



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 20/02/2017

I	Convolution & Série de Fourier & Échantillonnage (25 pts)
II	Transformée de Fourier (35 pts)
III	TFD et Calcul de Spectre (31 pts)
IV	Filtrage Spatial (14 pts)
V	Filtrage Fréquentiel (20 pts)
Total	125 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Convolution & Série de Fourier & Échantillonnage (25 pts)

1. CONVOLUTION

- (a) En utilisant pas l'intégration mais seulement les propriétés (de décalage et de produit) du Dirac et le fait que la convolution d'une fonction porte ($\Pi(x)$) avec une fonction porte a pour résultat la fonction Triangle ($\Delta(x)$), trouver le résultat de :

$$\Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) * \Pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

de deux façons différentes ; 1- en restant dans le domaine spatial et 2- en passant dans le domaine fréquentiel.

<10 pts>

2. SÉRIE DE FOURIER

- (a) Rappeler les deux conditions pour qu'un ensemble de fonctions élémentaires constitue une base de fonctions sur laquelle peuvent se décomposer n'importe quels signaux ?

<5 pts>

- (b) Donner deux exemples de ce que peut expliquer ou calculer le modèle de la Transformée de Fourier (TF) que ne peut pas expliquer ou calculer le modèle de la série de Fourier ?

Indiquer aussi brièvement pourquoi.

<5 pts>

3. ÉCHANTILLONNAGE

- (a) Dans l'une de ces deux images, il y a problème que je vous demande d'expliquer le mieux possible.



<5 pts>

Réponse

1.(a)

En utilisant le fait que le produit de convolution est commutatif et les propriétés du Dirac vues en cours, et le fait que la fonction porte convoluée avec la fonction porte est la fonction triangle, on trouve :

$$\begin{aligned}\Pi(x - \frac{1}{2}) * \Pi(x + \frac{1}{2}) &= \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \Pi(x) * \delta(x + \frac{1}{2}) \\ &= \Pi(x) * \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \delta(x + \frac{1}{2}) \quad (\text{commutativité de } *) \\ &= \Delta(x) * \delta(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \Delta(x) * \delta(x) \\ &= \Delta(x)\end{aligned}$$

Une autre possibilité est de passer dans le domaine Fourier pour calculer cette expression :

$$\begin{aligned}\Pi(x - \frac{1}{2}) * \Pi(x + \frac{1}{2}) &\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-j\pi\nu) \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) \exp(+j\pi\nu) \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) \\ &= \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right)^2 \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} \Delta(x)\end{aligned}$$

<10 pts>

2.(a)

L'intégrale du produit de deux éléments différents de la base doit être nulle et l'intégrale du produit de deux éléments identiques de la base doit être non nulle.

<5 pts>

2.(b)

-1- La série de Fourier ne peut pas calculer le spectre (ou la représentation fréquentielle) d'un signal non périodique contrairement à la Transformée de Fourier (TF).

-2- Le modèle de la série de Fourier ne peut pas expliquer le phénomène de l'aliasing contrairement à la TF qui le peut grâce à l'abstraction des fréquences négatives créé par sa notation complexe.

<5 pts>

3.(a)

Il y a un problème d'aliasing pour la deuxième image, c'est-à-dire un problème où la période d'échantillonnage spatiale était trop importante relativement aux trop grandes fréquences spatiales de l'image, notamment celle modélisant les rayures de l'écharpe de la jeune femme. Du fait que les motifs spectraux de part et d'autre du motif spectral centré à la fréquence 0 étaient trop proches (à cause d'une fréquence d'échantillonnage trop petite), les hautes fréquences du spectre ont été altérées par les fréquences négatives du motif d'autre côté créant des artefacts dans l'image que l'on voit bien à différents endroits de l'écharpe rayée.

<5 pts>

II. Transformée de Fourier (35 pts)

1. TRANSFORMÉE DE FOURIER

Soit $*$ le produit de convolution et le traitement spatial fait sur le signal $f(x)$ suivant :

$$g(x) = f(x) * \frac{1}{x} \quad (1)$$

On aimerait comprendre ce que va faire un tel traitement spatial sur le signal $f(x)$. Pour cela, on aimerait *téléporter* cette équation dans le domaine fréquentiel pour essayer de comprendre quelle seront les modifications du spectre de $f(x)$ (que l'on appellera $F(\nu)$) induites par ce traitement spatial particulier.

- (a) Écrire (sans les calculer) les deux intégrales possibles réalisant cette opération de convolution spatiale. Indiquer en quel(s) point(s) ce calcul intégral n'est pas défini.
<5 pts>
- (b) Énumérer **toutes** les propriétés de $H(\nu)$, la TF de la fonction $h(x) = \frac{1}{x}$ (sans la calculer).
<5 pts>
- (c) Dans les tables de TF, on trouve facilement : $\mathcal{F}[\text{sgn}(x)] = \frac{1}{j\pi\nu}$ où $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe ($\text{sgn}(x) = x/|x|$, i.e., égale à 1 pour tout $x > 0$ et -1 pour tout $x < 0$ et égal à 0 pour $x = 0$). En utilisant la propriété duale, en déduire la TF de $h(x)$ puis le traitement fréquentiel associé au filtrage spatial modélisé par l'Équation (1).
<10 pts>
- (d) Pour un signal $f(x)$ et $h(x)$ échantillonné sur N échantillons, indiquez la complexité algorithmique de ce traitement spatial versus le traitement fréquentiel.
<5 pts>
- (e) Soit $G(\nu)$, la TF de la fonction $g(x)$ (cf. Eq. (1)). En écrivant $G(\nu) = \mathcal{R}(G(\nu)) + j\mathcal{I}(G(\nu)) = R_G(\nu) + j \cdot I_G(\nu)$ et $F(\nu) = \mathcal{R}(F(\nu)) + j\mathcal{I}(F(\nu)) = R_F(\nu) + j \cdot I_F(\nu)$, exprimer $R_G(\nu)$ et $I_G(\nu)$ en fonction de $R_F(\nu)$ et $I_F(\nu)$. Que devient cette expression lorsqu'on considère des fréquences positives.
<5 pts>
- (f) Donner les propriétés de $G(\nu)$ (partie réelle et partie imaginaire) respectivement lorsque $f(x)$ (qui est un signal réel) est paire et lorsque $f(x)$ est impaire.
<5 pts>

Réponse

1.(a)

Puisque le produit de convolution est commutatif, on a : $f(x) * \frac{1}{x} = \frac{1}{x} * f(x)$ et donc deux manières d'écrire cette intégrale de convolution.

Selon la définition du cours, on a :
$$f(x) * \frac{1}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t} dt$$

Avec une difficulté en $t = x$ pour la première intégrale et en $t = 0$ pour la deuxième qui rend l'intégrale non définie en ces points.

<5 pts>

1.(b)

La fonction $h(x)$ est non périodique donc son spectre sera continue. Elle est réelle et impaire donc son spectre sera imaginaire pur et impair (avec donc des fréquences négatives). Notons aussi qu'en $x = 0$, la

limite à gauche de $h(x)$ est différente de sa limite à droite créant ainsi une discontinuité très grande en ce point. $H(\nu)$ aura un spectre avec un très grand support, c'est-à-dire qu'il faudra beaucoup d'harmonique pour reconstruire ce signal.

<5 pts>

1.(c)

En utilisant la propriété duale, on a : $\mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}(\nu)] = \frac{1}{-j\pi x}$

Puis, en multipliant par $-j\pi$ des deux cotés : $\mathcal{F}^{-1}[-\pi j \text{sgn}(\nu)] = \frac{1}{x}$

Donc : $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -\pi j \text{sgn}(\nu)$

Et donc on a l'équivalence : $g(x) = f(x) \underbrace{* \frac{1}{x}}_{\text{Traitement spatial}} \stackrel{\mathcal{F}}{=} G(\nu) = F(\nu) \cdot \underbrace{[-\pi j \cdot \text{sgn}(\nu)]}_{\text{Traitement fréquentiel}}$

<10 pts>

1.(d)

Pour le traitement spatial, on a une complexité algorithmique de $\mathcal{O}(N^2)$.

Pour le traitement fréquentiel, on a besoin de 3 TFs 1D (avec une complexité de $N \log N$ pour chacune d'entre elle) puis de N multiplications en complexes nécessitant environ 6 opérations par multiplication pour N coefficients spectraux. Donc au total, on a une complexité algorithmique de $\mathcal{O}(6N + 3N \log N)$.

<5 pts>

1.(e)

$$G(\nu) = [-\pi j \cdot \text{sgn}(\nu)] \cdot F(\nu)$$

$$\begin{aligned} R_G(\nu) + j \cdot I_G(\nu) &= [-\pi j \cdot \text{sgn}(\nu)] \cdot [R_F(\nu) + j I_F(\nu)] \\ &= -\pi j R_F(\nu) \text{sgn}(\nu) + \pi I_F(\nu) \text{sgn}(\nu) \\ &= \underbrace{\pi I_F(\nu) \text{sgn}(\nu)}_{R_G(\nu)} + j \cdot \underbrace{-\pi R_F(\nu) \text{sgn}(\nu)}_{I_G(\nu)} \end{aligned}$$

Pour des fréquences ($\nu > 0$) $G(\nu) = \underbrace{\pi I_F(\nu)}_{R_G(\nu)} + j \cdot \underbrace{-\pi R_F(\nu)}_{I_G(\nu)}$

<5 pts>

Nota : Cette opération fréquentielle va inverser la partie imaginaire et réelle du spectre de $g(x)$ à un signe et un facteur multiplicatif π près.

1.(f)

La précédente question nous a permis de trouver :

$$G(\nu) = \underbrace{\pi \cdot I_F(\nu) \text{sgn}(\nu)}_{R_G(\nu)} + j \cdot \underbrace{-\pi \cdot R_F(\nu) \text{sgn}(\nu)}_{I_G(\nu)}$$

Donc, si $f(x)$ est réel et pair alors $F(\nu)$ a une partie réelle $R_F(\nu)$ paire et aucune partie imaginaire ($I_F(\nu) = 0$) donc, dans ce cas, $G(\nu)$ est imaginaire pur et impair.

Inversement, si $f(x)$ est réel et impair alors $F(\nu)$ a une partie imaginaire $I(\nu)$ impaire et aucune partie réelle ($R_F(\nu) = 0$) donc, dans ce cas, $G(\nu)$ est réel et pair.

<5 pts>

Nota : Cette opération fréquentielle va inverser la propriété de symétrie hermitienne des signaux réels.

III. TFD et Spectre (31 pts)

1. Les images (1) à (7) de la Figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier (calculé par la FFT et recentré au centre de l'image) des différentes imagerie (a) à (g) prises sur l'image (I). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.

<21 pts>



(I)



(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

2. quelle est l'image (1 à 7) qui pourrait le mieux démontrer visuellement par son spectre, que la TFD d'une image est en fait la TF (parfaite) d'une image mais qui se périodise à l'infinie en x et y ?

<5 pts>

3. Voici une image de taille 256×256 :



Faire un schéma (ou le dire textuellement) qui indiquera à quoi ressemblera le (module du) spectre de cette image.

<5 pts>

Réponse

1

Dans la suite, $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image).

On remarque tout d'abord que quatre images possèdent une texture quadrillée haute fréquence et que quatre spectres possèdent des taches hautes fréquences (éloignées du centre et symétrique par rapport au centre) qui représente fréquemment cette texture donc l'image (3)-(4)-(5)-(7) seront associées aux spectres (a)-(c)-(d)-(e). Par élimination les images (1)-(2)-(6) seront associées aux spectres (b)-(g)-(f)

On va procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident :

- $[2 - f]$:

L'image est composée essentiellement de zones homogènes donc de composantes fréquentielles très basses fréquences. De plus on reconnaît une petite transition verticale dans l'image qui va se traduire par une petite transition horizontale dans son l'image de son spectre et en se périodisant, l'image nous montre aussi une petite transition horizontale aui va se modéliser par une petite transition verticale dans son spectre. On choisit donc le spectre qui est le plus "concentré basse fréquence" avec ses deux petites discontinuités horizontales et verticales.

- $[6 - b :]$

Même chose que l'image -2- mais avec un peu plus de hautes fréquences et des transitions verticales et horizontales plus marquées.

- $[1 - g]$:

On reconnaît dans l'image deux sortes de transition diagonale droite que l'on peut reconnaître dans le spectre avec une direction perpendiculaire et surtout une bonne discontinuité horizontale due à la périodisation de l'image (et une petite transition verticale) que l'on constate dans le spectre perpendiculairement.

- $[3 - e]$:

Le pantalon de la jeune femme exhibe un motif presque sinusoidal qui se reconstruit avec des imagettes de base cosinusoidale bidimensionnelle (cf. cours) qui est matérialisées par les deux taches diagonales droites que l'on reconnaît sur le spectre (e).

- $[4 - d]$:

L'image (4) exhibe deux groupes de discontinuités (le premier groupe est celle du nez et du contour parallèle du visage et la deuxième est celui des sourcils, yeux, et bouche de cette jeune femme. On reconnaît dans le spectre ses deux discontinuités perpendiculaires dans le spectre (D). Pour le reste, l'image nous montre majoritairement le visage qui est composé de basses fréquences.

- $[5 - c]$:

On reconnaît grâce au foulard et pantalon, 4 sortes de motifs ressemblant aux s imagette de base cosinusoidales bidimensionnelle (cf. cours) dans quatre directions différentes.

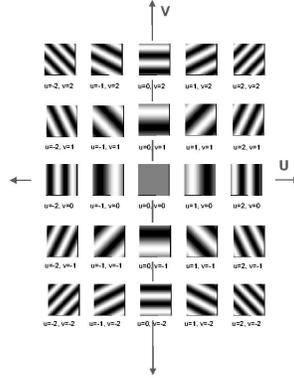
- $[7 - a]$:

Essentiellement un motif en rayure verticale et verticale légèrement droite dans l'image créant ainsi le spectre associé avec ces 4 taches associées à ces 4 type d'imagette de base.

Remarque : Puisque le spectre (b) et (f) se ressemble beaucoup, je compte aussi pour bon toute les combinaisons (b,f)(2,6)

<21 pts> + 7 points Bonus

Nota : Je mets en dessous l'image du cours qui était bien utile pour associer facilement ces images à son spectre.



2

La première image qui présente une belle discontinuité horizontale lorsque celle-ci devient toroidale et dont le calcul du spectre par la TFD sera donc biaisé par cette propriété de la TFD en présentant une discontinuité spectrale verticale qui, en fait, ne correspond à aucune discontinuité horizontale présente dans l'image.

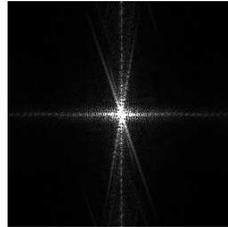
<5 pts>

3

Mis à part des zones très homogènes, on voit qu'il existe exactement 4 groupes de discontinuités respectivement dans la direction verticale, horizontale et deux autres types de transition dont l'une est orientée de quelques degrés par rapport à l'axe des abscisses (colonnes de l'image) et l'autre type fait presque un angle π avec ce même axe des abscisses. Pour modéliser ces discontinuités le spectre de cette image présentera donc quatre discontinuités très marquées dans les quatre directions perpendiculaires à ces quatre directions.

<5 pts>

Nota : Voici le spectre de cette image :



IV. Filtrage Spatial (14 pts)

1. Faire un masque de convolution de taille 3×3 qui réalise sur une image $I(x, y)$, l'opération suivante :

$$\frac{\partial^3 I(x, y)}{\partial x \partial y^2} \quad (2)$$

une dérivée première suivant l'axe des x (colonne) et une dérivée seconde suivant l'axe des y (ligne).

<7 pts>

2. Faire un masque de convolution de taille 3×3 qui réalise sur une image $I(x, y)$, l'opérateur $\Upsilon(\cdot)$:

$$\Upsilon(I(x, y)) = \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \quad (3)$$

<7 pts>

Réponse

1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou si on inverse les lignes et colonnes

<7 pts>

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ou si on inverse les lignes et colonnes

<7 pts>

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

V. Filtrage Fréquentiel (20 pts)

1. Trouver la réponse fréquentielle (ou MTF) d'un filtre qui dans le domaine fréquentiel réalise une dérivée première (dans le domaine spatial) suivant l'axe des x et une dérivée seconde suivant l'axe des y . C'est-à-dire qui réalise l'équation 2 de l'exercice IV.

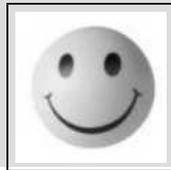
<6 pts>

2. Trouver la réponse fréquentielle (ou MTF) d'un filtre qui réalise l'équation 3 de l'exercice IV.

<6 pts>

3. Supposons que l'on ait une image (de taille $N \times N$ et que l'on fasse sur celle-ci les opérations suivantes : -1- On calcule sa TF. -2- Sur sa TF (partie réelle et imaginaire) on met à zéro une colonne sur deux de sa TF. La colonne associée à la fréquence 0 (valeur moyenne de l'image n'est pas mise à zéro). -3- On fait une TF inverse.

Qu'obtiendra-t-on si on part de l'image suivante (le cadre noir ne fait pas partie de l'image)? Justifiez le mieux possible votre réponse.



<8 pts>

Réponse

1

Avec $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$, on sait que : $f'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu)F(\nu)$ et $f''(y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j v)^2 F(v)$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}; f(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu) \cdot (2\pi j v)^2 \cdot F(u, v) = -8\pi^3 j \nu v^2 \cdot F(u, v) \propto \nu v^2 \cdot F(u, v)$$

Donc une réponse fréquentielle du type : $H(u, \nu) \propto \nu v^2$.

<6 pts>

2

Avec $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$, $f'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu)F(\nu)$, $f''(y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j v)^2 F(v)$, on trouve immédiatement :

$$\frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial I(x, y)}{\partial y^2} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{(2\pi j\nu) + (2\pi j v)^2\} \cdot F(u, v)$$

Donc une réponse fréquentielle du type : $H(u, \nu) \propto j\nu - v^2$.

<6 pts>

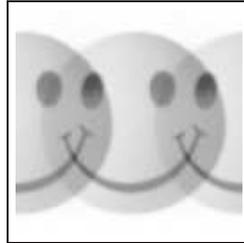
3

▷ Qualitativement, l'opération faite dans le domaine fréquentielle est une discrétisation d'un échantillon sur deux sur les lignes du spectre. Donc, puisque la discrétisation dans un espace entraîne la périodisation dans l'autre espace, on aura une périodisation du motif suivant les lignes (toute les moitiés d'image).

▷ Mathématiquement supprimer une colonne sur deux, correspond sur la TF de l'image $f(x, y)$ à l'opération suivante (en considérant x (la colonne) et y (la ligne) et la correspondance $x \rightleftharpoons u$, et $y \rightleftharpoons \nu$

$$F(u, \nu) \cdot \left\{ \text{III}_{T=2\Delta u}(u) \cdot \text{Cst}(\nu) \right\} \stackrel{\text{TFD}^{-1}}{\rightleftharpoons} f(x, y) * \left\{ \text{III}_{\frac{T}{2}}(x) * \delta(y) = f(x, y) * \text{III}_{\frac{T}{2}}(x) \right\}$$

Le motif spatial va donc se répéter tout les $1/T = 1/2\Delta u = N/2$, c'est-à-dire toute les moitiés de l'image en x (colonne) et on obtiendra :



<8 pts>