$)

<6 pts>

- (c) Montrer que le filtre inverse de $C(z)$ (Eq. (3)) est instable en calculant la réponse impulsionnelle de ce filtre inverse et en expliquant pourquoi cette réponse impulsionnelle est dite instable.

<7 pts>

Réponse

1.

Qualitativement: le signal Dirac $x(n) = \delta(n)$ à pour spectre $X(\nu) = 1, \forall \nu$ et aussi pour densité spectrale $|x(\nu)|^2$ la constante unité tout comme le bruit blanc. La seule différence avec le bruit blanc réside dans son énergie qui est moins grande (le Dirac est un signal dont l'aire est unité). Donc le signal de sortie devrait être oscillant avec une période numérique 1/16 mais amortie (réponse impulsionnelle infinie car le filtre est RII).

Une autre réponse qualitative, tout aussi valable, serait de dire que $H(z)$ est un filtre dont la fonction de transfert en z est de la forme $H(z) = K N(z)/[(z-p)(z-p^*)]$ et que la réponse impulsionnelle d'un tel filtre est, puisque $[x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1]$, $Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \Rightarrow h(n)$, du type sinusoidal amorti d'équation $h(n) = (A\rho^n) \sin(n\theta + \phi)$, (cf. cours chapitre "Systeme LIT rationnel", slide 14).

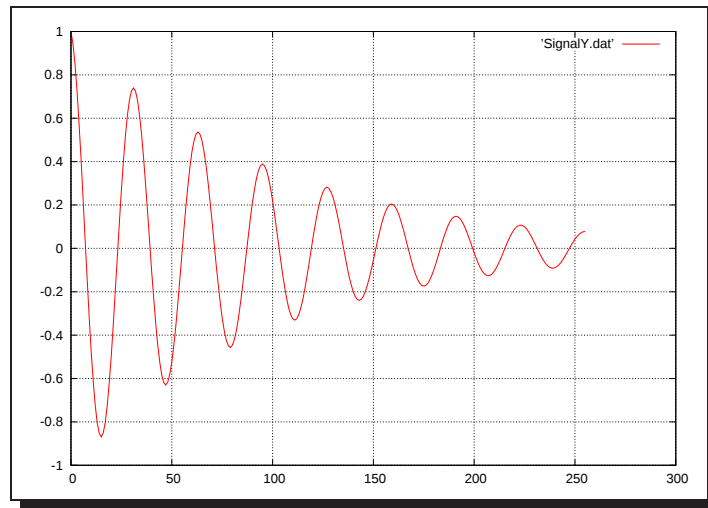
Quantitativement: il suffit de trouver la réponse théorique de ce filtre à une impulsion de Dirac, c'est-à-dire la réponse impulsionnelle. $[x(n) = \delta(n) \xrightarrow{Z} X(z) = 1]$:

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2\rho \cos(\theta)z + \rho^2} = \frac{z^2 - z}{[z - \rho e^{j\theta}][z - \rho e^{-j\theta}]} = K_1 + \frac{K_2}{z - \rho e^{j\theta}} + \frac{K_3}{z - \rho e^{-j\theta}}$$
$$\xrightarrow{Z^{-1}} y(n) = K_1 \delta(n) + K_2 \rho^n e^{jn\theta} + K_3 \rho^n e^{-jn\theta}$$

On obtiendrait une réponse impulsionnelle nécessairement réelle (car les pôles sont conjugués) donc de la forme d'un sinus ou cosinus ou combinaison des deux, amortie par ρ^n ($\rho < 1$).

<10 pts>

NOTA -1- : Si on fait fonctionner le programme du TP pour un Dirac en entrée, on obtient bien, pour $\rho = 0.99$ et $\theta = \pi/16$, la réponse impulsionnelle suivante:



NOTA -2- : Un des raisonnements serait d'itérer l'équation aux différences du filtre pour s'apercevoir que le signal oscille et s'amortie mais cette méthode est très laborieuse.

NOTA -3- : Puisque vous aviez droit à votre ordinateur portable durant l'examen et à tous les documents autorisés, il aurait été judicieux, si vous aviez un doute, de faire rouler cette question du TP durant l'examen en remplaçant le signal d'entrée par un dirac pour voir réellement quelle était la réponse à cette question ! Vous

auriez obtenu le graphique ci-dessus ! Si vous m'avez répondu un raisonnement possible est l'implémentation sur ordinateur, ce raisonnement aurait été valide !

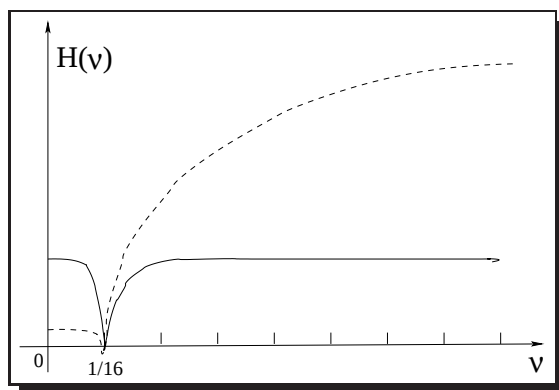
2.

Le gain statique est le gain de la réponse fréquentielle pour la fréquence numérique $\nu = 0$. Il est obtenu en posant $z = 1$ dans la fonction de transfert $H(z)$ et le gain à la fréquence de Shannon est le gain de la réponse fréquentielle pour la fréquence numérique $\nu = 0.5$. Il est obtenu en calculant $H(z = -1)$. Du coup, pour le filtre de l'Eq. (2), on obtient (pour $\rho = 0.99$ et $\theta = \pi/8$):

$$H(z = 1) = \frac{2 - 2 \cos \theta}{1 - 2 \rho \cos \theta + \rho^2} \approx 1.01 \quad \text{et} \quad H(z = -1) = \frac{2 + 2 \cos \theta}{1 + 2 \rho \cos \theta + \rho^2} \approx 1.005$$

et pour le filtre pour lequel les deux pôles sont à zéro (filtre de la classe RIF):

$$H(z = 1) = 2 - 2 \cos \theta \approx 0.15 \quad \text{et} \quad H(z = -1) = 2 + 2 \cos \theta \approx 3.84$$



On voit bien que ces deux filtres rejettent tous les deux la fréquence numérique (1/16) mais diffèrent par leur gain statique et gain à la fréquence de Shannon. Celui dont les pôles sont à zéro va en plus atténuer les basses fréquences et amplifier les hautes fréquences du signal de parole. Si on utilise ce filtre, le signal d'entrée "Hasta la vista" de Arnold Schwarzenegger sera bien débarrassée de sa fréquence parasite mais les basses fréquences vont être atténuées et les hautes fréquences considérablement amplifiées. Dans ce cas, ce traitement aurait pour effet indésirable de donner à Arnold Schwarzenegger, une voix très aiguë et donc très efféminée !

<10 pts>

3(a)

Une façon très simple sans calcul ! permettant de répondre à cette question aurait été de partir de l'équation aux différences du filtre (particularité des filtres RIF):

$$y(n) = x(n) - (7/3)x(n-1) + (2/3)x(n-2)$$

et pour la réponse impulsionnelle, de remplacer $x(n)$ par $\delta(n)$: $\triangleright y(n) = \delta(n) - (7/3)\delta(n-1) + (2/3)\delta(n-2)$
et remplacer $x(n)$ par $\mathcal{U}(n)$ pour la réponse indicielle: $\triangleright y(n) = \mathcal{U}(n) - (7/3)\mathcal{U}(n-1) + (2/3)\mathcal{U}(n-2)$

Ou alors, si on aime les calculs ...

- Réponse impulsionnelle du système $[x(n) = \delta(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = 1]$:

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) = (1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) = 1 - (7/3)z^{-1} + (2/3)z^{-2}$$

$$\stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} y(n) = \delta(n) - (7/3)\delta(n-1) + (2/3)\delta(n-2)$$

<5 pts>

- Réponse indicielle du système $[x(n) = \mathcal{U}(n)] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = z/(z-1)$:

$$Y(z) = H(z) X(z) = \left\{ (1 - (7/3)z^{-1} + (2/3)z^{-2}) \cdot \frac{z}{(z-1)} = \frac{z}{z-1} + \frac{-(7/3)}{z-1} + (2/3)z^{-1} \frac{1}{z-1} \right.$$

$$\xRightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(n) = \mathcal{U}(n) - (7/3)\mathcal{U}(n-1) + (2/3)\mathcal{U}(n-2)$$

<5 pts>

NOTA : On obtient bien, comme en pratique, la réponse indicielle suivante:

$$\{1, -(4/3), -(2/3), -(2/3), \dots\}.$$

3(b)

$$H(z) = Y(z)/X(z) = (1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) = 1 - (7/3)z^{-1} + (2/3)z^{-2}$$

$$\xRightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(n) = x(n) - (7/3)x(n-1) + (2/3)x(n-2)$$

En utilisant cette équation aux différences et pour $x(n) = \mathcal{U}(n)$, on obtient:

$$y(0) = x(0) - (7/3)x(-1) + (2/3)x(-2) = 1$$

$$y(1) = x(1) - (7/3)x(0) + (2/3)x(-1) = -4/3$$

$$y(2) = x(2) - (7/3)x(1) + (2/3)x(0) = -2/3$$

<6 pts>

3(c)

Réponse impulsionnelle du système $H_i(z) = 1/H(z)$ $[x(n) = \delta(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = 1]$:

$$Y(z) = H_i(z) X(z) = H_i(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - (1/3)z^{-1})} = \frac{6/5}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1/5}{(1 - (1/3)z^{-1})}$$

$$\xRightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(n) = (6/5) \cdot (2)^n \mathcal{U}(n) - (1/5) \cdot (1/3)^n \mathcal{U}(n)$$

On peut trouver bien sur le même résultat en partant de:

$$\begin{aligned} Y(z) = H(z) &= \frac{z^2}{(z-2)(z-(1/3))} = \frac{z^2 - (7/3)z + (2/3) + (7/3)z - (2/3)}{z^2 - (7/3)z + (2/3)} \\ &= 1 + \frac{(7/3)z - (2/3)}{(z-2)(z-(1/3))} = 1 + \frac{12/5}{(z-2)} - \frac{1/15}{(z-(1/3))} \\ &\xRightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(n) = \delta(n) + (12/5) \cdot (2)^{n-1} \mathcal{U}(n-1) - (1/5) \cdot (1/3)^{n-1} \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

Les deux réponses indicielles sont identiques et on voit bien qu'elles sont divergentes à cause du terme 2^n dans la première et 2^{n-1} dans la deuxième qui tend vers l'infinie quand n tend vers l'infinie.

<7 pts>

NOTA : Les deux réponses indicielles sont bien sur identiques et conduisent à la suite d'échantillons suivants: $\{1, (35/15), (215/45), \dots\}$.

III. Analyse Spectrale (25 pts)

Soit un signal analogique $x(t)$ de la forme:

$$x(t) = \alpha_1 \sin(2\pi \cdot 300 t) + \alpha_2 \sin(2\pi \cdot 320 t) + \text{Bruit} \quad (4)$$

que l'on a discrétisé avec $N = 1019$ échantillons avec une fréquence d'échantillonnage de $F_e = 5120$ Hz et dont on souhaite analyser numériquement le spectre et pour lequel les valeurs α_1 et α_2 sont compris dans l'intervalle $[0 : 1]$ et représente de l'information utile.

1. Supposons que le Bruit n'est pas trop présent sur $x(t)$, trouver la stratégie complète qui vous permettrait d'analyser ce spectre avec le maximum de précision sans périodogramme moyenné et le plus rapidement possible.
< 10 pts >
2. Rappeler les avantages/inconvénients d'un périodogramme moyenné dans notre cas.
< 5 pts >
3. Supposons que l'on veuille absolument faire une technique de périodogramme moyenné mais que l'on veuille, par mesure de sécurité, séparer les deux fréquences que l'on désire détecter par au moins un bin. Trouvez la stratégie optimale et au maximum, combien pourrait-on utiliser de blocs (et de quelle longueur optimale) dans ce périodogramme moyenné (avec un chevauchement maximal de 50%). Discuter de ce que vous avez gagné ou perdu en faisant cette stratégie dans le cas de notre signal d'équation (4).
<10 pts >

Réponse**1.**

Dans un premier temps, on vérifie que la fréquence d'échantillonnage est au moins deux fois supérieure à la plus grande des deux fréquences du signal à détecter. Ce qui est vrai.

Par miracle, on voit que si on ajoute 5 zéros à ce signal on se retrouve avec un signal de longueur 200 ms pour lequel $\Delta\nu = 1/T = 5$ Hz qui est un sous-multiple des fréquences 300 et 320 Hz à détecter ! En plus on pourra utiliser la FFT de complexité linéaire plutôt que la TFD !

Le traitement idéal est donc 1-] pondération par fenêtre de Hanning pour les 1019 premiers échantillons pour éliminer les discontinuités du signal qui seront créées par la TFD, 2-] Ajout des 5 zéros (et non pas inverser ces deux étapes) et utilisation de la FFT.

On vérifie que le lobe principal de la TF de la fenêtre de Hanning permettra de différencier ces deux fréquences très proches. Elles sont séparées dans notre cas de 4 bins, donc tout semble bon.

<10 pts >

NOTA : On ne peut pas utiliser dans cet exemple le périodogramme moyenné car un moyennage sur 10 blocs (ce qui est un minimum) se chevauchant (maximalement) de 50 pour cent utiliserait des blocs de taille au mieux cinq fois plus petit correspondant donc à un $\Delta\nu$ cinq fois plus grand, donc de 25 Hz qui ne permettrait pas de différencier les deux fréquences.

2.

Diminue d'autant plus la variance du bruit du spectre linéairement en fonction du nombre de blocs utilisés dans le processus de moyennage mais en contrepartie augmente $\Delta\nu$ donc limite son pouvoir de séparer deux fréquences proches.

<5 pts >

3.

Toujours en ajoutant 5 zéros à ce signal on se retrouve avec un signal de longueur 200 ms, on peut utiliser un $\Delta\nu = 1/T = 10$ Hz qui est un sous-multiple des fréquences 300 et 320 Hz à détecter avec un bin de sécurité entre ces deux fréquences. $T = 1/\Delta\nu = 0.1$, ce qui fait avec un chevauchement de 50% un moyennage fait sur 4 blocs (de longueur 512) en considérant le signal toroidal. Dans notre cas, on ne peut pas faire un moyennage sur plus de blocs. On diminue la variance du bruit par deux mais en contrepartie on a plus qu'un bin de séparation entre les deux fréquences, ce qui peut être dangereux car l'incertitude pour chaque fréquence est augmenté aussi par deux.

<10 pts>

IV. Filtrage Numérique (16 pts)

Considérons le filtre dérivateur numérique simple défini par l'équation aux différences suivante (entre un signal d'entrée $x(n)$ en un signal de sortie $y(n)$):

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \quad (5)$$

1. Tracer brièvement la fonction de transfert $|H_1(z)|$ de ce filtre en utilisant le lieu de ses pôles/zéros et la valeur exacte de $|H_1(z)|$ aux fréquences numériques respectives; $\nu = 0$, $\nu = 1/4$ et $\nu = 1/2$. Quel type de filtre obtient-on ?

<6 pts>

2. Soit le traitement en temps différé suivant:

$$y(n) = x(n) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

entre un signal d'entrée $x(n)$ préalablement acquis et stocké, et le masque de convolution $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ("*" est le produit de convolution).

- (a) Donner l'équation aux différences permettant d'obtenir ce filtrage en temps réel. Tracer brièvement la fonction de transfert $|H_2(z)|$ de ce filtre en utilisant le lieu de ses pôles/zéros et la valeur exacte de $|H_2(z)|$ aux fréquences numériques respectives; $\nu = 0$, $\nu = 1/4$ et $\nu = 1/2$. À quoi correspond ce filtre ?

<5 pts>

- (b) Calculer $|H_2(z)|$ exacte en posant $z = e^{2\pi j\nu}$. Comparativement au premier filtre, le second filtre n'amplifiera pas ($|H_2(z)| < 1$) les hautes fréquences à partir de quelle fréquence numérique ?

<5 pts>

Réponse

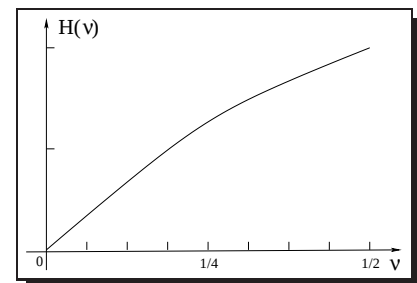
1.

On obtient: $H_1(z) = (z-1)/z$ donc un pôle au centre du cercle $\mathcal{C}_{\text{Rayon}=1}$ (filtre RIF stable) et un zéro en $z = 1$.

▷ En $\nu = 0$, $z = 1$ et on obtient $H_1(z=1) = 0$, ce que l'on pouvait prévoir immédiatement puisqu'un zéro se trouve en $z = 1$.

▷ Pour $\nu = 1/4$, $z = j$ et donc $|H_1(z=j)| = \left| \frac{j-1}{j} \right| = |j-1| = \sqrt{2}$.

▷ Pour $\nu = 1/2$, $z = -1$ et donc $|H_1(z=-1)| = \left| \frac{-1-1}{-1} \right| = 2$.



On retrouve donc un filtre passe haut avec une fonction de transfert $|H_1(z)|$ du style:

<6 pts>

2(a)

Le traitement en temps réel est: $y(n) = x(n) - x(n-2)$

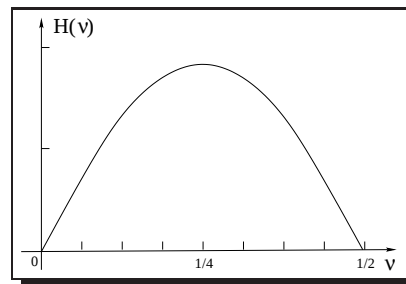
On obtient: $H_2(z) = (z^2 - 1)/z^2$ donc deux pôles au centre du cercle $\mathcal{C}_{\text{Rayon}=1}$ (filtre RIF stable) et deux zéros en $z = 1$ et $z = -1$.

▷ En $\nu = 0$, $z = 1$ et on obtient $H_2(z = 1) = 0$, ce que l'on pouvait prévoir immédiatement puisqu'un zéro se trouve en $z = 1$.

▷ Pour $\nu = 1/4$, $z = j$ et donc $|H_2(z = j)| = \left| \frac{j^2 - 1}{j} \right| = 2$.

▷ Pour $\nu = 1/2$, $z = -1$ et donc $|H_2(z = -1)| = 0$, ce que l'on pouvait prévoir immédiatement puisqu'un zéro se trouve en $z = -1$.

Il s'agit du filtre dérivateur du second ordre; donc un filtre passe haut avec une fonction de transfert $|H_2(z)|$ du style:



<5 pts>

2(b)

$$\begin{aligned} |H_2(z = e^{2\pi j\nu})| &= |1 - 1/z^2| = |1 - e^{-2\pi j\nu}| = |e^{\pi j\nu}| |e^{-\pi j\nu} + e^{\pi j\nu}| = \overbrace{|e^{\pi j\nu}|}^1 |2j \sin(\pi\nu)| \\ &= 2 \sin(\pi\nu) \quad \text{pour } \nu \in [0, \dots, 1/2] \end{aligned}$$

$|2 \sin(\pi\nu)| = 1$ lorsque $\sin(\pi\nu) = (1/2)$, i.e., $\pi\nu = \pi/6$ ou $\nu = 1/6$. Donc $|2 \sin(\pi\nu)| < 1$ pour $\nu < 1/6$ ou $\nu > (1/2 - 1/6) = 1/3$

Contrairement au premier filtre, toutes les fréquences numériques supérieures à $\nu = (1/3)$ ne seront pas amplifiées et la fréquence numérique $1/2$ sera même annulée.

<5 pts>

NOTA : Ce second filtre dérivateur va atténuer complètement les hautes fréquences numériques $\nu = 0.5$, lesquelles correspondent concrètement à une période numérique de $T = 2$ pixels, i.e., correspondant à des motifs de longueurs deux échantillons et donc ignorer la dérivée sur ces motifs.

Un tel motif de période $T = 2$ pixels pourrait être donnée par le signal $x(n) = \boxed{0} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{1} \dots$. Dans ce cas, on voit bien que notre filtre donne en sortie $y(n) = \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \dots$ contrairement au premier filtre qui lui donnerait pour le signal $x(n) = \boxed{0} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{1} \dots$ la sortie $y(n) = \boxed{-1} \boxed{1} \boxed{-1} \boxed{1} \dots$

C'est la contre-partie de ce type de dérivateur, qui, certes est moins sensible au bruit, mais qui ne détectera pas les hautes fréquences ou calculera faussement la dérivée des signaux périodiques de période numérique 2 et n'amplifiera pas les hautes fréquences des signaux périodiques de période numérique < 3 .