



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http: //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail: mignotte@iro.umontreal.ca

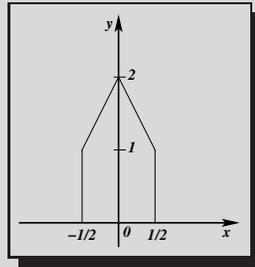
Date: 20/02/2023

I	Transformée de Fourier (40 pts)
II	Identification de Spectres (20 pts)
III	Transformation d'Images et Spectres (40 pts)
IV	Filtrage (22 pts)
Total	122 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (40 pts)

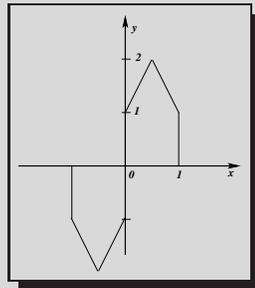
Soit $f(x)$ le signal suivant:



et $F(\nu)$ sa TF ou son spectre (*i.e.*; $f(x) \Rightarrow F(\nu)$).

1. Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés intéressantes de $F(\nu)$ que l'on pourrait déduire des propriétés de $f(x)$ et des propriétés de la TF.
<5 pts>
2. En vous aidant du fait que $f(x)$ peut se voir comme la somme de deux fonctions connues (quelquefois dilatées ou contractées), trouver $F(\nu)$ (en énonçant aussi la propriété de la TF que vous utilisez pour la calculer).
<5 pts>
3. Si on discrétisait $f(x)$, en prenant un échantillon tous les $T_e = 1/40$ (en $0, 1/40, 2/40, 3/40, \dots$, et en $-1/40, -2/40, -3/40, \dots$; qu'advierait-il du spectre de cette fonction discrétisée comparativement au spectre $F(\nu)$?
<5 pts>
4. Dans le cas de la question précédente, aurait-on de l'aliasing ? (On pourra prendre le critère vu en cours qui, je le rappelle, considère que l'on a une amplitude ou/en module des fréquences repliées inférieures à 1% du maximum du spectre, alors on n'a pas d'aliasing). Si il y a de l'aliasing alors quelle période d'échantillonnage maximale devrait-on prendre ?
<5 pts>
5. Si on périodisait $f(x)$, en la dupliquant (ou périodisant) tous les $T = 4$, *i.e.*, en $T = 0, 4, 8, 12, \dots$, et en $T = -4, -8, -12, -16, \dots$; qu'advierait-il du spectre de cette fonction périodisée comparativement au spectre $F(\nu)$?
<5 pts>

6. Soit la fonction $g(x)$ suivante:



Écrire $g(x)$ comme une fonction de $f(x)$ modifiée. Soit $G(\nu)$ la TF de $g(x)$ ($g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\nu)$).

Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés intéressantes de $G(\nu)$ que l'on pourrait déduire des propriétés de $g(x)$ et des propriétés de la TF. Dire aussi quelle serait le module de $G(\nu)$ par rapport au module de $F(\nu)$. En déduire quelle serait la différence entre $F(\nu)$ et $G(\nu)$ que l'on pourrait déduire de tout cela. Calculez ensuite le spectre $G(\nu)$.

<15 pts>

Réponse

1.

La fonction $f(x)$ est réelle et paire donc sa transformée $F(\nu)$ sera réelle pure et paire. On pourrait dire aussi que la fonction étant non périodique, son spectre sera continu. De plus, comme $f(x)$ est une fonction avec des discontinuités, la reconstruction de cette fonction se fera avec beaucoup d'harmoniques, *i.e.*, mathématiquement on s'attend à voir une TF dont le support fréquentiel est assez grand.

<5 pts>

2.

$f(x)$ peut se voir comme la somme de la fonction porte $\Pi(x)$ avec la fonction triangle $\Delta(x)$ contractée d'un facteur deux (la fonction triangle s'étend entre -1 et 1 normalement et pas entre $-1/2$ et $1/2$ comme dans cet exemple. Par contre, la fonction triangle est bien de hauteur 1 comme dans cet exemple. Du coup, puisque la TF est linéaire, $F(\nu)$ est la somme du spectre de la fonction porte et du spectre de la fonction triangle dilatée d'un facteur deux (propriété de linéarité de la TF).

On a puisque, $f(ax) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$ ($a=2$ dans notre cas):

<5 pts>
$$f(x) = \Pi(x) + \Delta(2x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} + 2 \left(\frac{\sin(\pi\nu/2)}{\pi\nu} \right)^2$$

NOTA : On retrouve bien le fait que $F(\nu)$ est continue, réelle pure et paire avec support fréquentiel assez grand.

3.

Qualitativement, si on discrétisait $f(x)$ dans le domaine spatial en prenant un échantillon tous les T_e (période d'échantillonnage) alors le spectre $F(\nu)$ qui en résulterait se périodiserait, dans le domaine spectral, pour toutes les fréquences (spatiales) ν_e multiples de $1/T_e$ (à un facteur d'échelle T_e près).

Quantitativement, on aurait pour $f(x)$ discrétisé, c'est-à-dire: $f(x) \cdot \text{III}_{T_e}(x)$.

$$f(x) \cdot \text{III}_{T_e}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} F(\nu) * \text{III}_{1/T_e}(\nu)$$

On aurait donc, dans le domaine fréquentiel, le spectre: $F_{f_{T_e}}(\nu) \propto \left[\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} + 2 \left(\frac{\sin(\pi\nu/2)}{\pi\nu} \right)^2 \right] * \text{III}_{1/T_e}(\nu)$

<5 pts>

4.

As-t-on de l'aliasing ? Rappelons que $F_{f_{T_e}}(\nu)$ est composée de deux spectres. Considérons seulement le premier spectre (le deuxième tend considérablement plus vite que le premier vers 0). Le premier spectre est un sinus cardinal dont l'amplitude des bosses (ou des lobes) de ce sinus en amplitude ou/en module sont respectivement 1 pour la fréquence $\nu = 0$, une amplitude de $1/(1.5\pi)$ pour $\nu = 1.5$, une amplitude de $1/(2.5\pi)$ pour $\nu = 2.5$, ..., une amplitude de $1/(0.5 + k\pi)$ pour $\nu = 0.5 + k$, etc.

Du à la périodisation du spectre (toutes les fréquences physiques spatiales $\nu_e = 40$, on doit regarder ce qui se passe à la fréquence spatiales $\nu_e/2 = 20$. À cette fréquence, on aura le spectre du motif centré à la fréquence 0 dont la bosse ou lobe du sinus cardinal le plus proche aura une amplitude de $1/19.5\pi$ soit une amplitude ≈ 0.0163 auquel s'ajoute l'amplitude des fréquences négatives soit $\approx 2 \times 0.0163 = 0.033$ ou plus de 3% de la hauteur maximale du spectre. Selon notre critère il y aura donc de l'aliasing.

Pour qu'il n'y en ait pas, il faut avoir une amplitude des lobes à mi fréquence de moins de 0.005, soit puisque $0.005 \approx 1/(64.5\pi)$, après le 65-ième lobe donc pour une fréquence d'échantillonnage de $65 \times 2 = 130$ correspondant à une période d'échantillonnage minimale de $T_e = 1/130$ (donc environ trois fois plus d'échantillons par unité d'espace considérée ici).

<5 pts>

NOTA : On pourrait raisonner en ne négligeant pas le deuxième terme (qui dans notre raisonnement ci-dessus tend considérablement plus vite vers 0 et est supposé négligeable). Le maximum du spectre est $F(0) = 1 + 0.5 = 1.5$. En $\nu = 19.5$, on a donc une amplitude de $F(0) = (1/[19.5\pi] + 2 \times (1/[19.5\pi/2])^2) \approx 0.0163 + 0.00106 \approx 0.0174$ qui est supérieur de 1% du maximum 1.5. Pour ne pas avoir d'aliasing, il faut une amplitude inférieure à 0.0075 qui existera, avec ces deux termes, des $\nu = 45$ (amplitude de $F(45) \approx 0.00707 + 0.000200 = 0.00727 < 0.0075$).

5.

Si on périodisait $f(x)$, en la dupliquant ou périodisant tous les $T = 4$, on aurait mathématiquement: $f_p = f(x) * \text{III}_T(x)$.

$$f_p(x) \propto f(x) * \text{III}_T(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu) \cdot \text{III}_{1/T}(\nu)$$

On aurait donc, dans le domaine fréquentiel (à un facteur d'échelle près), le spectre:

$$F_{f_p}(\nu) = \underbrace{\left[\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} + 2 \left(\frac{\sin(\pi\nu/2)}{\pi\nu} \right)^2 \right]}_{\text{motif spectral}} \cdot \underbrace{\text{III}_{1/T}(\nu)}_{\text{discrétisation}}$$

L'opérateur de discrétisation prendrait un échantillon toutes les fréquences spatiales ($1/4$) du spectre et on se retrouverait ainsi avec un spectre discrétisé. Ce qui est compréhensible, puisque l'on sait (depuis la série de Fourier) que si on calcule le spectre d'une fonction périodique (de période T), on a dans le domaine fréquentiel un spectre de raies ou spectre discrétisé (ou échantillonné) toutes les fréquences $1/T$.

<5 pts>

6.

Pour construire $g(x)$ à partir de $f(x)$, il suffit de prendre la fonction $f(x)$, la décaler (ou la translater) de $1/2$ vers la droite et lui ajouter ensuite le motif de gauche que l'on peut construire à partir de la fonction $f(x)$, que l'on décalera vers la gauche de $1/2$ puis pour lequel on multipliera l'amplitude par -1 . Mathématiquement, cela correspond à:

$$g(x) = \left[f(x) * \delta(x - (1/2)) \right] - \left[f(x) * \delta(x + (1/2)) \right]$$

La fonction $g(x)$ est réelle et impaire donc sa transformée de Fourier $G(\nu)$ sera imaginaire pure et impaire en plus d'être continue (puisque $g(x)$ n'est pas périodique) et avec un assez grand support fréquentiel (à cause des discontinuités de $g(x)$).

Le module de $G(\nu)$ sera le même que celui de $F(\nu)$ à un facteur d'échelle deux près. En effet rappelez-vous que le module est la généralisation de la valeur absolue pour une fonction et que le motif de gauche et de droite sont tous les deux identiques à $f(x)$.

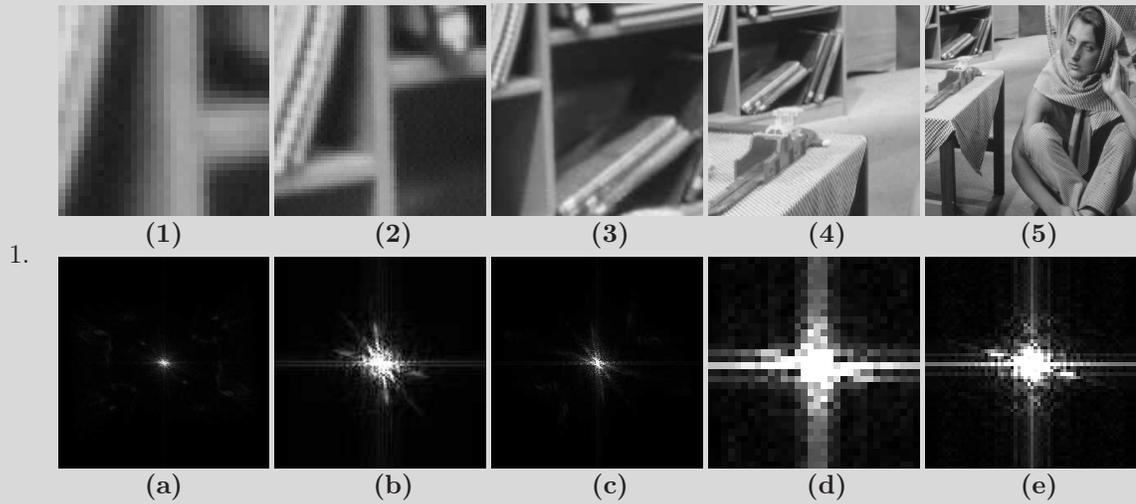
Du coup, $G(\nu)$ a le même module que $F(\nu)$ mais $G(\nu)$ aura un spectre imaginaire pure et impaire (d'amplitude ou module deux fois plus important de celui de $F(\nu)$ mais avec même support fréquentiel). Mathématiquement:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[f(x) * \delta(x - (1/2)) \right] - \left[f(x) * \delta(x + (1/2)) \right] \\ &= f(x) * \left[\delta(x - (1/2)) - \delta(x + (1/2)) \right] \\ &\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu) \cdot \left[\exp(-\pi j \nu) - \exp(-\pi j \nu) \right] = -2j F(\nu) \cdot \sin(\pi\nu) \end{aligned}$$

<10 pts>

NOTA : On retrouve bien le fait que $G(\nu)$ a le même module (même forme à un facteur d'échelle deux près) que $F(\nu)$ et que l'on a un spectre $G(\nu)$ imaginaire pure et impaire.

II. Identification de Spectres (20 pts)



Les images (1) à (5) de la Figure ci-dessus représentent le module du spectre de Fourier (calculé par la FFT puis recentré au centre de l'image et après avoir rehaussé **légèrement** les hautes fréquences comme en TP) des différentes imageries (1) à (5) prises sur l'image BARBARA de taille 512×512 (à partir du bord supérieur gauche et avec une taille chaque fois deux fois plus grande).

Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.

<20 pts>

Réponse

1.

On pourrait facilement, tout de suite, classer $[1 - d]$ et $[2 - e]$ car on voit que ses images ont le même nombre de pixels que leur transformée respective. Si on a de bons yeux, puisqu'il y a le même nombre de pixels entre le signal et sa TFD on a aussi immédiatement $[3 - b]$, $[4 - c]$ et $[5 - a]$. Mais même sans cela on peut arriver au bon classement.

Le plus simple est de procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident:

- $[1 - d]$:

Belle transition verticale dans le domaine spatial créant une belle discontinuité horizontale dans le domaine spectral. Plusieurs transitions horizontales (tiroir et du fait de la périodisation implicite de l'image en colonne) d'angle légèrement différent créent une discontinuité verticale assez floue dans le domaine spectral. La seule possibilité est l'association $[1-e]$ car en plus ses deux images ont le même nombre de pixels.

- $[2 - e]$:

Pixels deux fois plus nombreux et plus gros que précédemment dans les deux images. Une transition assez marquée dans la direction $7h05$ dans le domaine spatial crée une discontinuité dans le sens inverse dans le domaine spectral.

- $[3 - b]$:

Trois types de transition diagonale d'angles différents (livres) créent trois types de discontinuité dans le sens inverse dans le domaine spectral.

- [4 - c] :

Une transition diagonale due à la table crée une discontinuité dans le sens inverse dans le domaine spectral.

- [5 - a] :

L'image possède plein de textures différentes et toute cette information est résumée avec le pouvoir compressif du calcul de la TF par une tâche au centre de l'image sans direction de transition réellement dominante.

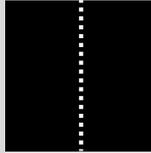
<20 pts>

III. Transformation d'Images et Spectres (40 pts)

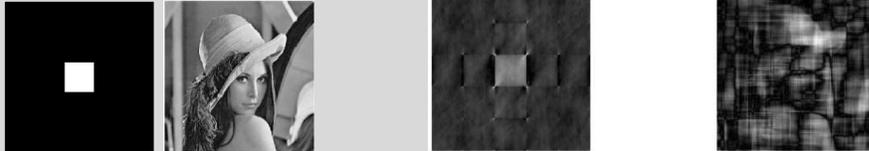
1. Rappeler quelle est le module de la TF d'un carré blanc de dimension 7×7 pixels centré au centre d'une image de taille 256×256 pixels (donner la dimension ou paramètres de cette fonction module de TF une fois recentrée au centre de l'image des fréquences et tracer la sommairement).
<5 pts>

2. En vous aidant de deux théorèmes que l'on précisera et d'un petit raisonnement que l'on donnera, dire quel serait le spectre (module de la TF) d'un ensemble de 40 petits carrés de taille 7×7 pixels situés aléatoirement dans une image de taille 256×256 pixels. Donner le plus de détails possibles sur le spectre obtenu.
<10 pts>

3. Maintenant, on va mettre ces petits carrés de taille 7×7 pixels régulièrement espacé tous les 15 pixels sur une ligne verticale en considérant l'image comme toroidale (cf. Figure) et on calcule le module de la TF de cette image. Donner le plus de détails possibles sur le spectre obtenu.
<10 pts>



4. Prenons un carré blanc de dimension 23×23 pixels centré au centre d'une image de taille 128×128 pixels et soit l'image de Lena.

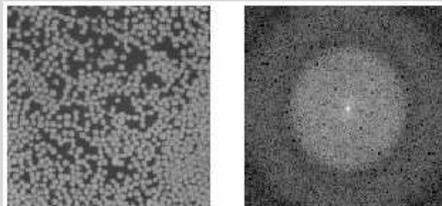


Prenons le module de la TF de ce carré et combinons le avec la phase de l'image Lena et calculons la TF inverse -soit ModCarPhaseLena cette image et faisons l'inverse (la phase de ce carré et le module de l'image Lena et ensuite TF inverse) -soit PhaseCarModLena cette image.

Parmi ces deux images, Uù est ModCarPhaseLena et PhaseCarModLena ? Celle de droite ou celle de gauche ?

<5 pts>

5. En utilisant quelques éléments démontrés en Question 2. plus des éléments vus en cours. Quelles sont toutes les informations que l'on peut déduire du spectre (image de droite ci-dessous) de l'image de gauche ci-dessous:



<10 pts>

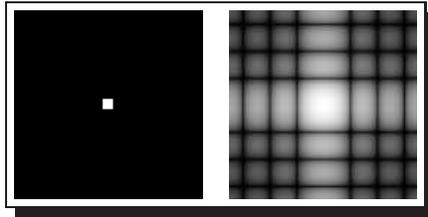
Réponse

1.

Le carré s'écrit: $\Pi\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right)$ avec $d = 7$ pixels et en utilisant la correspondance: x (colonne) $\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} u$ et y (ligne) $\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$, on a la relation:

$$\Pi\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \propto \frac{\sin(\pi u d)}{\pi u d} \cdot \frac{\sin(\pi v d)}{\pi v d} \quad (\text{à une constante de proportion près})$$

On observera donc la valeur absolue d'un sinus cardinal bidimensionnelle (vue d'en haut) dont le premier zéro du premier lobe de ce sinc se trouvera à la fréquence numérique $u = 1/d$, *i.e.*, $u = 1/7 \approx 0.143$. L'image spectrale, une fois recentrée exhibant des fréquences numériques allant de -0.5 à 0.5 ; on verra donc 2 lobes et demi de ce sinc dans les fréquences positives.



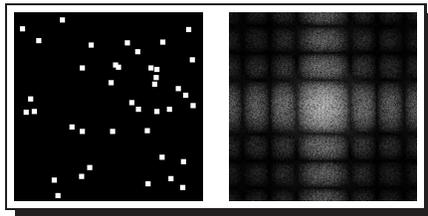
<5 pts>

2.

On sait (cf. cours et premier théorème) que le module de la TF d'une fonction décalée est le même que la fonction non décalée. Donc tous ces carrés décalés individuellement auront le même module (donné à la question précédente). On sait aussi (deuxième théorème) que la TF a la propriété de linéarité ou de superposition; le module du spectre de la somme de signaux est la somme des modules de TF de chacun des signaux; donc, la TF d'un ensemble de petits carrés de taille 7×7 pixels situés aléatoirement dans une image aura pour TF aussi un sinus cardinal bidimensionnel de même forme que la question précédente. Il existe cependant une petite différence qui est donnée par le raisonnement suivant: ces mêmes petits carrés situés aléatoirement dans l'image peuvent se voir comme un seul carré qui se convolue avec une sorte de peigne de Dirac dont les différentes dents sont aléatoirement espacées. Or on sait que: $* \text{III}_T(x) \rightleftharpoons \cdot \text{III}_{\frac{1}{T}}(\nu)$, *i.e.*, tout ce qui se périodise (ou se répète) dans le domaine spatial se discrétise dans le domaine fréquentiel. En ajoutant à cela le théorème précédent, on aura dans le domaine fréquentiel une discrétisation de ce sinus cardinal bidimensionnel en amplitude et dans l'espace des fréquences qui sera aléatoire.

<10 pts>

NOTA : On obtient cela:

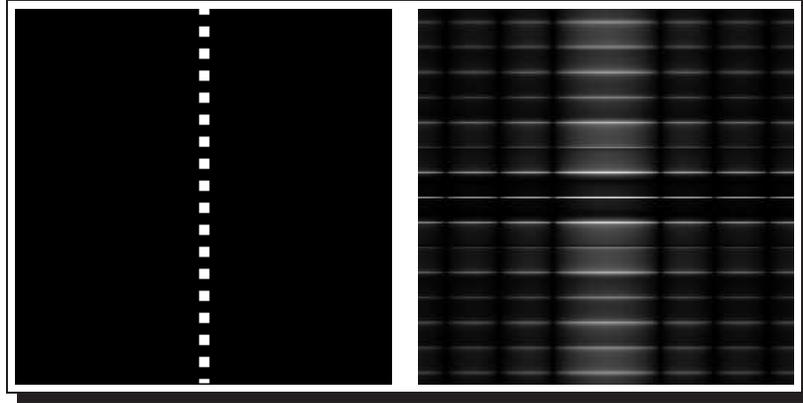


3.

On sait que $* \text{III}_T(x) \rightleftharpoons \cdot \text{III}_{\frac{1}{T}}(\nu)$, *i.e.*, tout ce qui se périodise (ou se répète) dans le domaine spatial avec la période T (en pixels) se discrétise dans le domaine fréquentiel avec la période $1/T$ en fréquence numérique. Donc, ces petits carrés de taille 7×7 pixels régulièrement espacés tous les 15 pixels sur une ligne verticale vont produire un spectre discrétisé (le même que celui de la question 1.) verticalement toutes les fréquences numériques $1/15$. C'est-à-dire pour une image de support fréquentiel $[-0.5 \ 0.5]$, 15 fois.

<10 pts>

NOTA : On obtient cela:



4.

Celle de gauche est PhaseCarModLena et celle de droite est ModCarPhaseLena. On revoit dans cette exemple toute l'importance de la phase qui va placer les fonctions élémentaires de base pour reconstruire les principaux contours de l'objet. Le module étant une information qui va plutôt permettre de reconstruire la texture des différents objets.

<5 pts>

5.

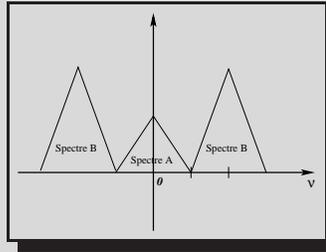
On sait (cf. cours) que le module de la TF de la fonction petit cercle blanc sur fond noir est la célèbre fonction SOMBRERO. La question 2. nous permet aussi de savoir que la TF d'un ensemble de petits cercles blancs sur fond noir situés aléatoirement dans une image aura aussi pour module de la TF, la fonction SOMBRERO avec un certain bruit dessus (bruit causé d'une part, à cause de la discrétisation aléatoire et pondérée de cette fonction et aussi, du au fait que les petits cercles blancs sur fond noir ne sont pas parfaitement blanc sur un fond non parfaitement noir). La forme du spectre nous renseigne donc que dans l'image spatial, il y a un ensemble de petits cercles blancs sur fond noir disposés aléatoirement dans cette image.

Mais de plus, les paramètre de cette fonction SOMBRERO nous renseigne sur la taille (possiblement moyenne [pour de légères variations possibles) du diamètre de ces petits cercles ou de ces pillules. On observe des cercles concentriques concentrés à l'origine et périodique de période $\approx 0.61/r$ (cf. cours restauration). Dans notre exemple, la fréquence numérique du premier zéro est ≈ 0.25 ce qui conduit à un rayon moyen des petits cercles de $\approx 0.61/0.25 = 2,44$, soit un diamètre approximatif moyen, pour chaque pillule de 5 pixels.

<10 pts>

IV. Filtrage (22 pts)

1. Filtrage Spatial

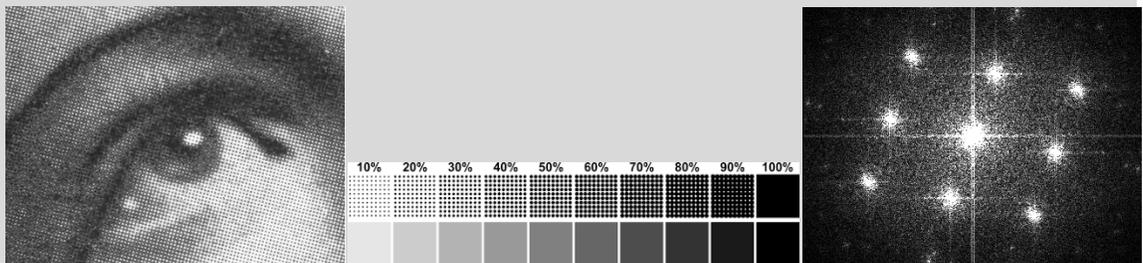


- (a) Soit deux images (que l'on va considérer mathématiquement en une dimension pour plus de facilité) $a(x)$ et $b(x)$ qui ont respectivement le spectre $A(\nu)$ et $B(\nu)$ ($a(x) \Leftrightarrow A(\nu)$ et $b(x) \Leftrightarrow B(\nu)$). Quelle est l'opération dans le domaine spatial qui permettrait d'avoir une image pour laquelle son spectre serait le spectre de l'image $a(x)$ ($A(\nu)$) avec le spectre de l'image $b(x)$ $B(\nu)$ à côté comme dans la Figure ci-dessus (où $A(\nu)$ est symbolisé par une fonction triangle de support fréquentiel $\nu_0 = 0.3$ (fréquence numérique) et $B(\nu)$ est symbolisé aussi par une fonction triangle (de même support fréquentiel mais un peu plus haute).

<12 pts>

2. Filtrage Fréquentiel

Voici une image en demi-ton, utile lorsqu'on a seulement à sa disposition un appareil d'impression capable d'imprimer qu'en mode tout ou rien. Malgré cette limitation, ces dispositifs sont capables de reproduire des images comportant des nuances de gris. La méthode utilisée consiste à produire l'illusion de niveaux de gris, alors qu'on imprime côte à côte des points noirs et blancs. L'illusion de niveaux de gris est obtenue par des éléments de trame regroupant un nombre fixe de points imprimables noirs ou blancs. Le pourcentage de points imprimables noirs dans un élément de trame donne son niveau d'intensité moyen. Voici une image en demi-ton (à gauche) et son spectre (à droite).



- (a) Donner en le justifiant une façon de restaurer cette image en demi-ton (pour quelle ressemble le plus possible à une image sans demi-ton, *i.e.*, en niveaux de gris).

<10 pts>.

Réponse

1.(a)

On aimerait décaler le spectre $B(\nu)$ d'une fréquence numérique $\nu_0 = 0.3$ vers la droite (fréquences positives) et lui ajouter le spectre $B(\nu)$ décalé vers la gauche d'une fréquence numérique $\nu_0 = 0.3$ (fréquences négatives). L'opérateur de décalage qui nous permet de faire cela est l'opérateur de convolution par un dirac décalé. Plus formellement, on aimerait faire mathématiquement, l'opération suivante dans le domaine spectral:

$$B(\nu) * \delta(\nu - \nu_0) + B(\nu) * \delta(\nu + \nu_0)$$

qui dans le domaine spatial nous donne: $\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} b(x) \cdot 2 \cos(2\pi\nu_0 x)$ avec $\nu_0 = 0.3$

Une fois réalisé cette opération dans le domaine spatial (*i.e.*, $b(x) \cdot 2 \cos(2\pi\nu_0 x)$), il suffit de se rappeler que la TF est linéaire (la TF d'une somme de deux signaux a pour spectre la somme des deux spectres de ces signaux) pour finalement ajouter à cette image filtrée spatialement l'image $a(x)$ (dont le spectre est $A(\nu)$) pour obtenir une image dont le spectre présente côte à côte le spectre désiré (cf. Figure).

<12 pts>

2.(a)

En fait, si on regarde de près ce que fait le rendu demi-ton (ou halftoning en anglais); il consiste à alterner des points blancs ou des points noirs dans l'image avec une proportion qui est en rapport avec le niveau de gris local de l'image. Cette opération ressemble un peu à une sorte de discrétisation de l'image avec deux niveaux de gris possibles (blanc ou noir seulement) et/ou mathématiquement à une multiplication de l'image avec un peigne de Dirac dans lequel les dents du peigne (*i.e.*, les diracs) seraient plus ou moins espacés et pour lesquels les diracs prendraient une valeur blanche de l'image et l'absence de Dirac prendrait une valeur noire de l'image. On peut aussi voir l'image en demi-ton comme un échantillonnage de l'image représentée par deux niveaux de gris (ou comme un échantillonnage *adaptatif spatialement* de l'image et contraint par deux niveaux de gris).

Or on sait que la discrétisation dans le domaine spatial est équivalente à une périodisation du spectre dans le domaine fréquentiel. Cette discrétisation un peu spéciale qui créera le de rendu demi-ton va créer cette périodisation du motif spectral de base (celui centré sur la fréquence 0 en différents endroits hautes fréquences (et du fait que ce n'est pas une vraie discrétisation, cela va périodiser ce spectre en différent endroit *en le modifiant un petit peu et en le pondérant différemment* à ces différents endroits).

Cette précédente hypothèse (le spectre de l'image réelle est la tache centrale) est compatible avec le fait que toute image a la propriété d'être à bande spectrale limitée avec un spectre concentré dans les basses et moyennes fréquences et décroissant.

Du coup, une fois que l'on a compris cela, il est facile de trouver un traitement dans le domaine spectral qui permette de restaurer cette image en demi-ton; il suffit de faire disparaître, avec une succession de filtres coupe-bandes bien placées, les différentes duplications du motif spectral de base (tout en préservant le plus possible les hautes fréquences de l'image qui sont des détails de l'image (entre les taches représentant les spectres dupliqués) et qui nous permettront de ne pas avoir une image trop floue comme cela aurait été le cas si on avait utilisé un simple filtre Gaussien (qui aurait atténué aussi les hautes fréquences entre les taches représentant les spectres dupliqués).

<10 pts>

NOTA -1- : Un exemple de restauration avec une série de filtres coupe-bandes bien placées.



NOTA -2- : Un filtrage homomorphique avec un filtre passe-bas aurait donné un résultat moins bon mais acceptable..