



DIRO
IFT 3205

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 15/04/2019

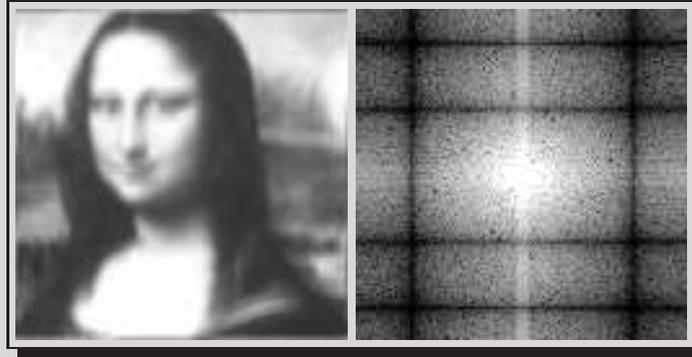
I	Restauration (25 pts)
II	Flou et Réverbération (23 pts)
III	Dé-bruitage (18 pts)
IV	Analyse Spectrale (24 pts)
V	Filtrage Numérique (28 pts)
Total	118 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Restauration (25 pts)

1. Estimation des paramètres

- (a) Soit $g(x, y)$, l'image de Mona dégradée par un flou non uniforme 2D, de largeurs d_x en x et d_y en y (en pixels) inconnues que l'on va chercher à déterminer dans cet exercice. On dispose pour cela de la connaissance de la TF (Transformée de Fourier) de l'image de Mona floue $G(u, \nu)$ (i.e., $g(x, y) \rightleftharpoons G(u, \nu)$) après recalage cyclique pour que le centre apparaisse au centre de l'image et rehaussement des hautes fréquences avec une transformation du type $\log[1 + G(u, \nu)]$ (comme celle vue en TP).



Estimer les paramètres d_x et d_y de la PSF.

<10 pts>

- (b) Écrire le masque de convolution de cette PSF.

<5 pts>

2. Estimation de PSF

- (a) Le télescope spatial Hubble (en anglais Hubble Space Telescope ou HST) fut lancé par la NASA en 1990 sur une orbite terrestre basse à 600 km d'altitude en 1990. On s'aperçut rapidement d'une aberration optique particulièrement grave due à un mauvais polissage de son miroir principal qui le rendait "myope", c'est-à-dire qui faisait en sorte que le télescope produisait en fait des images floues. Dans un premier temps, avant l'année 1993, où une mission spatiale corrigea physiquement l'anomalie de sa partie optique (en lui ajoutant une sorte de lunette corrigeant son problème optique), les ingénieurs ont utilisé les images floues produites par ce télescope avec des procédures de déconvolution numérique comme celles vues en TP. Mais ces derniers ont dus estimer la PSF (Point Spread Function) ou fonction de flou du télescope. On vous demande de trouver deux manières de le faire.

<5 pts>

- (b) Imaginons un télescope dont les images $f(x, y)$ sont dégradées par un flou de mise au point ou hors foyer $h_2(x, y)$ carré uniforme (de taille 5×5) créé par le télescope. De plus, la lumière (donc l'image) qui entre dans le télescope est dégradée par un flou de turbulence atmosphérique (du au fait que l'atmosphère est composée de multiples bulles de température et d'humidité différentes avec un indice optique différent créant des réfractions différentes et aléatoires en fonction de la zone d'atmosphère traversée) $h_1(x, y)$ de type Gaussien avec σ comme écart type.

Écrire le modèle de dégradation de l'image $f(x, y)$ dégradée composée de ces deux flous.

Si on voulait modéliser le flou de ce télescope théoriquement par **une seule** PSF $h(x, y)$, que devrait-on considérer théoriquement? (c-a-d écrire mathématiquement $h(x, y)$ en fonction de $h_1(x, y)$ et $h_2(x, y)$).

<5 pts>

Réponse

1.(a)

On a la relation mathématique suivante : $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = f(x, y) * \frac{1}{d_x d_y} \Pi\left(\frac{x}{d_x}, \frac{y}{d_y}\right)$

On sait que du flou (i.e., des absences de discontinuités) dans une direction entraîne des faibles coefficients dans la direction perpendiculaire à cet axe dans le domaine fréquentiel voire même des coefficients nuls lorsque dans cette direction lorsque H comporte des zéros fréquentiels, ce qui est le cas de la TF d'une porte. Donc dans notre cas, puisque des zéros apparaissent dans les deux directions, $d_x \neq 1$ et $d_y \neq 1$ et doivent être estimés. En utilisant la correspondance x (colonne) $\Rightarrow u$ et y (ligne) $\Rightarrow \nu$, on a

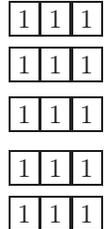
$$\Pi\left(\frac{x}{d_x}, \frac{y}{d_y}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{\sin(\pi u d_x)}{(\pi u d_x)} \frac{\sin(\pi \nu d_y)}{(\pi \nu d_y)} \quad (\text{à une constante de proportion près})$$

Avec le sinc qui s'annule tous les $u = 1/d_x$ et $\nu = 1/d_y$. Sachant que $G(u, \nu)$ est représenté pour $u, \nu \in [-1/2 : 1/2]$ (fréquences numériques), on en déduit immédiatement $u = 1/d_x = 1/3$ et $\nu = 1/d_y = 1/5$ soit $d_x = 3$ pixels et $d_y = 5$ pixels.

<10 pts>

1.(b)

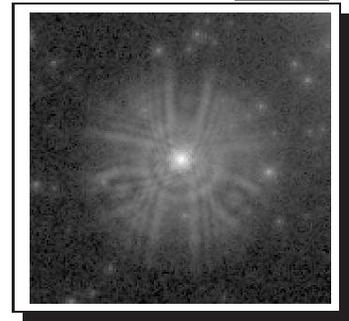
On a la psf ou fonction de flou $h(x, y) = \frac{1}{15} \Pi\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{5}\right)$ associé au masque de convolution : 1/15



<5 pts>

2.(a)

En récupérant la tache (ou fonction de flou) créée en faisant fixer le télescope HST sur une étoile fixe simple isolée dans une région sombre de l'univers (entourée de vides interstellaires) ou en faisant pointer le HST sur une zone localement sombre sur terre au milieu de laquelle un laser émettrait une source de lumière ponctuelle puissante. Un moyennage de plusieurs estimations pour dé-bruiter cette PSF serait peut-être aussi nécessaire.



PSF du HST

<5 pts>

NOTA : On pourrait aussi l'estimer en faisant la TF⁻¹ de la division du spectre de l'image obtenue en une scène donnée par le HST et le spectre obtenu par un autre télescope sans problème de flou avec le même agrandissement et pour la même scène.

2.(b)

Soit $g(x, y)$, l'image dégradée composée de ces deux flous :

$$g(x, y) = \left(\underbrace{[f(x, y) * h_1(x, y)]}_{\text{turbulence}} * \underbrace{h_2(x, y)}_{\text{hors foyer}} \right)$$

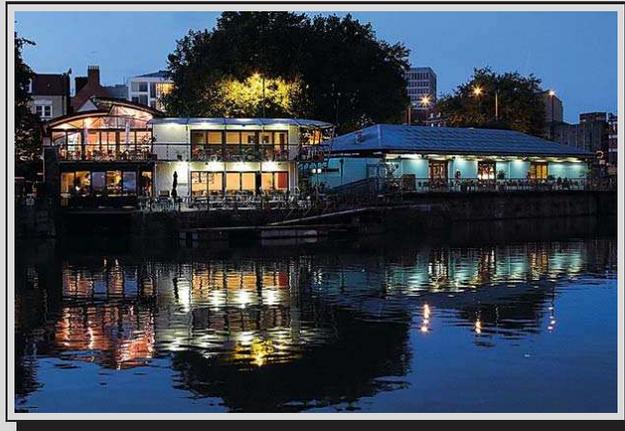
Mais comme le produit de convolution est commutative, alors $g(x, y) = f(x, y) * (h_1(x, y) * h_2(x, y))$ et on pourrait considérer une seule PSF $h(x, y) = h_1(x, y) * h_2(x, y)$, c'est-à-dire un carré uniforme 5×5 convolué par une Gaussienne d'écart type σ .

<5 pts>

NOTA : De même, on pourrait dire que $h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H_1(u, \nu) \cdot H_2(u, \nu)]$ avec $H_1(u, \nu) = \mathcal{F}(h_1(x, y))$ et $H_2(u, \nu) = \mathcal{F}(h_2(x, y))$.

II. Floue et Réverbération (23 pts)

L'image ci-dessous représente trois maisons sur le bord d'un lac qui se réfléchissent dans celui-ci. Le phénomène de réflexion sur l'eau est assez complexe mais s'apparente au phénomène de multi-reflexions de toute onde électromagnétique (comme la lumière) sur une surface rugueuse ou un médium comportant de multiples obstacles, comme la lumière se multi-reflechie dans une fibre optique ou le signal radar d'un avion, est réceptionné sur une antenne après plusieurs réflexions multiples sur les différents objets existant dans le milieu de propagation. Dans le cas d'une réflexion sur l'eau, la lumière réfléchi formerait l'image des maisons, d'autant plus nette que la surface de l'eau est plane (sans vaguelettes). Avec des vaguelettes, les réflexions multiples de la réverbération de la lumière sur celles-ci créent une sorte de floue (éliminant des hautes fréquences dans le signal et modifiant son spectre) que l'on peut essayer de modéliser par une psf (point spread function) et une opération de convolution.



1. À partir de l'image ci-dessus, imaginer une technique (c-a-d énumérer les différentes étapes en étant mathématiquement le plus précis possible) qui vous permette d'extraire le mieux possible la psf ou fonction de floue associée à ce type de réverbération sur l'eau créé par ce lac. Pour les différentes étapes, énumérer les différents problèmes mathématiques auxquels vous serez confrontés et essayer d'imaginer des solutions (éventuellement vues en cours) pour les résoudre.
<10 pts>
2. Ne pourrait-on pas essayer d'utiliser le Filtre de Wiener, avec une modification que l'on précisera, pour arriver à estimer cette psf?
<5 pts>
3. Supposons que cette psf $h(x, y)$ soit estimée, comment ferait-on à partir d'une image (par exemple celle de l'université de Montréal pour simuler sa simulation de réflexion dans un lac de même nature que celui de l'image ci-dessus).
<4 pts>
4. Pourquoi est-il raisonnable de penser qu'il existe une psf différente pour chaque étendue d'eau différente?
<4 pts>

Réponse

1.

Dans cette image, dans la partie supérieure on peut voir l'image des trois maisons que l'on notera mathématiquement $f(x, y)$ et la réflexion de celle-ci, après une symétrie miroir verticale presque parfaite,

dans le lac. On peut donc isoler $f(x, y)$ facilement ainsi que la zone symétrique de la partie inférieure de l'image $l(x, y)$ et lui faire une opération de symétrie miroir verticale inverse $l(x, -y)$, soit $g(x, y) = l(x, -y)$ l'image ainsi obtenue. Éventuellement, si les deux images extraites $f(x, y)$ et $g(x, y)$ ne sont pas à la même taille ou légèrement décalées on pourra faire comme dans le TP numéro 2 un recalage en position et (au lieu d'un recalage en rotation), un recalage au même facteur d'échelle.

Notre modèle suppose donc que $f(x, y) * h(x, y) = g(x, y)$ avec $h(x, y)$ étant la point spread function (psf) que l'on cherche et $*$ étant l'opérateur de convolution et $f(x, y)$ et $g(x, y)$ connue. C'est un problème inverse qui est presque le même que celui vu dans le cours (chapitre restauration, slide 8 et 9) mais pour lequel f et g sont connues et on recherche h tandis que dans le cours g et h sont connues et on recherchait f !

Le mieux est de passer dans le domaine des fréquences L'intérêt du domaine fréquentielle est bien sûr de faciliter l'inversion mais aussi de se rappeler que même si les images f et g restent légèrement décalées en position, le calcul du spectre atténuera considérablement cette possible erreur.

$$f(x, y) * h(x, y) = g(x, y) \iff F(u, \nu) \cdot H(u, \nu) = G(u, \nu)$$

Après, il reste à faire l'opération inverse $H(u, \nu) = G(u, \nu)/F(u, \nu)$

Néanmoins cette dernière opération qui est un filtrage inverse pour estimer la psf est sensible à tous ce que l'on a dit en cours (chap. restauration, slide 8 – 9), on peut donc utiliser les deux premières astuces vues en cours pour éviter les divisions par zéro et les formes indéterminées 0/0 pour contraindre le problème de ce filtrage inverse.

<10 pts>

NOTA : Rechercher (comme solution de la PSF) comment s'étalerait un point lumineux fixe dans le lac (comme la lumière d'un lampadaire), c'est à dire sa réverbération n'est vraiment pas facile dans cette image! (on pourrait en trouver un, comme approximation d'un Dirac en haut et à droite de l'image) et de plus cette technique n'utiliserait pas toute l'information disponible de cette image dans laquelle on peut voir toute une image et son reflet dans l'eau. En utilisant la technique proposée, on obtient une technique d'estimation de la PSF qui est beaucoup plus robuste! Néanmoins j'ai donné 4 points si on me proposait cette solution simplifiée.

2.

Puisque le problème est parfaitement symétrique avec celui vu en cours (ici f et g sont connues et on recherche h tandis que dans le cours ou en déconvolution classique g et h sont connues et on recherchait f) on pourrait même utiliser le filtre de Wiener (éventuellement celui qui est itératif) qui est beaucoup mieux adapté pour faire une inversion. Il suffirait dans de remplacer $H(u, \nu)$ dans sa formule par $F(u, \nu)$ et $P_f(u, \nu)$ par $P_h(u, \nu)$!

On pourrait utiliser donc l'approche itérative vue en TP, et en remplaçant $H(u, \nu)$ dans sa formule par $F(u, \nu)$ et inversement et $P_f(u, \nu)$ par $P_h(u, \nu)$, on obtiendrait l'approche itérative du style point-fixe vue en TP suivante :

$$\hat{H}^{[n+1]}(u, \nu) = G(u, \nu) \left[\frac{F^*(u, \nu)}{|F(u, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{|\hat{H}^{[n]}(u, \nu)|^2}} \right]$$

avec $H^{[0]}(u, \nu)$ est donnée par une inversion simple $G(u, \nu)/F(u, \nu)$ ($= F(u, \nu)H(u, \nu)/F(u, \nu)$) en utilisant, comme en cours, un a priori sur le fait que H est à bande spectrale limitée (ou simplement en utilisant pour $|H^{[0]}(u, \nu)|^2$ une constante). On rappelle que les exposants indiquent l'itération.

<5 pts>

3.

Symétrie miroir verticale de l'image de l'UdM puis juxtaposition de ces deux images puis convolution de la partie (moitié) inférieure de l'image résultante par $h(x, y)$.

<4 pts>

4.

Il est raisonnable de penser qu'il existe une psf différente pour chaque étendue d'eau différente (car chaque vaguelette en période et hauteur est différentes) mais aussi pour chaque moment de la journée ; la forme des vaguelettes dépend du vent mais aussi de la marée et donc de position de la lune ! Mais aussi la psf dépendra de l'angle rasant de la caméra et de la qualité de l'eau (plus ou moins claire et opaque) qui affectera le degré de réflexion de chaque vaguelette. Bref une infinité de combinaisons engendrant une psf ou distorsion de réflexion différente pour chaque étendue d'eau.

<4 pts>

III. Dé-bruitage (18 pts)

Soit $g(x, y)$ une image naturelle en 256 niveaux de gris dégradée obtenue à partir de l'image parfaite (i.e., sans dégradation) $f(x, y)$ et du modèle de dégradation suivant :

$$g(x, y) = f(x, y) \cdot n(x, y)$$

dans lequel $n(x, y)$ est un bruit blanc Gaussien suivant une loi normale (i.e., Gaussienne) de moyenne $\mu = 1.0$ et de variance σ^2 inconnu, i.e., $n(x, y) \sim \mathcal{N}(\mu = 1.0, \sigma^2)$.

1. Indiquer dans quel intervalle approximatif évolueront les valeurs de $n(x, y)$.
<4 pts>
2. Voici une image (donc $g(x, y)$) qui a été dégradée par ce type de bruit.



Dans cet exemple, $n(x, y) \sim \mathcal{N}(\mu = 1.0, \sigma^2 = 0.02)$.

Quelle est la technique qui nous permettrait de transformer cette dégradation multiplicative en une dégradation additive ($N(x, y)$) qui s'ajouterait sur une image $\mathcal{F}(x, y)$, différente de $f(x, y)$ (et qui créerait une nouvelle image dégradée que l'on appellera $\mathcal{G}(x, y)$). Écrire le nouveau modèle de dégradation obtenue par cette technique.

<6 pts>

3. Trouvez et expliquez une méthode qui permettrait d'estimer (grossièrement) la variance σ^2 de ce bruit $n(x, y)$ à partir de $g(x, y)$ et une autre à partir de $\mathcal{G}(x, y)$.

<8 pts>

Réponse

1.

99.5% les valeurs de $n(x, y)$ évolueront approximativement dans l'intervalle $[1.0 - 3\sigma \quad 1.0 + 3\sigma]$.

<4 pts>

NOTA : Si on veut être précis, on dira soit l'intervalle : $[1.0 - 2\sigma \quad 1.0 + 2\sigma]$ avec 95% de confiance ou de chance et/ou l'intervalle : $[1.0 - 3\sigma \quad 1.0 + 3\sigma]$ avec 99.5% de confiance ou de chance.

2.

La première chose à faire est de rendre ce bruit multiplicatif en prenant le log népérien (ou un autre log) de tous les niveaux de gris. Du coup on se retrouve avec une dégradation additif du type :

$$\begin{aligned}\ln g(x, y) &= \ln[1 + f(x, y)] + \ln[n(x, y)] \\ \mathcal{G}(x, y) &= \mathcal{F}(x, y) + N(x, y)\end{aligned}\tag{1}$$

Le 1+ dans le log permet d'éviter les problèmes numériques de possible niveaux de gris nulles dans l'image.

<6 pts>

3.

(i) À partir de $\mathcal{G}(x, y)$ et de la dégradation devenue additive, une méthode possible consisterait à débruiter l'image avec la technique vue en TP (qui est très bonne pour du bruit additif) et ensuite estimer le bruit à partir de l'image bruitée et celle débruitée.

Une autre possibilité consiste à estimer dans une petite fenêtre W (par exemple de dimension 3×3) et centrée sur ce pixel) auquel on a enlevée sa moyenne puis mis en exponentiel toutes ses valeurs (modèle inverse de L'Eq. (1)) de calculer la variance empirique. La variance minimale obtenue sur l'ensemble de ces estimations serait une borne supérieur et une assez bonne estimation de la variance de ce log de bruit. En effet l'image comporte certainement quelques zones homogènes et lorsque W se fixera sur l'une d'entre elle, la variance obtenue sur cette zone sera une assez bonne estimation de la variance du bruit.

(ii) La deuxième méthode consiste à travailler avec l'image $g(x, y)$ directement. En calculant pour chaque pixel de cette image, dans une petite fenêtre (par exemple de dimension 3×3) centrée sur ce pixel, la valeur $|max - min|/moy$ contenue dans cette fenêtre (la valeur moy étant la moyenne des niveaux de gris dans cette petite fenêtre). Pour une zone (initialement) homogène dans l'image (même après être bruitée), cette valeur $|max - min|/moy$ serait plus petite que toute les autres et dans le cas d'une image sans bruit (puisqu'on suppose qu'il existe des zones de régions homogènes dans l'image), cette valeur $|max - min|/moy$ serait égal à zéro. Dans le cas de notre bruit multiplicatif $|max - min|/moy \approx 6\sigma$ (cf. première question) et donc une bonne approximation pour σ serait :

$$\hat{\sigma} \approx \left(\frac{|max - min|}{6 \times moy} \right)$$

<8 pts>

NOTA : Pour l'image présentée plus haut, on obtient $\hat{\sigma} \approx \left(\frac{|max-min|=54}{6 \times moy=68.22} \right) = 0.1319$ au lieu d'une valeur réelle de $\sigma = \sqrt{0.02} \approx 0.1414$ (en prenant des fenêtre d'estimation de taille 3×3 , soit approximativement seulement 6.7 % d'erreur d'estimation).

IV. Analyse Spectrale (24 pts)

Soit un signal $x(t)$ bruité dont on souhaite savoir si celui-ci contient une oscillation périodique de 1250 Hz ainsi que son amplitude (représentant de l'information utile) et pour lequel le physicien nous a donné 1000 échantillons discrétisés de $x(t)$ avec une période d'échantillonnage de 20 microsecondes ($\Delta T = 20 \times 10^{-6}$ seconde).

Le physicien vous donne un premier spectre en calculant la TFD de ces 1000 échantillons.

1. Énumérer (tous) les bon points et les mauvais points de la stratégie d'analyse spectrale utilisée par le physicien en les expliquant le plus clairement possible. Donner la modification évidente que le physicien aurait du faire pour arriver à une analyse spectrale avec une précision comparable à celle qu'il propose mais qui aurait demandé moins de coût calculatoire (quantifier aussi ce gain de coût calculatoire).

< 8 pts >

2. Supposons que l'on ne puisse changer les 1000 échantillons du physicien. Donner une technique qui permette d'améliorer la résolution fréquentielle (donc diminuer l'incertitude en fréquence) et possiblement l'analyse spectrale de ce signal et qui ne soit pas plus que cinq fois plus lente que la stratégie utilisée par le physicien.

< 8 pts >

3. Supposons que l'on ne puisse changer les 1000 échantillons du physicien. Donner une technique qui permette de diminuer beaucoup le bruit de cette analyse spectrale et qui finalement demanderait pas plus de coût calculatoire que celle proposée initialement par le physicien.

< 8 pts >

Réponse**1.****Bons points :**

- La fréquence d'échantillonnage de Shannon est respectée ($f_e = 50$ KHz) car celle-ci est au delà de deux fois la fréquence maximale de 1250 Hz que l'on doit détecter et
- la résolution fréquentielle $\Delta\nu$ est égale à $\Delta\nu = 1/T = 1/(1000 \times 20 \times 10^{-6}) = 50$ Hz qui est bien un sous multiple de la fréquence à détecter et permet de ne pas avoir des pics de fréquence faussement de-doublés.

Mauvais points :

- Le physicien aurait pu s'arranger pour discrétiser le signal avec un nombre de points qui soit une puissance de deux pour pouvoir utiliser une FFT (complexité algorithmique $O(N \log_2 N)$ au lieu d'une TFD de complexité algorithmique $O(N^2)$). Il aurait fallu simplement qu'il utilise 1024 échantillons pour une longueur du signal qui soit toujours de 20 milli-secondes (pour respecter une résolution fréquentielle $\Delta\nu$ qui soit toujours un sous multiple de la fréquence à détecter); c'est-à-dire pour une période d'échantillonnage de $T_e = 19.53125$ ms (ou $f_e = 51.2$ KHz) qui aurait donc toujours respecter le théorème de Shannon. Le calcul aurait été environ ≈ 100 fois plus rapide.
- Mais le plus mauvais point est sans doute que le physicien a oublié de pondérer le signal par une fenêtre d'acquisition plus intéressante qu'une simple fenêtre rectangulaire. Ce faisant, il dégrade le spectre par des artefacts ou du bruit hautes fréquences qui sont dus aux possibles discontinuités existant lorsque le signal se périodise inévitablement par l'utilisation implicite de la version discrète de la Transformée de Fourier. Le physicien aurait du pondérer ces 1000 (ou ces 1024) échantillons par une fenêtre de Hanning qui aurait doucement ramené la première valeur du signal et la dernière valeur du signal $x(t)$ sur l'axe d'amplitude nulle.
- On pourrait ajouter aussi que l'incertitude fréquentielle (± 25 Hz) est aussi un peu grande (cf. question suivante).

<10 pts >

2.

Pour améliorer la résolution fréquentielle ou diminuer l'incertitude en fréquence, il faut avoir recours à la technique du zéro padding. Pour passer à une résolution fréquentielle de $\Delta\nu = 25\text{Hz}$ donc diminuer l'incertitude en fréquence (de chaque bin fréquentielle) de moitié ($\pm 12.5\text{ Hz}$), il faut, après avoir pondéré les 1000 échantillons par une fenêtre de Hanning de compléter ces 1000 échantillons par 1000 échantillons de valeurs nulle. Dans cette situation, la pondération par une fenêtre de Hanning sur les 1000 premiers échantillons est indispensable, sinon on va créer une discontinuité au 1000 ième échantillon qui n'existe pas dans le signal et qui altérerait le spectre. Avec cette stratégie, on double donc le nombre d'échantillons et donc puisque la TFD est de complexité $O(N^2)$, on quadruple le temps d'exécution mais on reste dans les limites de ce que l'on demande, à savoir de proposer une stratégie qui demande moins que cinq fois plus de calcul que celle proposée initialement. Comme l'incertitude en fréquence est diminuée de moitié, tout en laissant $\Delta\nu$ être un sous multiple de la fréquence à détecter, la variance du bruit dans chaque bin fréquentiel sera approximativement aussi diminuée de moitié.

<8 pts>

3.

Pour diminuer drastiquement le bruit d'une analyse spectrale, on a vu en Travaux Pratiques, qu'il fallait faire une stratégie de périodogramme moyennée. Prenons toujours une résolution fréquentielle être un sous multiple de la fréquence à détecter, par exemple $\Delta\nu = 250\text{ Hz}$ correspondant à des blocs de signal de longueur 0.004 seconde. Puisque on doit conserver le T_e du physicien, cela correspond à des blocs de 200 échantillons. Utilisons un overlapping de 50%, nous aurons donc un périodogramme moyenné utilisant 9 blocs de 200 échantillons s'overlappant de 50% pour un spectre moins bruité mais avec une résolution ou division (ou bin) fréquentielle ou incertitude fréquentielle 10 fois plus grande mais étant toujours un sous multiple de la fréquence à détecter. La théorie nous dit que la variance du bruit sera divisée par 9 par cette stratégie (avec un effet de réduction de bruit assez comparable à ce qui a été constaté en TP). Concernant le gain en coût calculatoire, puisque la TFD utilise des (précisément 9) blocs de 200 échantillons au lieu d'un seul bloc de 1000 échantillons, on observera un gain de calcul de $\approx 25/9 \approx 2.7$, c-a-d ; un peu plus que deux fois plus rapide (en négligeant le moyennage final de la stratégie du périodogramme moyenné) par rapport à la stratégie initiale proposée par le physicien.

<8 pts>

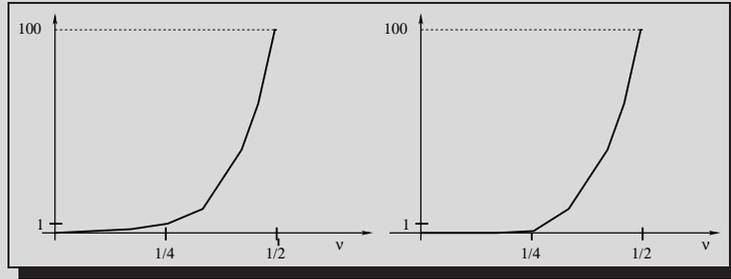
NOTA : Une solution possible et différente serait de calculer une auto-corrélation du signal en premier lieu. On rappelle que l'auto-corrélation du signal transforme celui-ci en un signal qui comporte la ou les mêmes fréquences mais avec moins de bruit. La TF de cette autocorrélation permettrait de trouver la densité spectrale de puissance du signal qui serait ainsi moins bruitée.

V. Filtre Numérique et Questions Relatives au TP : *Filtres RIF et RII* (28 pts)

1. Dans la question “*Suppression d’une composante sinusoïdale*” du TP : Filtres RIF et RII

- (a) Nous avons utilisé le fichier SOUNDFILE.WAV dans lequel on pouvait entendre (avec un signal échantillonné à 11025 Hz) la réplique culte de Terminator : “*hasta la vista, baby*”.

On aimerait dans cette question faire un filtre temps réel dont le but est d’amplifier (beaucoup) les hautes fréquences de ce signal de parole pour le rendre méconnaissable. On propose de tester deux filtres temps réel dont le premier est constitué de un zéro / un pôle et le deuxième constitué de 3 zéros / 1 pôle et dont les deux représentations fréquentielles sont :



Donner le diagramme pôle/zéro de chacun de ces deux filtres, puis leur fonction de transfert respectif, puis finalement indiquer l’équation aux différences associée à ces deux filtres numériques temps réel.

<12 pts>

- (b) On aimerait maintenant faire, toujours en temps réel, un filtre permettant de transformer ou déguiser sa voix et la rendre compréhensible mais non identifiable (locuteur non identifiable), par exemple pour faire des blagues par téléphone ou pour “pirater” de façon amusante un micro-(phone) ou tout autre dispositif *via* lequel la voix numérisée est véhiculée ou pour modifier n’importe quel voix en temps réel et tester avant tout ce filtre sur notre fichier SOUNDFILE.WAV.

Proposer deux solutions (différentes) dont l’une permettrait de créer de l’aliasing à peu de frais sur le signal de parole et donc de le modifier et l’autre utiliserait une technique qui serait très proche d’une technique (utilisé pour faire autre chose!) que l’on a déjà vu dans l’examen INTRA de cet année.

<6 pts>

2. Dans la question “*Égalisation*” du TP : Filtres RIF et RII

- (a) Nous étions confronté à un canal de transmission dont la fonction de transfert était :

$$C(z) = (1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})$$

Donner la réponse de ce canal de transmission à un signal d’entrée de type rampe (solution générale $y(n), \forall n$), en utilisant la fonction de transfert $C(z)$ et la transformée en Z (TZ) inverse.

<5 pts>

- (b) Trouver la TZ du signal $x(n)$ qui serait constitué de quatre échantillons d’amplitude 1 (temps positif) suivi de quatre échantillons d’amplitude 0 puis de quatre échantillons d’amplitude 1, etc. et indéfiniment. Indiquez (sans la calculer) quel serait la TZ à inverser pour avoir la réponse (solution générale $y(n), \forall n$) de ce canal de transmission à ce signal d’entrée.

<5 pts>

Réponse

1.(a)

$$\text{pôle}=-0.99/\text{zéro}=1 \triangleright H(z) = \frac{z-1}{z+0.99} \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} y(n) = -0.99y(n-1) + x(n) - x(n-1)$$

<6 pts>

$$\text{pôle}=-0.99/3 \text{ zéros} = \{1, j, -j\} \triangleright H(z) = \frac{(z-1)(z-j)(z+j)}{(z+0.99)}$$

$$\text{<6 pts> } H(z) \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} y(n) = -0.99y(n-1) + x(n+3) - x(n+2) + x(n+1) - x(n)$$

NOTA : Pour entendre les fichiers traités, cliquer sur les hyperliens suivants :

Fichier son original : S0.wav. Première technique : S1.wav. Deuxième technique : S2.wav.

1.(b)

La première consiste à sous échantillonner le signal par un facteur entier, par exemple dans notre cas, où le signal est échantillonné à 11025 Hz par un facteur 6. Cette opération peut se faire en temps réel en prenant un échantillon sur 6 et le phénomène d'aliasing qui est du au repliement spectral des fréquences au delà de 1800 Hz vont s'additionner aux fréquences négatives du spectre créant des artefacts permettant de modifier la voix.

La deuxième technique consiste à mettre un échantillon sur deux du signal vocal à zéro. Cela pour effet de dupliquer le spectre en $fe/2$ et l'ajout de ce spectre avec celui centré à la fréquence zéro aura pour effet de modifier la voix. Pour augmenter cet effet, il suffit de mettre par exemple, 3 échantillons sur 4 avec une amplitude nulle, cela pour effet de dupliquer le spectre tous les $fe/8$.

<8 pts>

NOTA -1- : Pour entendre les fichiers traités, cliquer sur les hyperliens suivants :

Fichier son original : S0.wav. Première technique : S3.wav. Deuxième technique : S4.wav.

NOTA -2- : La première technique a le mérite d'être simple mais aussi d'être difficilement inversible (à cause du bruit d'aliasing ainsi créé) comparativement aux techniques sonores (déterministes) vues dans le dernier TP.

2.(a)

• À partir de la fonction de transfert $C(z)$, et pour $x(n) = n\mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = z/(z-1)^2$, on obtient :

$$\text{si } X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad Y(z) = \frac{(z-2)(z-1/3)}{z^2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{(z-2)(z-1/3)}{z(z-1)^2} = \frac{2/3}{z} + \frac{-2/3}{(z-1)^2} + \frac{1/3}{(z-1)}$$
$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$
$$y(n) = 2/3\delta(n-1) - (2/3)(n-1)\mathcal{U}(n-1) + (1/3)\mathcal{U}(n-1)$$

Le coefficient $A = (1/3)$ à été trouvé en donnant de part et d'autre de l'égalité la valeur $z = -1$ (conduisant à l'équation $-1 = (-2/3) + (-2/12) - (A/2)$).

• Une deuxième façon, plus facile que l'on peut appliquer seulement ici car $C(z)$ est associé à une équation non récursive est :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - 2z^{-1})(1 - 1/3z^{-1}) = 1 - (7/3)z^{-1} + (2/3)z^{-2}$$
$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$
$$y(n) = n\mathcal{U}(n) - (7/3)(n-1)\mathcal{U}(n-1) + (2/3)(n-2)\mathcal{U}(n-2)$$

NOTA : On vérifie que les deux méthodes conduisent bien sur au même signal numérique! Dans les deux cas, on trouve que $y(n) = \{0, 1, (-1/3), -1, \dots\}$.

<5 pts>

2.(b)

$$\begin{aligned} X(z) &= (z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) + (z^{-8} + z^{-9} + z^{-10} + z^{-11}) + (z^{-16} + z^{-17} + z^{-18} + z^{-19}) + \dots \\ &= (z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) \cdot \frac{1 - (z^{-8})^\infty}{1 - z^{-8}} \\ &= \frac{z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-8}} \end{aligned}$$

et pour trouver la solution générale $y(n), \forall n$ de la réponse de canal de transmission à ce signal d'entrée, il faudrait inverser :

$$z^{-1} \left(\frac{(z-2)(z-1/3)}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z^{-8}} \right) = y(n)$$

<5 pts>

NOTA : Si on prend la deuxième façon précédente de trouver la réponse à un signal d'entrée $x(n)$, cela conduirait donc à inverser $Y(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} &= (1 - 2z^{-1})(1 - 1/3z^{-1}) = 1 - (7/3)z^{-1} + (2/3)z^{-2} \\ Y(z) &= X(z) - (7/3)z^{-1}X(z) + (2/3)z^{-2}X(z) \end{aligned}$$

avec $X(z)$ donné à la question précédente.