



DIRO  
IFT 3205

## EXAMEN FINAL

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle  
<http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205>  
*e-mail: mignotte@iro.umontreal.ca*

**Date:** 26/04/2023

I .....	Temps différé : Analyse Spectrale (40 pts)
II .....	Temps réel : Filtrage Numérique (70 pts)
Total .....	110 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

# Introduction

## Les ondes cérébrales

Les ondes cérébrales sont en fait étudiées par les neuroscientifiques depuis près d'un siècle dans une science que l'on appelle l'électroencéphalographie.

Le cerveau a des milliards de neurones, et chaque neurone individuel se connecte (en moyenne) à des milliers d'autres. La communication se fait entre eux par de petits courants électriques qui voyagent le long des neurones et à travers d'énormes réseaux de circuits cérébraux. Lorsque tous ces neurones sont activés, ils produisent des impulsions électriques, donnant naissance à une onde électromagnétique (ondulant en dehors du cerveau) et qui se nomme communément *onde cérébrale*.

Lorsque de nombreux neurones interagissent de cette manière en même temps, cette activité est suffisamment forte pour être détectée même en dehors du cerveau. En plaçant des électrodes sur le cuir chevelu, cette activité peut être amplifiée, analysée et visualisée. C'est l'électroencéphalographie, ou EEG, acronyme scientifique signifiant simplement ÉlectroEncéphaloGramme et désignant un graphique cérébral électrique (encéphale, le cerveau, est dérivé du grec ancien *enképhalos*, signifiant *dans la tête*).

L'une des façons dont ces *ondes cérébrales* EEG transmettent des informations réside dans leur fréquence. Sous cet angle, les ondes cérébrales se déclinent, par de nombreux praticiens, ou se décomposent (comme la somme d'ondes indépendantes classées) en cinq catégories<sup>1</sup>, chacune correspondant à une lettre grecque et correspondent à différents états de pensée ou d'expérience (cf. Fig. 1)<sup>2</sup>.

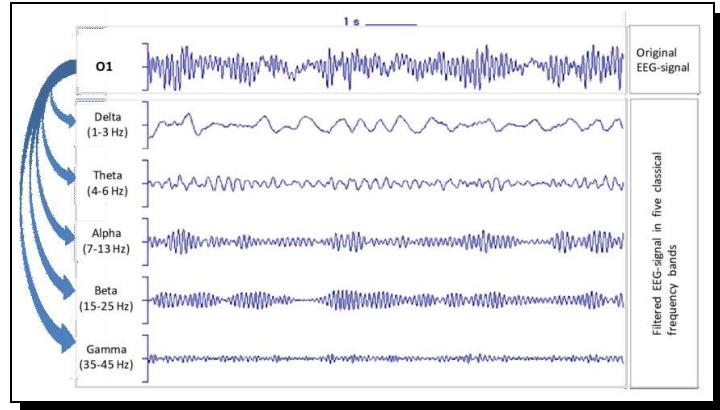


Figure 1: *Signal EEG et sa décomposition en 5 signaux indépendants occupant 5 bandes de fréquences.*

<sup>1</sup>Le filtrage du signal EEG original en cinq bandes de fréquences contigües nous donne:

Les ondes cérébrales GAMMA (22 – 100 Hz) sont les ondes cérébrales les plus rapides et ont été assimilées à une *perception accrue* ou un *état mental maximal* lorsqu'il y a un traitement simultané d'informations provenant de différentes parties du cerveau (et très fortes et plus régulièrement observées chez ceux qui font de la méditation comme les Moines bouddhistes).

Les ondes cérébrales BETA (13-22 Hz) sont des ondes faciles à détecter lorsque nous sommes occupés à réfléchir activement et elles sont associées à l'alerte, la pensée active comme dans le cas d'une conversation active, prise de décisions, résolution de problèmes, concentration sur une tâche, apprentissage d'un nouveau concept.

Les ondes ALPHA (8-13 Hz) sont détectables lorsque les yeux sont fermés et l'esprit est détendu. On les trouve aussi souvent pendant des activités telles que le Yoga, juste avant de s'endormir et caractérise un état créatif et artistique, physiquement et mentalement détendu.

Les ondes THÈTA (4-8 Hz) sont fortement détectables lorsque nous rêvons (pensez au film *Inception*), mais ils peuvent aussi être vu pendant la méditation profonde et caractérise un état réduit de conscience, mais qui reste très créatif et perspicace ou lorsque nous effectuons une tâche si automatique que l'esprit peut s'en désengager, par ex. se brosser les dents, se doucher. La recherche a également montré une association positive des ondes théta avec la mémoire, la créativité et le bien-être psychologique. Finalement, les ondes Delta (1 – 4 Hz) sont les plus lentes et sont les plus fortes lorsque nous profitons d'un sommeil réparateur dans un état sans rêves (indispensable pour une bonne guérison et le bon renouvellement des cellules du corps).

<sup>2</sup>Certaines de ces oscillations cérébrales sont plus facilement détectables sur des parties spécifiques du cuir chevelu, correspondant aux parties du cerveau juste en dessous. Le cerveau possède de nombreuses régions spécialisées qui correspondent à différents processus, pensées et sensations. Des oscillations particulières reflètent souvent des régions et des réseaux distincts du cerveau communiquant entre eux. Il est important de se rappeler, cependant, que les ondes cérébrales ne sont pas la source ou la cause des états cérébraux, ou de nos expériences de notre propre esprit; ce ne sont que quelques-uns des reflets détectables des processus complexes dans le cerveau qui produisent notre expérience d'être, de penser et percevoir.

## Indice d'Engagement

Le casque EMOTIV EPOC® (cf. Fig. 2) et ses 14 électrodes ou capteurs, permet de recueillir (sur un individu) et transmettre ensuite à un ordinateur portable, 14 signaux EEG échantillonnés très facilement. À partir de ces signaux EEG, on désire calculer (pour ces 14 signaux) le degré ou l'indice d'engagement. Le degré d'engagement, pour un signal EEG, que l'on désire calculer pour chacun des 14 signal EEG (que l'on moyennera ensuite pour avoir le degré d'engagement du cerveau total de l'individu) est issu des travaux de Pope *et al.*<sup>3</sup> que ce dernier a effectué à la National Aeronautics and Space Administration (NASA).

Ces travaux s'appuient sur des recherches neuroscientifiques sur l'attention et la vigilance. Il a été démontré que les performances d'un utilisateur (comme un pilote par exemple) sont sensiblement améliorées quand cet index est utilisé comme un critère pour décider automatiquement quel serait (pour le pilote) le mode de pilotage le plus efficace en situation de crise (manuel ou automatisé ?). Cet indice qui mesure en fait l'attention soutenue et est capable d'identifier les modifications de l'attention d'un individu liées à des stimuli externes a prouvé son intérêt dans de nombreuses études qui ont montré aussi l'utilité d'intégrer cet index dans de nombreux domaines comme la détection de l'engagement cognitif dans le domaine de l'apprentissage (eLearning), les jeux, la surveillance, le pilotage, les missions critiques, etc.

Cet indice est calculé à partir de la décomposition du signal EEG en trois bandes de fréquence EEG: **4-8Hz** (ondes  $\theta$  [theta]), **8-13Hz** (ondes  $\alpha$  [alpha]) et **13-22Hz** (ondes  $\beta$  [beta]) comme suit:

$$\text{Eng} = \frac{\theta}{\alpha + \beta} \quad (1)$$

On se propose dans cet examen de calculer ce signal d'indice d'engagement de deux façons différentes:

1. Soit avec une technique légèrement (temps) différée avec une FFT (fast fourier transform) et en utilisant nos connaissances acquises en analyse de Fourier, filtrage fréquentiel et analyse spectrale (Exercice 1).
2. Soit avec une autre totalement temps réel utilisant le filtrage numérique temps réel et la TZ (Transformé en Z) (Exercice 2).

---

<sup>3</sup>Pope, Alan T, Bogart, Edward H, and Bartolome, Debbie S. *Biocybernetic system evaluates indices of operator engagement in automated task*. Biological psychology, 40(1), 187-195, Mai 1995.

### 1. Analyse Spectrale (40 pts)

On va utiliser dans cette partie la stratégie suivante; On va estimer, dans un premier temps, le signal d'engagement provenant d'une seule électrode (ou capteur) du casque EMOTIV (on s'occupera, plus tard, du moyennage de ce signal sur les 14 électrodes du casque).

On va échantillonner ou numériser ce signal EEG avec la fréquence d'échantillonnage  $F_{eeg} (= 1/T_{eeg})$  optimale de Shannon. On calculera, à l'instant  $t$  courant, avec une FFT (pour sa rapidité et non une TFD [Transformé de Fourier Discrete]) le spectre des  $N_{eeg}$  derniers échantillons (acquis par le casque EMOTIV) de ce signal EEG. On fera le filtrage fréquentiel nécessaire pour extraire les ondes cérébrales nécessaires et on calculera cet indice d'engagement. Ce calcul sera fait tous les  $K T_{eeg}$  seconde ( $K$  est un entier positif, puissance de 2, compris entre  $[0, F_{eeg}/2]$ ). On moyennera ensuite les signaux d'engagements qui ont été estimés dans la seconde précédent l'instant  $t$  courant. Cette valeur moyennée sera l'estimation finale de notre signal d'engagement à l'instant  $t$ . Avec cette procédure on aura donc un signal d'engagement évoluant avec le temps et numérisé ou définit toutes les  $T_{eng} = K T_{eeg}$  seconde.

1. Dans un premier temps, on veut fixer la période d'échantillonnage optimale de Shannon permettant de récupérer **toutes** les ondes cérébrales du signal EEG (y compris les ondes GAMMA non utilisées dans cette application car on aimerait ne pas devoir refixer cette période d'échantillonnage pour le calcul d'un autre indice utilisant cette fois-ci les ondes Gamma). On aimerait aussi que le spectre obtenu ait une résolution fréquentielle  $\Delta\nu = 1Hz$  et que le moyennage du signal d'engagement se fasse plus d'une dizaine de fois.

Expliquer pourquoi il est intéressant d'avoir  $\Delta\nu = 1Hz$  et trouver ensuite, en le justifiant, les paramètres  $F_{eeg}$ ,  $N_{eeg}$  et  $K$  optimaux (sachant que l'on veut utiliser une FFT et non une TFD). Expliquer aussi le rôle du moyennage dans cette procédure et expliquer ce qui se passerait si le moyennage se faisait trop peu de fois. On aura certainement plusieurs solutions possible pour  $K$  que l'on pourra donner, mais essayer d'expliquer qualitativement ce qui empêcherait technique-  
ment d'avoir un  $K$  trop petit ?

< 20 pts>

2. Expliquer et justifier quels pre-traitements et traitements (que l'on a vu encours) que l'on devrait faire et ajouter à la stratégie précédente pour réduire le biais et augmenter la fiabilité du calcul de ce spectre calculé par FFT avant de faire le filtrage fréquentiel.

< 8 pts>

3. Indiquer le type de filtres que vous devrez réaliser en filtrage fréquentiel en donnant la valeur des paramètres de ce filtre (fréquence de coupure et largeur de bande) en fréquence numérique.

< 6 pts>

4. Estimer la complexité du calcul en terme de nombre d'opérations élémentaires flottantes, en fonction de  $N_{eeg}$  et  $K$  pour estimer, toutes les  $K T_{eeg}$ , cet indice d'engagement (on considérera dans ce calcul le moyennage sur les 14 électrodes).

< 6 pts>

### Réponse

#### 1.

- Il est intéressant d'avoir un spectre avec une résolution fréquentielle de  $\Delta\nu = 1Hz$  car les ondes cérébrales sont distinguées et différenciées entre elles avec une telle résolution. Par exemple, avant 4 Hz, il s'agit d'onde Delta, et après 4 Hz, [ –mais avant 8 Hz– ], d'onde Théta. Autrement dit; les bornes inf. et sup. de toutes ces ondes étant des multiples et sous multiples de  $\Delta\nu = 1Hz$ , cela assurera une bonne detection, localisation et précision de ces différentes types d'ondes (éitant ainsi des artefacts dans le spectre créés par des pics de fréquences possiblement faussement dédoublé). On peut aussi constater que cette résolution fréquentielle de

$\Delta\nu = 1 \text{ Hz}$  on pourra distinguer deux fréquences espacées d'au moins  $1 \text{ Hz}$  comme c'est le cas entre une onde delta et theta.

Inversement, il serait ridicule et superflu d'avoir une résolution fréquentielle plus grande (ou  $\Delta\nu$  plus petit) pour notre application ou, plus généralement, pour toute autres applications utilisant ces ondes cérébrales car, cela ne servirait à rien et n'apporterait aucune information supplémentaire. ▷ [4 pts]

- $\Delta\nu = 1 \text{ Hz}$  donc la durée du signal EEG pour lequel on calculera la FFT est  $T = (1/\Delta\nu) = 1 \text{ seconde}$ . ▷ [4 pts]

- On utilisera la fréquence optimale de Shannon et on devra donc considérer une fréquence qui soit au moins deux fois la fréquence maximale que l'on désire détecter, c'est-à-dire  $2 \times$  la fréquence de 100 Hz des ondes GAMMA les plus hautes fréquences. Puisque l'on veut considérer une FFT (qui est beaucoup plus rapide qu'une TFD) et que l'on doit considérer un nombre d'échantillons sur une seconde (la durée du signal calculé précédemment) qui soit aussi une puissance de deux, on prendra  $F_{\text{eeg}} = 256 \text{ Hz}$  et donc  $N_{\text{eeg}} = 256$  échantillons dans chaque calcul spectral par FFT. ▷ [4 pts]

- $K$  est le dernier paramètre auquel on doit s'intéresser. Avec  $K = 32$ , on a un moyennage qui se fait 8 fois ce qui n'est pas assez élevé. Avec  $K = 16$ , on a un moyennage qui se fait 16 fois ce qui est bon. Avec  $K = 8$ , on a un moyennage qui se fait 32 fois ce qui est bon. Bref, on peut choisir  $K = 1, 2, 4, 8, 16, 32$  pour finalement faire un moyennage sur 256, 128, 64 ou 32 fois. Prenons le cas extrême; avec  $K = 1$ , on devrait calculer l'indice d'engagement pour en chaque  $T_{\text{eeg}}$  soit tous les  $1/256 = 3.9 \text{ ms}$ . Durant cette période, on devrait calculer deux FFT (une FFT directe et une FFT innverse) sur  $N_{\text{eeg}}$  échantillons et faire le filtre fréquentiel (passe-bande) puis moyennner le signal d'engagement (sur 256 fois et faire cela 14 fois (sur tous les signaux EEG du casque comportant 14 électrodes) et moyennner ensuite ces 14 résultats et tout cela en moins de 3.9 ms ! Pour cette raison computationnelle,  $K$  ne doit pas être trop petit. Il faut que  $k$  soit suffisamment grand pour qu'aussi le signal d'engagement soit calculé sur des échantillons un peu différent du signal d'engagement précédemment calculé. ▷ [4 pts]

- Le moyennage (*on dit "lissage"*) du signal d'engagement est fait pour éliminer le bruit (ou les fluctuations) qui pourrait l'entacher. Un moyennage sur trop peu d'échantillons ne permettrait pas de le débruitre suffisamment (cf. Fig. 3). ▷ [4 pts]

<4+4+4+4+4=20 pts>

**NOTA :** On peut vérifier, *a posteriori*, que notre fenêtre temporelle d'analyse de 1 seconde (contenant 256 échantillons) est correcte puisque aussi la plus petite fréquence des ondes cérébrales de plus basse fréquence est 1 Hz (onde delta).

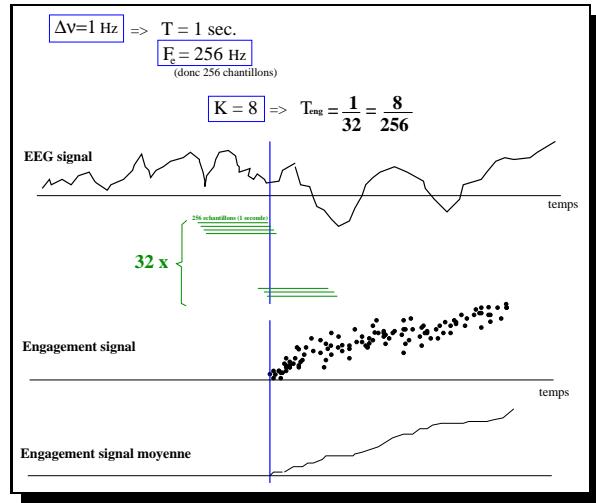


Figure 3: *Dispositif du filtrage du signal EEG de chaque électrode en temps différé. Chaque ligne horizontale verte désigne 1-] trois filtrages passe-bande (en onde  $\theta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ ) et utilisant une FFT avec 256 échantillons, 2-] la récupération des trois derniers échantillons de ces trois filtrages et 3-] le calcul du signal d'engagement  $\theta/[\alpha + \beta]$ . Ce qui nous donne un point du signal d'engagement toute les  $[1/32]$ -ième de seconde, lesquels sont ensuite moyennés avec une fenêtre glissante sur les 32 derniers échantillons [ce qui nous donne un signal d'engagement [quasi- temps-réel] très largement débruité, mais tout de même assez réactif, avec un temps de réaction possible (entre un signal d'engagement minimal et maximal) d'au plus égale à une seconde.*

**2.**

Par ordre d'importance:

- Le premier traitement vraiment indispensable serait de pondérer les  $N_{eeg} = 256$  échantillons par une fenêtre d'apodisation (style de Hamming ou Hanning) pour atténuer les discontinuités (*i.e.*, les hautes fréquences) créées par le fait que le signal considéré par la FFT [sur lequel on va calculer son spectre] est implicitement toroidal.  $\triangleright$  **[6 pts]**
- On pourrait inclure aussi la stratégie de la technique du périodogramme pour renforcer la fiabilité du spectre estimé (avec possiblement un chevauchement de 50% à 75%, mais cela augmenterait sensiblement aussi le temps de calcul.  $\triangleright$  **[2 pts]**
- Il serait intéressant, avant de faire le traitement précédent, (et/ou possiblement en temps réel) un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure au-delà de 100 Hz pour réduire le bruit et le possible repliement spectral (filtre anti-repliement) du signal EEG sans compromettre notre information utile qui, dans notre cas, est l'ensemble des ondes cérébrales.  $\triangleright$  **BONUS [+2 pts]**

**<6+2=8 pts>**

**NOTA :** On peut aussi enlever dans ce signal EEG, les artefacts de fréquence créées par les mouvements oculaires et musculaires (et donc cardiaques) du porteur du casque mais cette réponse n'était pas vraiment celle demandée dans le cadre de cet examen et ce cours (cette réponse permet d'avoir néanmoins comme BONUS (+2) de points dans cet examen).

**3.**

Pour la partie filtrage fréquentiel, on devra réaliser 3 filtres passe-bande avec les fréquences de coupure numériques respectives:  $f_{c1} = 6/256 \approx 0.02344$ ,  $f_{c2} = 10.5/256 \approx 0.04101$  et  $f_{c3} = 17.5/256 \approx 0.06836$  et de largeur de bande respective, en fréq. numérique, de  $\Delta_1 = 4/256 = 1/64$ ,  $\Delta_2 = 5/256$  et  $\Delta_3 = 9/256$ .

**<6 pts>**

**4.**

pour une électrode et un filtre, on a besoin de : 2 FFTs (demandant  $2 N_{EEG} \log_2 N_{EEG}$  opérations flottantes avec  $N_{EEG} = 256$  échantillons), le calcul du filtrage passe bande (1 multiplication et 1 addition par échantillon, donc  $2 N_{EEG}$  opérations élémentaires et ensuite le moyennage de l'indice ( $N_{EEG}/K$  fois), ce qui nous fait, puisqu'il y a 3 filtres et 14 électrodes ( $14 \times 3 = 42$ ), et que cela est fait  $N_{EEG}/K$  fois par seconde:

$$84 \times \frac{N_{EEG}}{K} \times \left( N_{EEG} \log_2 N_{EEG} + N_{EEG} \right) \propto N_{EEG}^2 \quad (2)$$

**<6 pts>**

**NOTA :** On négligera le calcul du signal d'engagement et du moyennage avec notre fenêtre glissante sur les 32 derniers échantillons.

Pour  $N = 256$  ( $\log_2 N_{EEG} = 8$ ), on a donc  $2688 \times 2304$  opérations flottantes à faire par seconde, *i.e.*,  $\approx 6$  millions d'opérations à faire en moins de 1 seconde, ce qui est tout à fait possible avec les calculateurs actuels.

---

## II. Filtre Numérique (70 pts)

Dans cet exercice, on va estimer, les ondes  $\beta$  (beta) **13-22Hz** provenant d'une seule électrode (ou capteur) du casque EMOTIV et on va le faire à l'aide d'un filtre numérique passe-bande temps-réel (en fait assez grossier, car avec assez peu de zéros et de pôles mais fonctionnel).

On va considérer que le signal EEG est le signal d'entrée (input) (avant filtrage)  $x(n)$  échantillonné à la fréquence d'échantillonnage  $F_{eeg}(=1/T_{eeg}) = 256$  Hz (les échantillons du signal EEG sont donc  $x(1), x(2), \dots, x(n)$ ). Le signal filtré, après filtrage passe-bande, est le signal  $y(n)$  (output), donc échantillonné (en fait estimé en temps réel par notre filtrage numérique) à la même fréquence d'échantillonnage.

1. La fréquence centrale des ondes  $\beta$  est donc la fréquence 17.5 Hz. Indiquer, tout d'abord, quelle est la fréquence numérique associée à la fréquence physique réelle 17.5 Hz.

On va créer un filtre passe-bande numérique possédant une fonction de transfert  $H(z)$  utilisant deux zéros; un zéro à la fréquence numérique  $f = 0$  et un autre à la fréquence numérique  $f = 0.5$  et deux pôles; un pôle à la fréquence numérique associée à la fréquence physique 17.5 Hz, mais pas sur le cercle unité, à une distance  $\rho = 0.95$  du centre du cercle unité et un deuxième pôle qui est son conjugué. Positionner ces deux pôles et ces deux zéros sur le cercle unité.

Expliquer quel est l'intérêt de considérer une fonction de transfert avec des pôles (ou des zéros) conjugués ?

Expliquer aussi quel est l'intérêt pour ce filtre passe-bande de considérer un pôle qui n'est pas placé sur le cercle de rayon unité mais légèrement avant ((placé sur le cercle de rayon  $\rho$ ) avec  $\rho < 1$ ).

Placer dans le plan complexe ces deux zéros et pôles en précisant pour le pôle, sa position en terme d'angle  $\theta_p$  (placé sur le cercle de rayon  $\rho$ ).

<10 pts>

2. Calculer la fonction de transfert  $H(z)$  de ce filtre passe-bande défini par ces deux zéros et pôles.

<10 pts>

3. Multiplier cette fonction de transfert par  $K_{pb}$ .  $K_{pb}$  est défini comme étant égale à l'inverse de l'amplification de cette fonction au pôle  $z_p$ , *i.e.*  $K_{pb} = 1/H(z=z_p)$  Trouver  $K_{pb}$  et dire pourquoi il est intéressant que l'amplification de cette fonction de transfert soit au plus égale à un à la position de ce pôle ?

<10 pts>

4. Calculer l'amplification des fréquences aux extrémités de notre filtre passe-bande, *i.e.*, en 13 et 22 Hz (sans le  $K$  calculé à la question précédente. Conclure.

<15 pts>

5. Calculer le gain statique et le gain à la fréquence de Shannon de ce filtre et en utilisant les renseignements tirés des trois dernières questions, tracer l'allure du module de la réponse fréquentielle de ce filtre passe-bande.

<10 pts>

6. Quel critique peut-on faire à ce filtre passe-bande par rapport à un filtre passe-bande idéal. Que faudrait-il faire (dite le sans le faire) pour faire en sorte que notre filtre passe-bande se rapproche du filtre passe-bande idéal ?

<5 pts>

7. Donner finalement l'équation aux différences permettant d'obtenir ce filtrage en temps réel.

<10 pts>

---

Réponse

**[1.]**

- La fréquence numérique associée à la fréquence physique réelle 17.5 Hz de ce pôle est  $\nu_o = 17.5/F_{eeg} = 17.5/256 \approx 0.06836$ .

▷ **[2 pts]**

- Le pôle que l'on note par une croix à cette fréquence numérique est positionné sur le cercle unité à l'angle  $\theta_o = 2\pi\nu_o \approx 0.43$  radian (ou  $\approx 24.60$  degré).

▷ **[2 pts]**

- Considérer une fonction de transfert avec des pôles (ou des zéros) (deux à deux) conjugués permet d'avoir une fonction de transfert  $H(z)$  réelle (les parties imaginaires des complexes conjugués s'annulent lorsqu'elles sont multipliées) et donc d'avoir une réponse impulsionnelle réelle et une relation itérative (équation aux différences) réelle (cela assurera aussi que le gain fréquentiel, pour les fréquences négatives, sera identique aux fréquences positives *[réponse ou gain en fréquence symétrique]*). ▷ **[2 pts]**

- Considérer un pôle qui n'est pas placé sur le cercle de rayon unité mais légèrement avant ((placé sur le cercle de rayon  $\rho$ ) avec  $\rho < 1$  permet d'avoir une amplification pour cette fréquence qui n'est pas infinie et donc/aussi d'avoir un système stable. ▷ **[2 pts]**

- Les zéros et pôles sont donnés avec le cercle de rayon unité, dans le plan complexe, pour ce filtre passe-bande, par le diagramme de la Fig.

4. ▷ **[2 pts]**

**<2+2+2+2+2=10 pts>**

**[2.]**

En se rappelant que lorsque les pôles sont complexes, il est plus simple de les calculer sous la forme module/argument, *i.e.*,  $\rho \exp(j\theta_p)$  ( $\theta_p$  est l'angle associé à notre pôle) et que:

$$[z - \rho \exp(j\theta_p)][z - \rho \exp(-j\theta_p)] = z^2 - 2\rho z \cos(\theta_p) + \rho^2$$

Du coup, la fonction de transfert  $H(z)$  de notre filtre numérique, associé à notre filtre passe-bande, s'écrit ( $\theta_p = 0.43$ ) immédiatement:

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2 - 2\rho z \cos(\theta_p) + \rho^2} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2\rho z \cos(\theta_p) + \rho^2} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1.73z + 0.90}$$

**<10 pts>**

**[3.]**

$$\text{comme: } z_p = \exp j(0.43) \approx 0.91 + 0.42j$$

$$z_p^2 = \exp j(0.86) \approx 0.65 + 0.76j$$

On a donc:

$$\begin{aligned} |H(z=z_p)| &= \frac{|z_p^2 - 1|}{|z_p^2 - 1.73z_p + 0.90|} = \frac{|0.65 + 0.76j - 1|}{|0.65 + 0.76j - 1.73(0.91 + 0.42j) + 0.90|} \\ &\approx \frac{|-0.35 + 0.76j|}{|-0.0243 + 0.046j|} \approx \frac{0.8367}{0.052} \approx 16 \end{aligned}$$

Multiplier la fonction de transfert par  $1/K_{pb} = 1/16$  permettra d'avoir un filtre passe-bande qui laisse passer la fréquence désirée (avec un gain de 1) et atténuer toutes les autres fréquences telle que ce doit un filtre passe-bande. Il permettra donc de *normaliser* l'amplitude de la réponse en fréquence de ce filtre

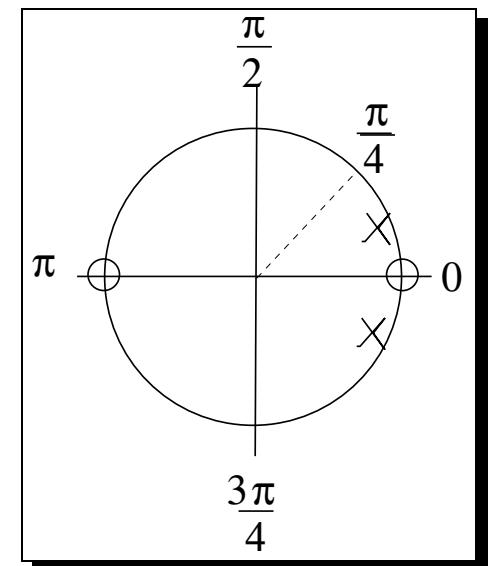


Figure 4: Placement des zéros et pôles pour ce filtre passe-bande

passe-bande et aussi d'éviter que le filtre n'amplifie le bruit ou les signaux indésirables susceptibles d'être présent dans la même gamme de fréquence que la bande de fréquence concernée.

<10 pts>

4.

- Pour la fréquence 13 Hz, on a la fréquence numérique  $13/256 \approx 0.0508$  et l'angle  $\theta_{p-} = 0.32$  et comme:

$$\begin{aligned} z_{p-} &= \exp j(0.32) \approx 0.95 + 0.31j \\ z_{p-}^2 &= \exp j(0.64) \approx 0.80 + 0.60j \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} |H(z=z_{p-})| &= \frac{|z_{p-}^2 - 1|}{|z_{p-}^2 - 1.73z_{p-} + 0.90|} = \frac{|0.80 + 0.60j - 1|}{|0.80 + 0.60j - 1.73(0.95 + 0.31j) + 0.90|} \\ &\approx \frac{|-0.2 + 0.6j|}{|0.0565 - 0.438j|} \approx \frac{0.63}{0.44} \approx 1.42 \end{aligned}$$

- Pour la fréquence 22 Hz, on a la fréquence numérique  $22/256 \approx 0.086$  et l'angle  $\theta_{p-} = 0.54$  et comme:

$$\begin{aligned} z_{p+} &= \exp j(0.54) \approx 0.86 + 0.51j \\ z_{p+}^2 &= \exp j(1.08) \approx 0.47 + 0.88j \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} |H(z=z_{p+})| &= \frac{|z_{p+}^2 - 1|}{|z_{p+}^2 - 1.73z_{p+} + 0.90|} = \frac{|0.47 + 0.88j - 1|}{|0.47 + 0.88j - 1.73(0.86 + 0.51j) \cos(0.43) + 0.90|} \\ &\approx \frac{|-0.53 + 0.88j|}{|0.0557 - 0.002j|} \approx \frac{1.027}{0.557} \approx 1.84 \end{aligned}$$

Les fréquences à l'extérieur de la bande du filtre passe-bande seront bien atténuées comme il se doit.

<15 pts>

**NOTA :** Lorsqu'on aura multiplier la fonction de transfert par  $K_{pb} = 1/16$  (cf. Question 3.), on aura donc des valeurs de gain de  $|H(z=z_{p-})| = 1.42/16 = 0.08875$  et  $|H(z=z_{p+})| = 1.84/16 = 0.115$  ce qui est une atténuation correcte pour les fréquences inf. de 13 Hz et sup. de 23 Hz de ces ondes beta.

5.

Le gain statique est le gain de la réponse fréquentielle pour la fréquence numérique  $\nu = 0$ . Il est obtenu en posant  $z = 1$  dans la fonction de transfert  $H(z)$  et le gain à la fréquence de Shannon est le gain de la réponse fréquentielle pour la fréquence numérique  $\nu = 0.5$ . Il est obtenu en calculant  $H(z = -1)$ . Dans notre cas:  $H(z=1) = H(z=-1) = 0$ .

En utilisant les trois dernières questions, *i.e.*,  $|H(z=z_p)| = 16$  et  $|H(z=z_{p-})| = 1.42$  et  $|H(z=z_{p+})| = 1.84$ , on peut maintenant tracer facilement le gain de la réponse fréquentielle de notre filtre passe-bande ci-contre ( cf. Fig. 5).

<10 pts>

6.

On aimerait un filtre passe-bande plus carré (cf. Fig 6). Pour cela, il faudrait faire une fonction de transfert avec

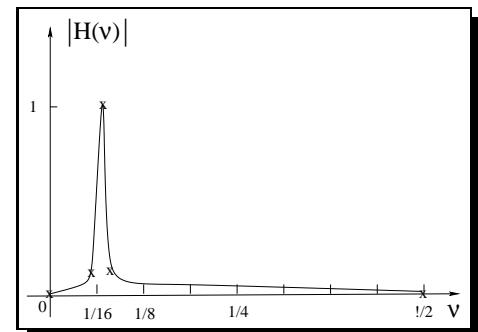


Figure 5: Gain de la réponse fréquentielle de notre filtre passe-bande

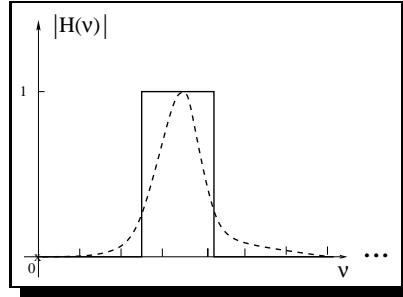


Figure 6: *Le gain de notre filtre passe-bande en pointillé et le gain du filtre passe-bande idéal*

plus de zéros et plus de pôles pour arriver à un tel gabarit presque rectangulaire (qui éliminerait les fréquences indésirées). Toutefois, notre filtre reste fonctionnel.  
**<10 pts>**

**7.**

$$\begin{aligned}
 H(z) = K_{[G=1]} \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1.73z + 0.90} &= K_{[G=1]} \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.73z^{-1} + 0.90z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \\
 Y(z) \{1 - 1.73z^{-1} + 0.90z^{-2}\} &= X(z) \{K_{[G=1]} \cdot (1 - z^{-2})\} \\
 &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
 y(n) - 1.73y(n-1) + 0.90y(n-2) &= K_{[G=1]} x(n) - K_{[G=1]} x(n-2)
 \end{aligned}$$

Comme  $K_{[G=1]} = 1/16 = 0.0625$ , on a donc finalement:

$$\boxed{y(n) = 1.73y(n-1) - 0.90y(n-2) + 0.0625x(n) - 0.0625x(n-2)}$$

**<10 pts>**

**NOTA -1- :**

Le filtre est un filtre IIR, stable, du second ordre. Si on le compare au filtre de la question I., on aura besoin, tous les  $T_{eeg}$  de (en comptabilisant un moyennage final des 6 derniers indices d'attention, de  $6 \times 3 \times 6 \times 108$  opérations toutes les 1/256 seconde ou  $\approx 28000$  opérations par seconde pour un indice d'attention, donné en temps réel, tous les 1/256 seconde).

**NOTA -2- :**

Concrètement, pour estimer l'indice d'engagement modélisé mathématiquement par l'équation (1), on aura donc besoin de faire un filtre passe-bande temps-réel pour les ondes  $\theta$ , et un autre pour les ondes  $\alpha$ , selon le même principe que celui créé pour les ondes  $\beta$  dans notre exercice **[2]**.

Soit  $y_\beta(n)$  la sortie de l'équation aux différences trouvée à la question 7  $\triangleright y_\beta(n) = 1.73y(n-1) - 0.90y(n-2) + x(n) - x(n-2)$  et soit  $y_\theta(n)$  et  $y_\alpha(n)$ , l'équation aux différences associée aux ondes cérébrales  $\theta$  et  $\alpha$  respectivement. Le signal d'engagement  $y_{Eng}(n)$  serait ensuite donnée par la simple équation:

$$y_{Eng}(n) = y_\theta(n) / [y_\alpha(n) + y_\beta(n)]$$

qui permettrait de nous donner, un signal temps-réel de 256 échantillons par seconde, exprimant le degré d'engagement du porteur du casque EMOTIV; une valeur élevée traduirait un degré d'engagement (ou d'attention ou de vigilance) élevé et une valeur faible, un degré de d'engagement (ou de concentration) faible (mesure possiblement relative pour chaque individu qui nécessiterait d'être ensuite éventuellement calibrée).