



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *25/02/2019*

I	Transformée de Fourier (55 pts)
II	Spectres et Aliasing (33 pts)
III	Filtrage (32 pts)
Total	120 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (55 pts)

Soit donc $f(x)$ un signal et $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ sa TF ou son spectre (*i.e.*; $f(x) \Leftrightarrow F(\nu)$).

1. (a) Énumérer **toutes** les propriétés de $F(\nu)$, la TF de la fonction $f(x) = x$ (sans la calculer).
<5 pts>
 - (b) Rappeler pourquoi on n'aurait pas pu calculer la TF de cette fonction $f(x) = x$ en utilisant directement la définition de la TF utilisant la formule intégrale.
<5 pts>
 - (c) Trouver la TF de la fonction $f(x) = x$.
<5 pts>
2. Le but de ce premier exercice est de calculer la Transformée de Fourier (TF) de la fonction ou du signal 1D : $f(x) = x^n$ (où n est un entier positif), de trois façons différentes. Attention, pour la troisième façon (question (c)), vous allez trouver une formule légèrement différente mais peut-être mathématiquement équivalente de la première (question (b)) et deuxième façon (question (c)) car on a, dans notre espace ou celui de Fourier; l'équivalence $x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$ ou encore $\nu^n \delta^{(n)}(\nu) = (-1)^n n! \delta(\nu)$ que l'on peut considérer/utiliser.
- (a) La première façon en disant que $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ (n fois multiplié) et en projetant le tout dans l'espace fréquentielle (on rappelle aussi que $\delta'(\nu) * \delta'(\nu) = \delta''(\nu)$).
<5 pts>
 - (b) La deuxième façon en utilisant la propriété (vue en cours) de la TF de $f^{(n)}(x)$ (la dérivée n -ième de $f(x)$) suivi de la propriété duale.
<5 pts>
 - (c) La troisième façon en disant que : $\mathcal{F}\left[(f(x)=x^n)'\right] = 2\pi j\nu \underbrace{F(\nu)}_{\mathcal{F}[x^n]}$ et en itérant récursivement.
<10 pts>
3. Dans les tables de Transformée de Fourier (TF), on trouve facilement : $\mathcal{F}[\text{sgn}(x)] = \frac{1}{j\pi\nu}$
où $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe ($\text{sgn}(x) = x/|x|$, *i.e.*, égale à 1 pour tout $x > 0$ et -1 pour tout $x < 0$ et égal à 0 pour $x = 0$).
- (a) Trouver à quoi est égale la dérivée de la fonction signe en vous aidant de la TF et de ses propriétés (notamment la propriété de la TF de la dérivée d'une fonction).
<5 pts>
 - (b) En utilisant la question précédente, trouver à quoi est égale la dérivée de la fonction $g(x)$ avec : $g(x) = \text{sgn}(x) \cdot \exp(-x^2)$
<5 pts>
4. Exprimer la propriété d'imparité d'une fonction (1D) dans notre espace spatial puis projeter cette propriété dans le domaine fréquentiel pour retrouver une propriété connue du spectre lorsque la fonction est initialement impaire dans notre espace spatial.
<5 pts>
5. En cours on a vu, sans toutefois le démontrer mathématiquement, que la TF d'un peigne de Dirac, dans le domaine spatial, avec des Diracs espacés de $T = 1$, était un peigne de Dirac, dans le domaine fréquentiel, avec des Diracs espacées de $T = 1$:

$$\text{III}_{T=1}(x) \Leftrightarrow \text{III}_{\frac{1}{T}=1}(\nu)$$

Comment aurait-on pu prévoir qualitativement ce résultat ? *i.e.*, identifier toutes les propriétés de la TF qui auraient pu justifier qualitativement cette relation.

<5 pts>

Réponse

1.(a)

La fonction $f(x) = x$ est réelle et impaire donc sa transformée $F(\nu)$ sera imaginaire pure et impaire. On pourrait dire aussi que la fonction étant non périodique, son spectre sera continu mais comme $f(x) = x$ est une fonction très lisse (*i.e.*, *smooth* ou sans discontinuité de la dérivée (avec une pente constante)), la reconstruction de cette fonction se fera avec très très peu d'harmoniques, *i.e.*, mathématiquement on s'attend à voir une TF dont le support fréquentiel est très petit. En fait certainement aussi petit que la fonction constante $f(x) = 1_{(x)}$ ($1_{(x)} \Leftrightarrow \delta(\nu)$) dont le spectre ($\delta(\nu)$) est continue en un seul point!

<5 pts>

1.(b)

On n'aurait pas pu calculer cette TF à partir de la définition directe de la TF utilisant la formule intégrale car la fonction $f(x) = x$ n'est pas carrée ou absolument sommable (ou intégrable) sur \mathbf{R} .

<5 pts>

1.(c)

- Une méthode consisterait à se rappeler que $\mathcal{F}[\delta'(x)] = 2\pi j\nu$ et donc, par la propriété duale que :

$$\mathcal{F}[x] = -\frac{1}{2\pi j} \delta'(\nu) = \frac{j}{2\pi} \delta'(\nu)$$

- Une autre méthode consisterait à se rappeler que $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$ et donc, en remplaçant $f(x) = \delta(x) \Leftrightarrow F(\nu) = 1$ et en utilisant la propriété duale, on obtiendrait la même chose.

<5 pts>

NOTA : On vérifie bien que le spectre $F(\nu) = \frac{j}{2\pi} \delta'(\nu)$ obtenu est imaginaire pur et impair, avec un support fréquentiel très petit (Q1.(a)) puisque $F(\nu)$ est continu en un seul point.

2.(a)

- En utilisant ce que l'on fait précédemment et la propriété de convolution du Dirac ($\delta'(x) * f(x) = f'(x)$), on obtient :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{j}{2\pi} \delta'(\nu) * \frac{j}{2\pi} \delta'(\nu) * \dots * \frac{j}{2\pi} \delta'(\nu)}_{n \text{ fois}} = \frac{j^n}{(2\pi)^n} \delta^{(n)}(\nu) \quad \text{ou} \quad = \left(\frac{-1}{2\pi j}\right)^n \delta^{(n)}(\nu)$$

<5 pts>

2.(b)

En utilisant $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (2\pi j\nu)^n F(\nu)$ (formule du cours) et la propriété duale et en remplaçant $f(x) = \delta(x) \Leftrightarrow F(\nu) = 1$, on obtient la même chose :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f^{(n)}(x)] &= (2\pi j\nu)^n F(\nu) \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\nu)] = (-2\pi j x)^n f(x) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}[x^n] = \frac{\delta^{(n)}(\nu)}{(-)^n (2\pi)^n (j)^n} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}[x^n] = \frac{(j)^n}{(-)^n (2\pi)^n (j)^{2n}} \delta^{(n)}(\nu) = \frac{(j)^n}{(-)^n (2\pi)^n (-)^n} \delta^{(n)}(\nu) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}[x^n] = \frac{j^n}{(2\pi)^n} \delta^{(n)}(\nu) \quad \text{ou} \quad = \left(\frac{-1}{2\pi j}\right)^n \delta^{(n)}(\nu) \end{aligned}$$

<5 pts>

2.(c)

Soit $f(x)$ un signal et $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ sa TF ou spectre ($f(x) \Leftrightarrow F(\nu)$).

$$\mathcal{F}[(f(x)')] = 2\pi j\nu F(\nu) \quad \mathcal{F}[(x^n)'] = 2\pi j\nu \mathcal{F}[x^n]$$

Maintenant itérons récursivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x^n] &= \frac{\mathcal{F}[n x^{n-1}]}{(2\pi j\nu)} = \frac{n \mathcal{F}[(n-1)x^{n-2}]}{(2\pi j\nu)^2} = \frac{n(n-1) \mathcal{F}[(n-2)x^{n-3}]}{(2\pi j\nu)^3} = \dots = \frac{n! \mathcal{F}[x^0]}{(2\pi j\nu)^n} = \frac{n! \mathcal{F}[1]}{(2\pi j\nu)^n} \\ &= \frac{n! \delta(\nu)}{(2\pi j\nu)^n} \end{aligned}$$

<10 pts>

NOTA : On vérifie bien que l'on obtient bien la même chose précédemment en prenant en compte l'égalité (valable dans les deux espaces) : $x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$ ou encore $\nu^n \delta^{(n)}(\nu) = (-1)^n n! \delta(\nu)$

3.(a)

En utilisant la propriété $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu \cdot F(\nu)$ et le fait que : $\text{sgn}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{j\pi\nu}$ on trouve facilement :

$$\begin{aligned} \text{sgn}'(x) &\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} 2\pi j\nu \cdot \frac{1}{j\pi\nu} = 2 \\ &= 2\delta(x) \end{aligned}$$

<5 pts>

NOTA : On peut aussi dire que $\text{sgn}'(x) = \delta(x/2)$ car on a la relation $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ (avec $a = 1/2$ dans notre cas) (et cette relation à déjà été vu et démontré dans un ancien examen).

3.(b)

En utilisant la formule $(u_{(x)} \cdot v_{(x)})' = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} + v'_{(x)} \cdot u_{(x)}$ et la question précédente on trouve :

$$\left(\text{sgn}(x) \cdot \exp(-x^2) \right)' = 2\delta(x) \cdot \exp(-x^2) - 2x \exp(-x^2) \cdot \text{sgn}(x) = 2\delta(x) - 2x \text{sgn}(x) \cdot \exp(-x^2)$$

<5 pts>

4.

On se souvient que tout ce qui est retourné devient conjugué dans l'autre espace donc :

$$\begin{aligned} \text{Imparité} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) &\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F^*(\nu) = -F(\nu) \\ R(\nu) - jI(\nu) &= -R(\nu) - jI(\nu) \Leftrightarrow \text{Spectre imaginaire pur} \end{aligned}$$

<5 pts>

5.

Déjà on sait que comme $\mathbb{I}\mathbb{I}_{T=1}(x)$ est réelle est paire, son spectre doit être réel et paire. De plus comme il existe beaucoup de discontinuités dans $\mathbb{I}\mathbb{I}_{T=1}(x)$, son spectre doit avoir un support fréquentiel très grand. De plus on sait que nécessairement tout ce qui est périodique dans un domaine est discrétisée dans l'autre ; *i.e.*, périodique \Leftrightarrow discret et inversement. Donc puisque $\mathbb{I}\mathbb{I}_{T=1}(x)$ est périodique et discret (en fait c'est comme si on avait pris des échantillons régulièrement espacés de la fonction $f(x) = 1_{(x)}$), son spectre est aussi forcément périodique et discret.

Si on combine toutes ces propriétés, on n'est pas étonné de retrouver la relation $\mathbb{I}\mathbb{I}_{T=1}(x) \Leftrightarrow \mathbb{I}\mathbb{I}_{T=1}(\nu)$.

De plus, on peut encore valider cette relation en remarquant que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{I}\mathbb{I}_T(x) = \delta(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{I}\mathbb{I}_{1/T}(\nu) = 1_{(\nu)}$$

$$\text{et, } \lim_{T \rightarrow 0} \mathbb{I}\mathbb{I}_T(x) = 1_{(x)} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \lim_{T \rightarrow 0} \mathbb{I}\mathbb{I}_{1/T}(\nu) = \delta(\nu)$$

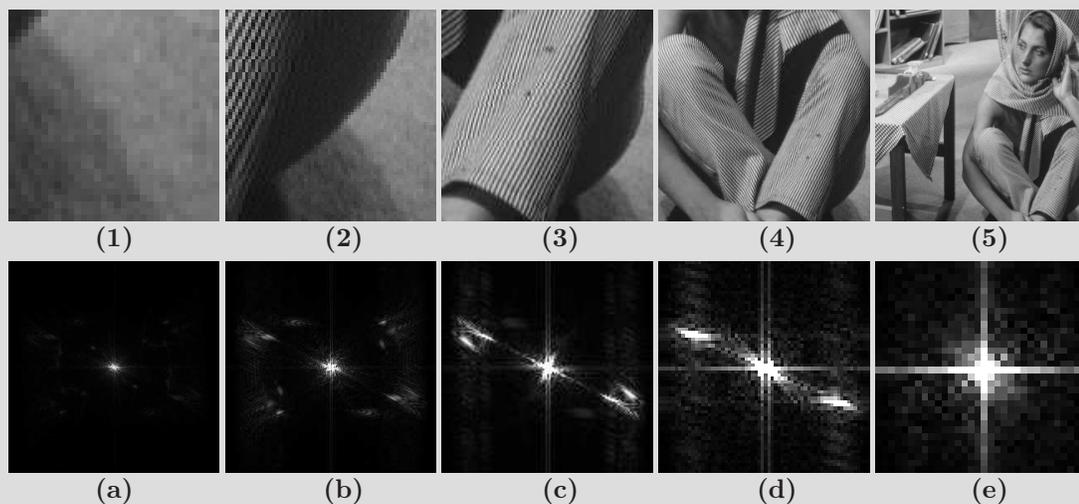
<5 pts>

II. Spectres et Aliasing (33 pts)

1. Les images (1) à (5) de la Figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier (calculé par la FFT puis recentré au centre de l'image et après avoir rehaussé légèrement les hautes fréquences comme en TP) des différentes imagerie (1) à (5) prises sur l'image BARBARA de taille 512×512 (à partir du bord inférieur droit et avec une taille chaque fois deux fois plus grande).

Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.

<25 pts>



2. Expliquer, en utilisant les termes que l'on a utilisés en cours pourquoi on échantillonne de la musique numérique avec une fréquence d'échantillonnage de 44 KHz. Donner deux autres exemples où l'on utilise le théorème de Shannon pour numériser correctement.

<8 pts>

Réponse

1.

On pourrait facilement, tout de suite, classer [1 – e] et [2 – d] car on voit que ses images ont le même nombre de pixels que leur transformée respective. Si on a de bon yeux, puisque il y a le même nombre de pixels entre le signal et sa TFD on a aussi immédiatement [3 – c], [4 – b] et [5 – a] Mais même sans cela on peut arriver au bon classement.

Le plus simple est de procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident :

- [3 – c] :

L'image est composée presque entièrement de deux régions texturales faites de lignes sombres sur fond clair allant dans la direction diagonale gauche mais dans deux directions légèrement différentes créant ainsi deux petites discontinuités diagonales droites associées dans deux directions légèrement différentes dans son spectre.

- [1 – e] :

Puisque l'énoncé nous dit que l'image est réduite à chaque fois d'un facteur deux, on en déduit que l'image (1) est de taille 32×32 . Son spectre sera aussi de taille 32×32 ce qui est caractéristique du spectre de l'image (e). La transition verticale et horizontale est due aux discontinuités créées par la périodicité de l'image en

ligne et colonne. Elle est très visible car l'image est petite. Il faut se rappeler que plus l'image est petite, et plus les discontinuités créées par la périodicité de l'image en ligne et colonne biaiseront le spectre donné par la TFD (cf question précédente). On peut apercevoir une petite discontinuité diagonale gauche dans le spectre qui est due à la transition diagonale droite de l'ombre qui semble partager l'imagette en deux (dans le sens de la diagonale).

- $[4 - b]$:

En plus de la tache au centre du spectre, on peut voir plusieurs taches différentes dans les coins supérieurs et inférieurs diagonales droites et gauches du spectre montrant qu'il existe dans l'image un mélange de plusieurs types de textures dans les directions opposées.

- $[5 - a]$:

L'image possède plein de textures différentes et toute cette information est résumée avec le pouvoir compressif du calcul de la TF par une tache au centre de l'image.

- $[2 - d]$:

La transition diagonale sombre claire et les lignes sombres sur fond clair allant dans cette même direction diagonale créent la transition et les deux taches dans la direction opposée dans le spectre. La transition verticale et horizontale est due aux discontinuités créées par la périodicité de l'image en ligne et colonne.

<25 pts>

2.

On échantillonne en fait en respectant le théorème de Shannon, *i.e.*, à deux fois la fréquence maximale ($f = 22$ Khz) audible par une oreille humaine non experte. De ce fait, il existera donc du repliement spectral mais qui n'interviendra qu'au-delà d'une fréquence auquel l'individu non (musicalement) expert ne pourra entendre ou des très hautes fréquences qui auront disparues si un très bon filtre anti-repliement a été fait. Un chef d'orchestre ou une oreille musicale entend donc sur une musique échantillonnée à 44 Khz des très hautes fréquences parasites provenant du repliement spectral si son oreille entend au-delà de 22 Khz ou si un très bon filtre anti-repliement a été fait, pas autant de hautes fréquences (harmoniques) qu'une musique non échantillonnée.

On peut échantillonner aussi des images, des signaux sismiques, gravitationnelles (récemment), des signaux de chants de baleine, etc. en essayant de respecter le théorème de Shannon.

<8 pts>

III. Filtrage (32 pts)

1. Soit $f(x)$ un signal 1D et $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ sa TF ou son spectre ($f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$).
On réalise le filtrage fréquentielle suivant sur $F(\nu)$, le spectre d'un signal $f(x)$:

$$F_{filt}(\nu) = (2\pi j \nu)^{0.5} F(\nu)$$

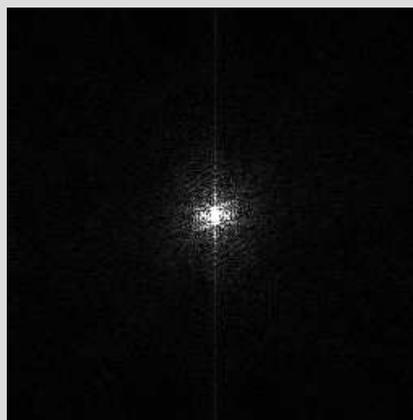
. Expliquer conceptuellement (qualitativement) ce que l'on va obtenir si on revient dans notre domaine spatial, *i.e.*, si on calcule maintenant : $\mathcal{F}^{-1}[F_{filt}(\nu)]$?

<10 pts>

2. Soit $f(x, y)$ une image comme celle ci-dessous de Joseph Fourier (image ci-dessous) et $F(\nu, u) = \mathcal{F}[f(x, y)]$ sa TF ou son spectre (*i.e.*, son module recentré au centre de l'image) ($f(x, y) \rightleftharpoons F(\nu, u)$).

On réalise le filtrage spatial suivant sur $f(x, y)$ qui consiste à mettre à zéro tous les niveaux de gris associés aux pixels situés une ligne sur deux et une colonne sur deux. Trouver quel sera le spectre de cette nouvel image. Justifiez le mieux possible votre réponse.

<8 pts>



3. À partir de l'image précédente *i.e.*, $f(x, y)$ pour laquelle on a mis une ligne et colonne sur deux à zéro), Trouver quel doit être l'opération fréquentielle qui permettrait de, après une TF inverse, de retrouver l'image $f(x, y)$ initiale non dégradée. Indiquez d'une part quel serait la condition pour que cela soit possible et l'opération fréquentielle qui permettrait de le faire. Dans cette opération, n'oublier aussi d'intégrer le théorème de Parseval (conservation de l'énergie dans les deux espaces).

<14 pts>

Réponse

1.

En premier lieu, on peut dire que c'est un filtrage fréquentiel de la famille des filtres passe-haut avec une réponse fréquentielle $(2\pi j\nu)^{0.5} \propto 2.5\nu^{0.5}$ qui va atténuer et annuler les basses fréquences (pour $\nu = 0$ annuler) et amplifier les hautes fréquences (pour $\nu = 0.5$, fréquence numérique la plus grande, les amplifier de ≈ 1.7).

Si maintenant on se réfère à la définition de dérivation de la TF, ce filtrage fréquentielle va nous permettre d'obtenir, dans notre domaine spatial, la dérivée d'ordre (non entière ou flottante) $1/2$ du signal $f(x)$ que l'on pourrait modéliser ou noté mathématiquement de la façon suivante :

$$\mathcal{F}^{-1}[(2\pi j\nu)^{0.5} F(\nu)] = \frac{\partial^{1/2} f(x)}{\partial x^{1/2}}$$

Si on voulait retrouver l'opération spatiale qui nous conduise à cette dérivée fractionnaire d'ordre 0.5 et bien cela correspondrait à la convolution de l'image $f(x, y)$ suivant $f(x, y) * \mathcal{F}^{-1}(2\pi j\nu)^{0.5}$ mais il n'est pas évident (et peut être impossible!) de trouver : $\mathcal{F}^{-1}[(2\pi j\nu)^{0.5}]$ (mais en fait cela n'a aucune importance car on peut réaliser facilement cette opération dans le domaine fréquentielle).

<10 pts>

NOTA : La théorie de la TF nous permet aussi d'étendre la notion de dérivée fractionnaire qui peut être vue mais pas calculé dans notre espace spatio-temporelle (mais facilement calculable dans l'espace des fréquences!) à la notion de dérivée (éventuellement) fractionnaire complexe qui peut aussi se calculer facilement dans l'espace des fréquences :

$$\mathcal{F}^{-1}[(2\pi j\nu)^{(a+jb)} F(\nu)] = \frac{\partial^{(a+jb)} f(x)}{\partial x^{(a+jb)}}$$

2.

▷ Qualitativement, l'opération faite dans le domaine spatial est une discrétisation d'un échantillon sur deux (sur les lignes et colonne) de l'image. Donc, puisque la discrétisation dans un espace équivaut à la périodisation dans l'autre espace, on aura une périodisation du motif spectral dans l'espace fréquentiel suivant les fréquences lignes et fréquences colonnes (toute les moitiés d'image).

▷ Mathématiquement supprimer une ligne et colonne sur deux, correspond sur l'image $f(x, y)$ à l'opération suivante (en considérant x (la colonne) et y (la ligne) et la correspondance $x \rightleftharpoons u$, et $y \rightleftharpoons \nu$:

$$f(x, y) \cdot \left\{ \prod_{T_x=2, T_y=2} (x, y) \right\} \stackrel{\text{TFD}}{\rightleftharpoons} F(u, \nu) * \left\{ \prod_{T_u=\frac{1}{2}, T_\nu=\frac{1}{2}} (u, \nu) \right\}$$

Le motif spectral (*i.e.*, le spectre de $f(x, y)$) va donc se répéter toute les fréquences numériques $1/T = 1/2$ en coordonnée spectrale ligne et spectrale colonne, c'est-à-dire toute les moitiés de l'image en u (fréquences spatiales colonnes) et (fréquences spatiales lignes) on obtiendra :



<8 pts>

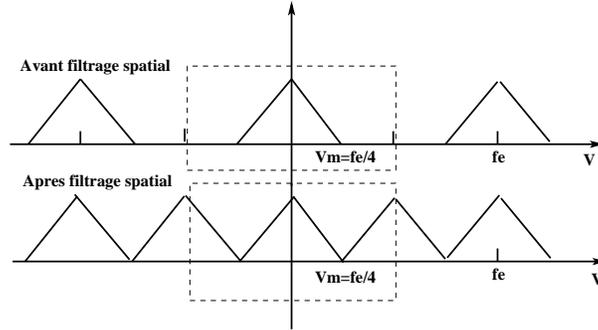
3.

Pour revenir à l'image initiale $f(x, y)$, il faut donc retrouver le spectre de $f(x, y)$ non dupliqué, donc supprimer cette duplication de $F(u, \nu)$ en ligne et colonne. L'opération fréquentielle que l'on doit donc faire

est un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure idéalement placée à la fréquence numérique en ligne et colonne de $u = v = 0.25$.

Pour que ce filtre passe-bas, retrouve parfaitement (c-a-d sans altération) le spectre de $f(x, y)$, (c-a-d $F(u, v)$), il faut que la fréquence maximale du signal en ligne et colonne soit inférieure à la fréquence numérique $u = v = 0.25$.

Donc, pour l'image originale $f(x, y)$, il faut que l'on échantillonne à au moins 4 fois la fréquence maximale contenue dans l'image pour que cette opération fréquentielle (filtrage passe-bas idéal sans dégradation du motif spectral initial) soit possible (cf. Fig. ??).

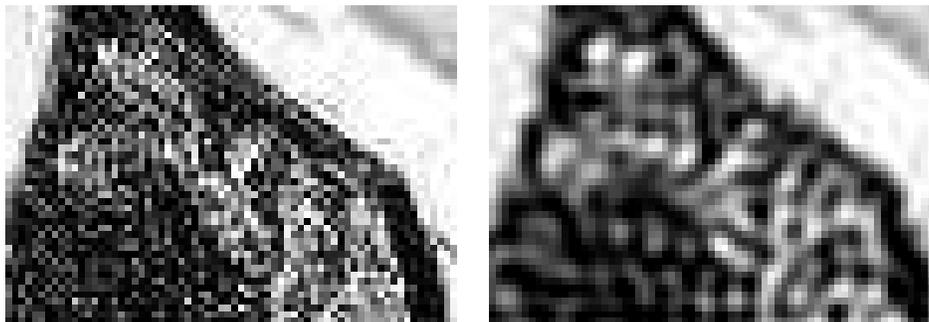


De plus, le fait d'annuler un échantillon sur deux de $f(x, y)$ va réduire l'énergie du signal par deux. Une fois que l'on aura fait le filtrage passe-bas et la TF inverse, on aura le même signal qu'au départ mais avec une amplitude deux fois moins grande (donc une énergie 4 fois moins grande). On devra donc multiplier par quatre l'intensité de l'image filtrée obtenue.



<14 pts>

NOTA : Si on regarde de près la reconstruction (ou restauration) obtenue, on s'aperçoit que la condition énoncée précédemment ("il faut que l'on échantillonne à au moins 4 fois la fréquence maximale contenue dans l'image pour que cette opération fréquentielle"), n'a sans doute pas été respecté car il y a certaines zones hautes fréquences où la reconstruction est légèrement différente et moins détaillée que celle de l'image originale.



Portion très agrandie de l'image initiale et de l'image finale