



DIRO  
IFT 6150

# TRAITEMENT D'IMAGES

## FILTRAGE SPATIAL

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

*E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)*

# FILTRAGE SPATIALE

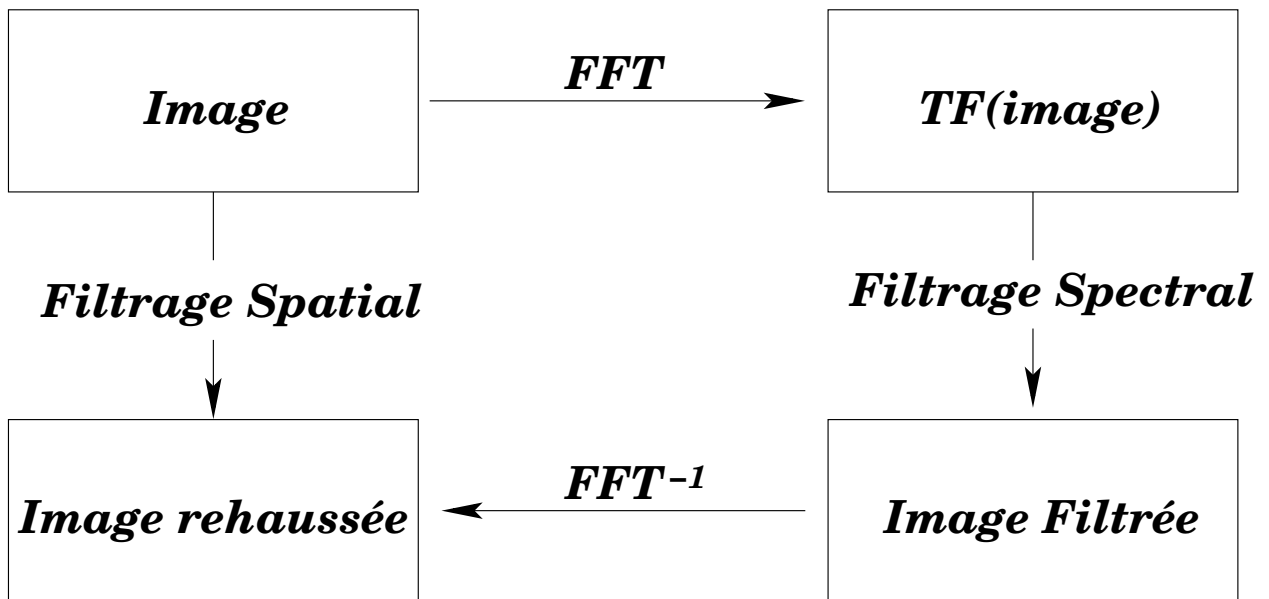
## SOMMAIRE

Introduction .....	2
Convolution Discrète 2D -Rappel- .....	4
Filtre de Moyenne (Passe-bas) .....	6
Filtre Gaussien (Passe-bas) .....	7
Autres Filtres Passe-bas .....	8
Filtre Médian .....	9
Filtre Adaptatif .....	11
Filtre Directionnel .....	12
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique- .....	14
Filtre Passe-haut -Masque de Détection- ....	16
Filtre Passe-haut -Gradient- .....	17
Décision Contour .....	22
Filtre Passe-haut -Laplacien- .....	23
Filtre de Marr-Hildreth .....	25
Rehaussement des Contours .....	26
Exercices .....	27

# FILTRAGE SPATIALE

## INTRODUCTION

Rehaussement d'Images par Filtrage Spatial/Fréquentiel



Théorème de Convolution -Rappel-

$$\begin{aligned} f(x, y) * g(x, y) &\leftrightarrow F(u, \nu) \cdot G(u, \nu) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) &\leftrightarrow F(u, \nu) * G(u, \nu) \end{aligned}$$

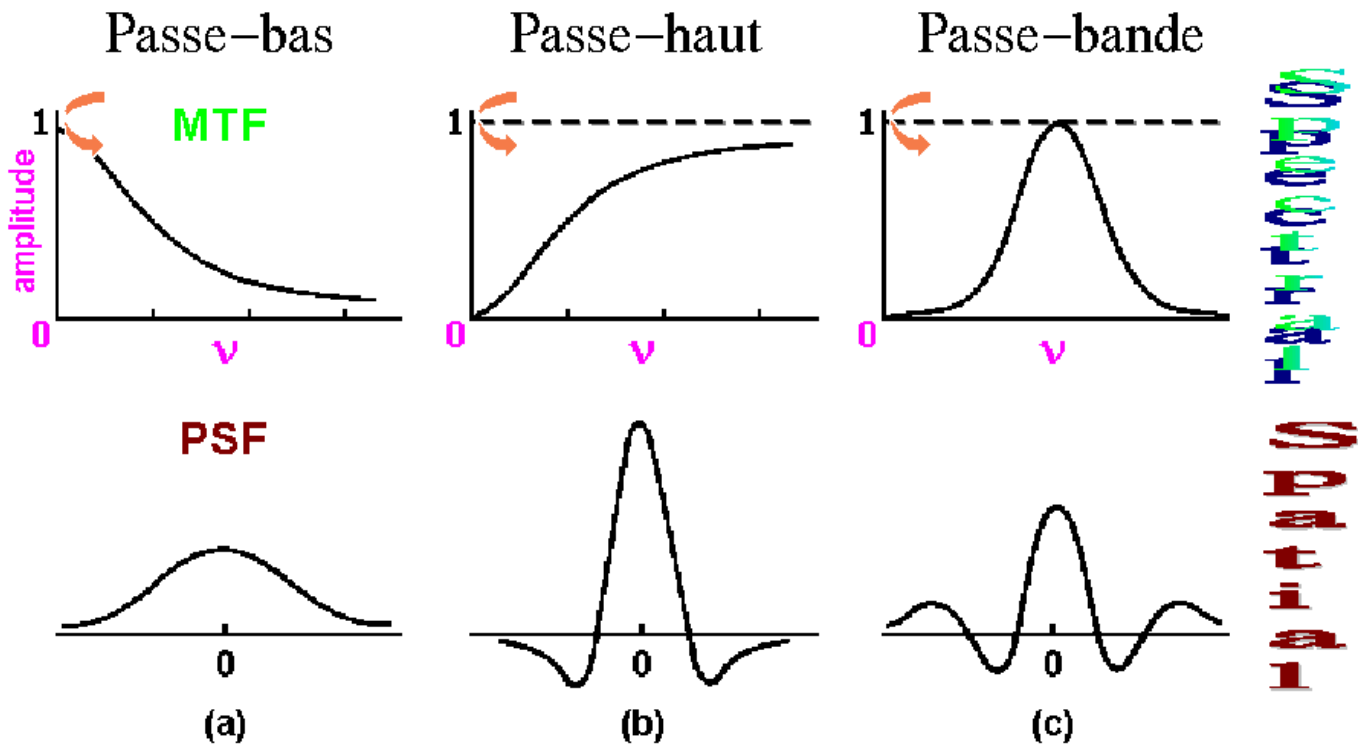
donc, si  $f(x, y)$  est l'image à filtrer (ou à rehausser) et  $g(x, y)$ , le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x, y) * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{f(x, y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x, y)\}}_{G(u, \nu)} \right\}$$

# FILTRAGE SPATIALE

## INTRODUCTION

### Trois Types de Filtrage



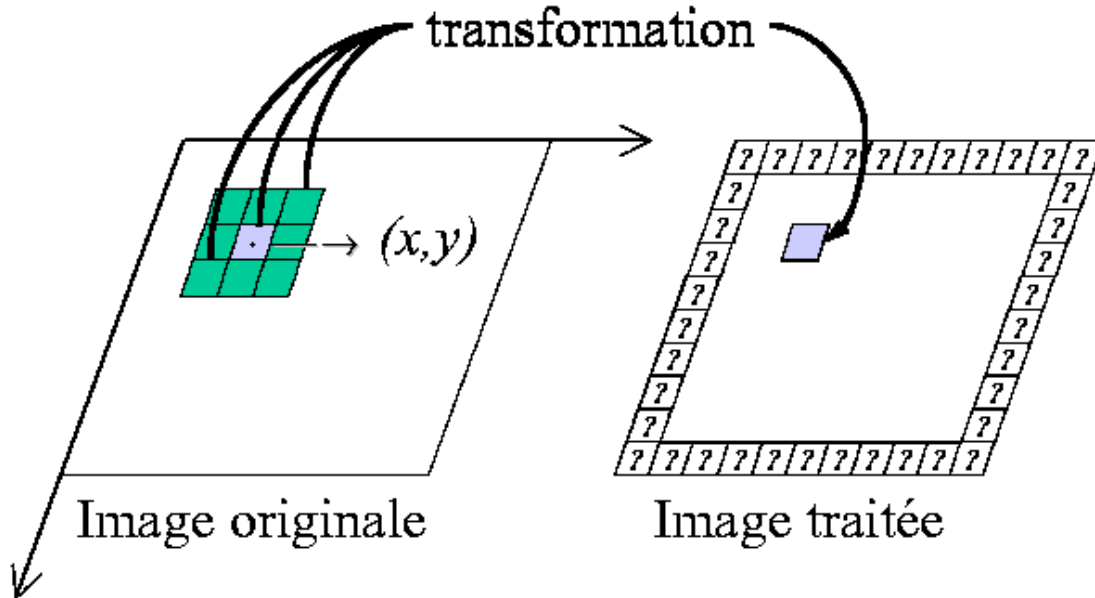
- **PSF** : Point Spread Function (ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function (ou Fonction de Transfert)
- ▶ **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ **Filtre Passe-haut** : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ **Filtre Passe-bande** : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

# FILTRAGE SPATIALE

## CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL-

### Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point  $(x, y)$



?: effet de bord => périodicité, miroir, extérieur=0  
ou on ne filtre pas les bords...

### Exemple

		<b>16</b>	<b>0</b>	<b>16</b>					
		<b>16</b>	<b>16</b>	<b>16</b>					
		<b>16</b>	<b>16</b>	<b>16</b>					

\* (1/16)

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>4</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>

=

		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>			
		<b>3</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>3</b>			
		<b>4</b>	<b>11</b>	<b>14</b>	<b>11</b>	<b>4</b>			
		<b>3</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>9</b>	<b>3</b>			
		<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>1</b>			

# FILTRAGE SPATIALE

## CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL-

$$g(x, y) = (f * \text{filtre})(x, y) = \sum_i \sum_j f(x - i, y - j) \text{filtre}(i, j)$$

### Remarque

- Généralement le masque est de dimension ( $DF$ ) impair et symétrique. Dans ce cas

$$(f * \text{filtre})(x, y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x + i, y + j) \text{filtre}(i, j)$$

***Filtre(i, j)***

<b><i>w1</i></b>	<b><i>w2</i></b>	<b><i>w3</i></b>	} <b><i>DF=3</i></b>
<b><i>w4</i></b>	<b><i>w5</i></b>	<b><i>w6</i></b>	
<b><i>w7</i></b>	<b><i>w8</i></b>	<b><i>w9</i></b>	

***Filtre(0,0)=w5***

$$\begin{aligned} g(x, y) &= w_1 f(x - 1, y - 1) + w_2 f(x, y - 1) + w_3 f(x + 1, y - 1) \\ &+ w_4 f(x - 1, y) + w_5 f(x, y) + w_6 f(x + 1, y) \\ &+ w_7 f(x - 1, y + 1) + w_8 f(x, y + 1) + w_9 f(x + 1, y + 1) \end{aligned}$$

- Afin de conserver la moyenne de l'image  $f(x, y)$ , la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e.,  $\sum_i w_i = 1$ )

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)

$1/9$  \*

<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

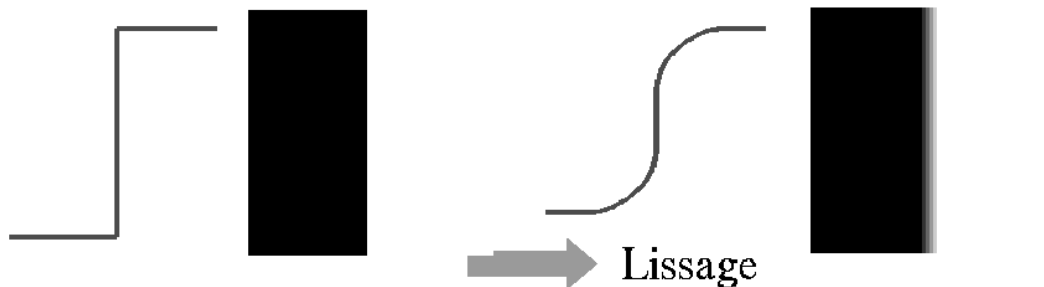
*Filtre 3x3*

$1/25$  \*

<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

*Filtre 5x5*

### Exemple

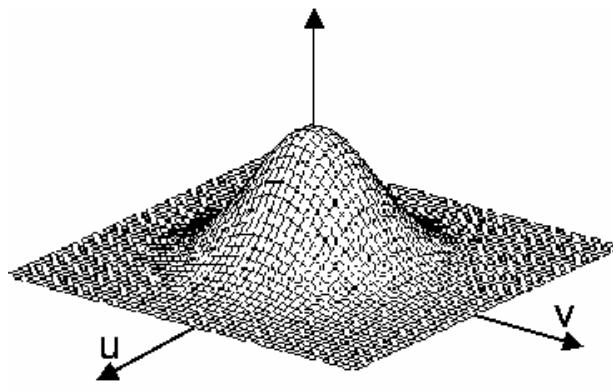


► **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

$$\text{Gaussienne}(x,y) = \exp(-\pi(x^2 + y^2)/\sigma^2)$$



$$(1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

### Remarque

Idéalement on devrait prévoir un filtre (ou masque) de taille  $(6\sigma + 1) \times (6\sigma + 1)$

# FILTRAGE SPATIALE

## AUTRES FILTRES PASSE-BAS

### Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binôme de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur  $(1/16)(1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$ . Le filtre 2D est

$$\frac{1}{256}$$

<b>1</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>1</b>
<b>4</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>16</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>24</b>	<b>36</b>	<b>24</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>16</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>1</b>

### Filtre Pyramidal

$$\frac{1}{81}$$

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>

### Filtre Conique

$$\frac{1}{25}$$

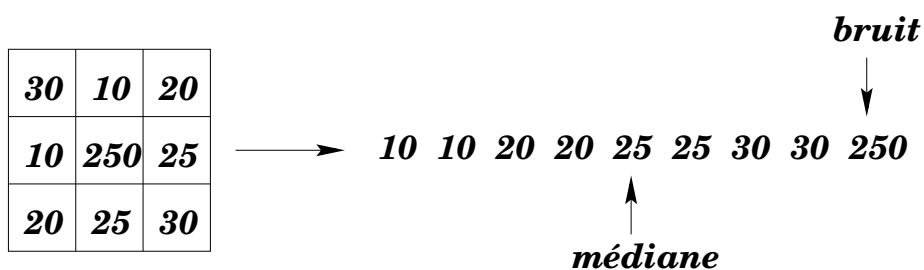
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE MÉDIAN (1)

$$g(x, y) = \text{médian} \left\{ f(n, m) \right\}_{(n, m) \in S}$$

( $S$  voisinage de  $(x, y)$ )



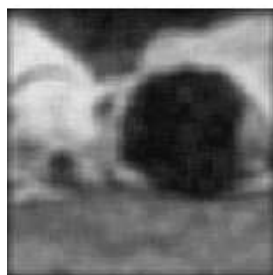
Utile pour contrer l'effet d'un bruit Poivre & Sel (faux "0" et "255" dans l'image)



3 X 3 Average



5 X 5 Average



7 X 7 Average

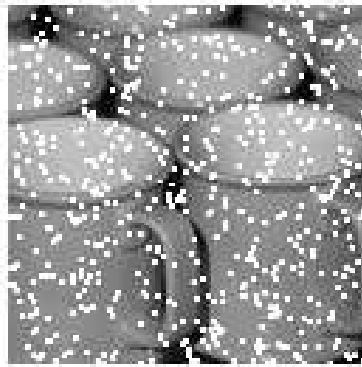


Median

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE MÉDIAN (2)

- Exemple de bruit P & S avec gros agrégats -



Large Noise



Median



Median x 2



Median x 4



Median x 8



Median x 6



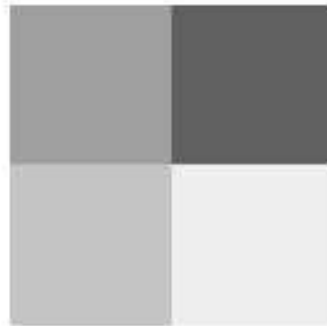
Median x 7

Si le bruit P & S est supérieur à la moitié de la dimension du filtre ► filtrage inefficace.

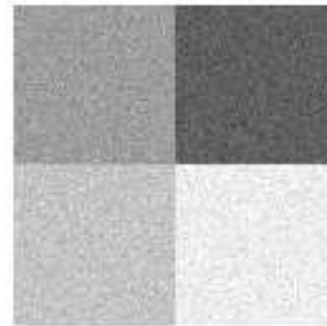
# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE ADAPTATIF

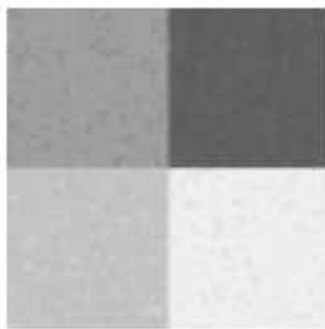
$$g(x, y) = \begin{cases} \text{filtre PB}[f(x, y)] & \text{si } |\text{filtrePB}[f(x, y)] - f(x, y)| < \text{seuil} \\ f(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$



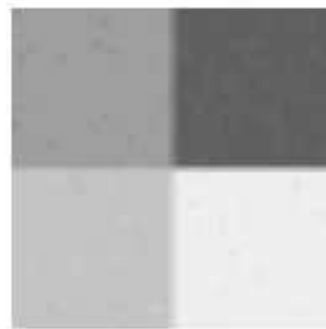
Original



Original+Delta Noise



3x3 Average



5x5 Average



9x9 Average



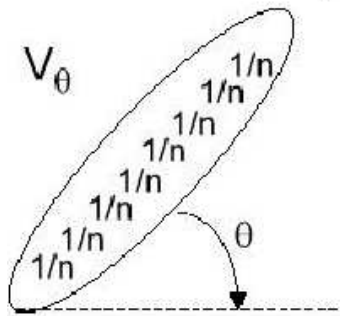
15x15 Average



Adaptive 9x9 Average  
T=25

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE DIRECTIONNEL



- Trouver le voisinage orienté tq

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta} |f(x, y) - f * V_{\theta}(x, y)|$$

- Calculer la moyenne (ou autre) suivant  $V_{\theta}$

$$g(x, y) = f * V_{\theta_0}(x, y)$$

Image bruitée originale



4 × 4

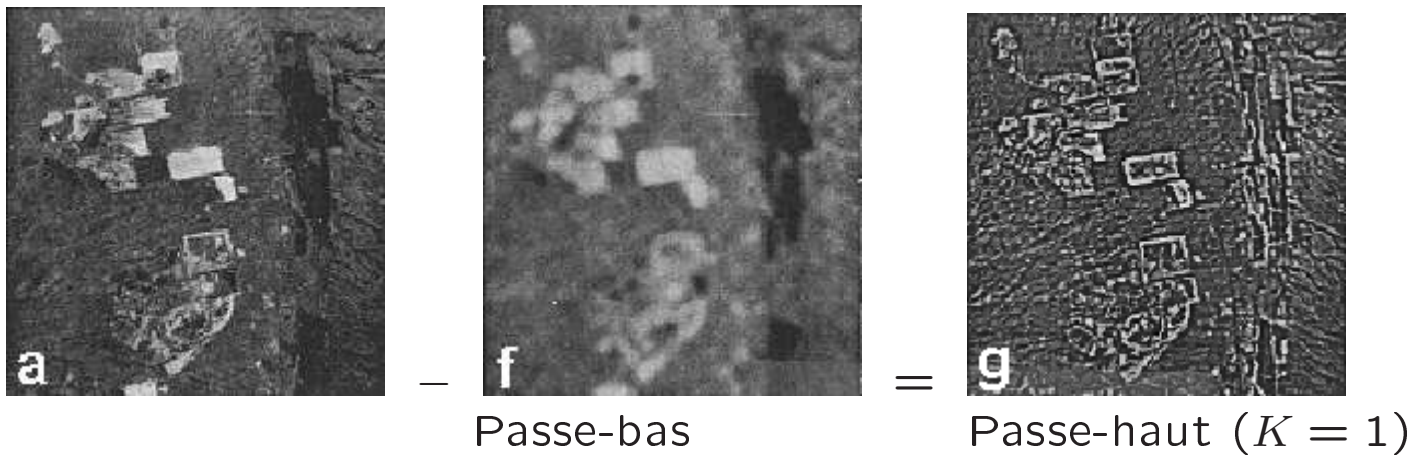
7 × 2



# FILTRAGE SPATIALE

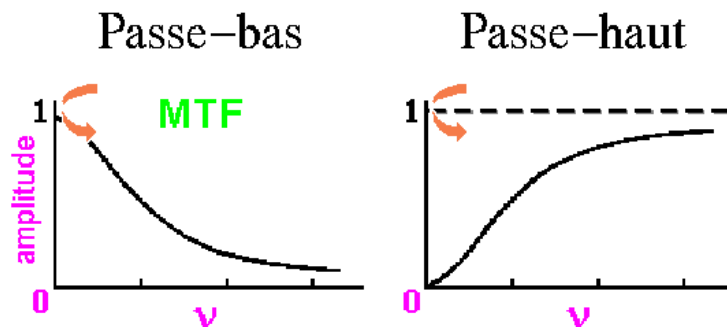
## FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"



High boost =  $K(\text{original}) - \text{Passe-bas}(\text{original})$

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= Kf(x, y) - f(x, y) * h(x, y) \\
 &= (K - 1)f(x, y) + (f(x, y) * \delta(x, y)) - f(x, y) * h(x, y) \\
 &= (K - 1)f(x, y) + f(x, y) * (\delta(x, y) - h(x, y)) \\
 \Downarrow \mathcal{F} \\
 G(u, v) &= (K - 1)F(u, v) + F(u, v) \underbrace{[1 - H(u, v)]}_{\text{Passe-haut}}
 \end{aligned}$$



- $K = 1$  Passe-haut
- $K > 1$  Rehaussement de Contour

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3 × 3 -

$$\delta(x, y) - h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Filtre 5 × 5 -

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

### Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{1} \right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \left\{ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{25} \right\}$$

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

### Détection de Point

Convolution avec

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

- Grande valeur positive ► point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ► point noir sur fond blanc

- Exemple -

5	5	5	5	5
5	5	5	100	5
5	5	5	5	5

 \* 

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

 = 

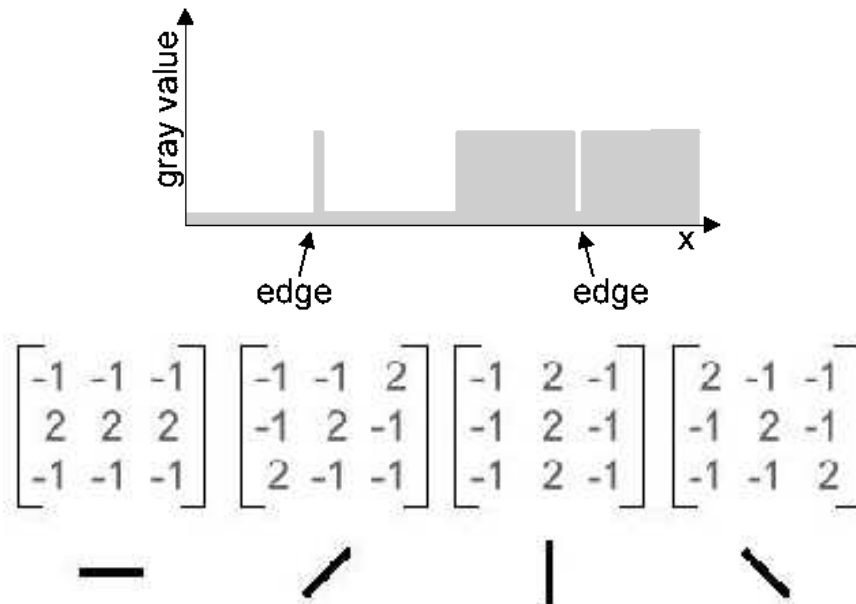
0	0	-95	-95	-95
0	0	-95	760	-95
0	0	-95	-95	-95

# FILTRAGE SPATIALE

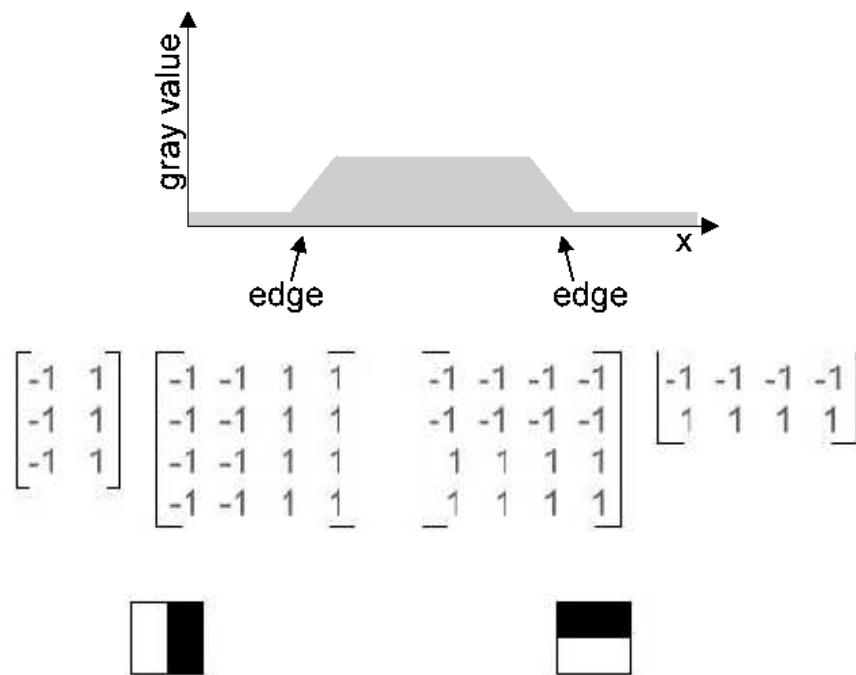
## FILTRE PASSE-HAUT -MASQUE DE DÉTECTION-

### Détection des contours

- Contour d'une ligne -



- Contour d'un objet -



# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

### Le Gradient

- Soit  $f(x, y)$ , alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Magnitude du Gradient

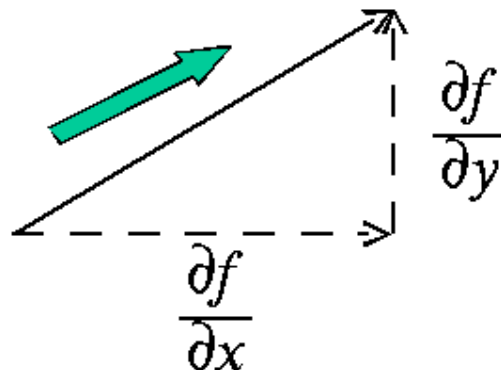
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)$$



# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

### Approximation du Gradient (en $x$ )

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$  ► Masque de convolution ► 

1	-1
---	----

 ou 

-1	1
----	---

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{2\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$  ► Masque de convolution ► 

1	0	-1
---	---	----

### Approximation du Gradient (en $y$ )

Masque de convolution ► 

1
-1

 ou 

-1
1

 ou 

-1	0	1
0	0	0
1	0	-1

 ou 

1	0	-1
0	0	0
-1	0	1

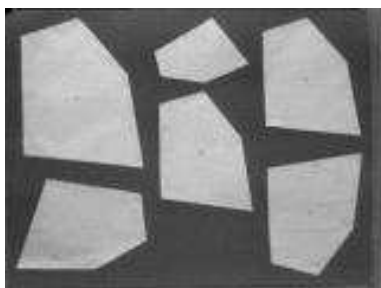
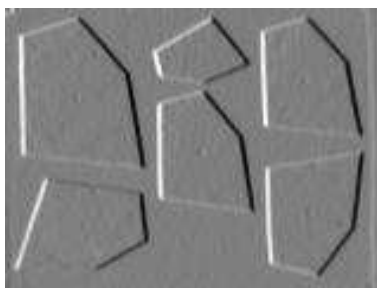
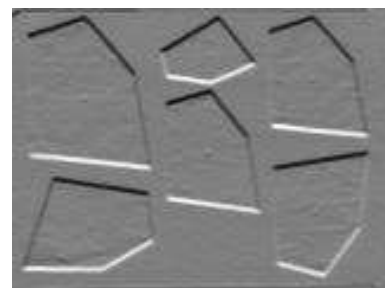


Image original



Gradient en x



Gradient en y

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

### Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x - 1, y - 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x - 1, y) - f(x, y - 1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

1	0
0	-1

 et
 

0	1
-1	0

► Sensible au bruit

### Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

 et
 

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

1
1
1

-1	0	1
----	---	---

 et
 

-1
0
1

1	1	1
---	---	---

Filtre Gaussien + Gradient = Filtre de Sobel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

 et
 

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

Exemple



(a)



(b)



(c)



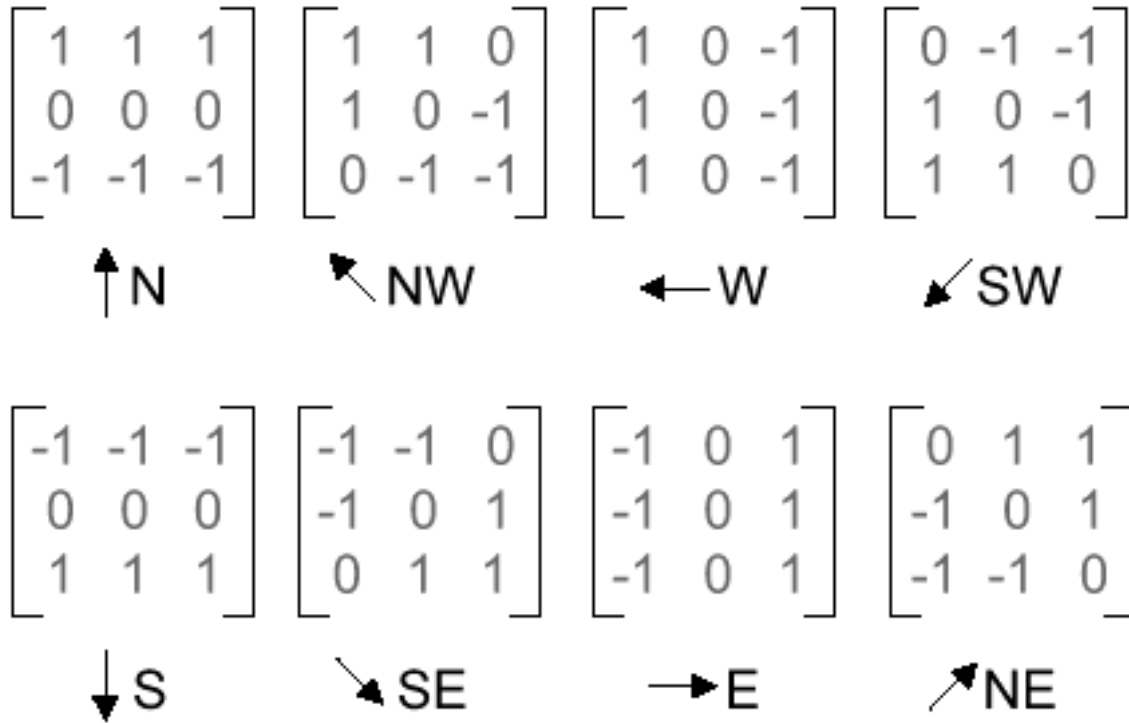
(d)

- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient  $> 10\%I_{max}$  ( $= 25$ ) ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient  $< 25\%I_{max}$  ont été mis à 0 (image binaire)

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

### Filtres compas



Le gradient est défini par

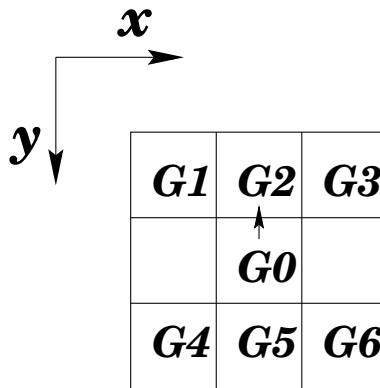
$$g(x, y) = \max_k |g_k(x, y)|$$

►  $k$  donne l'orientation du gradient

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (6)

### Décision Contour



- $G_0$  contour si  $|G_0| > \text{seuil}$
- $G_0$  contour si  $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$  ou  $G_0$  contour si  $\begin{cases} G_2 < G_0 > G_5 \\ G_1 < G_0 > G_6 \\ G_3 < G_0 > G_4 \end{cases}$
- Seuillage par hystérésis

On définit deux seuils  $S_b$  (seuil bas) et  $S_h$  (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

### Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f''(x, y) &= f'(x + 1, y) - f'(x, y) \\ &= [f(x + 1, y) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x - 1, y)] \\ &= f(x + 1, y) - 2f(x, y) + f(x - 1, y) \end{aligned}$$

Convolution avec le masque ► 

1	-2	1
---	----	---

- Par convolution répétée -

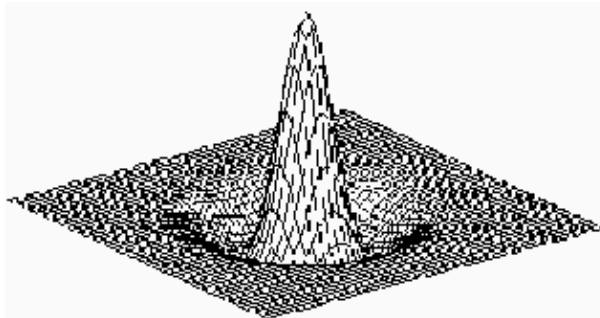
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

### Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad \blacktriangleright \quad [1 \quad -2 \quad 1] + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

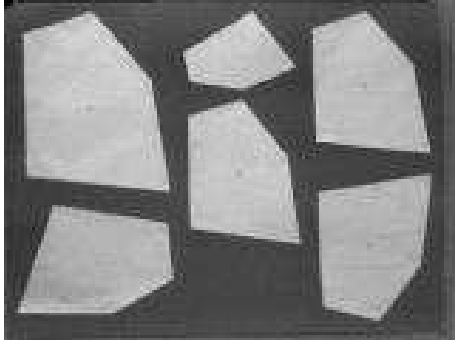
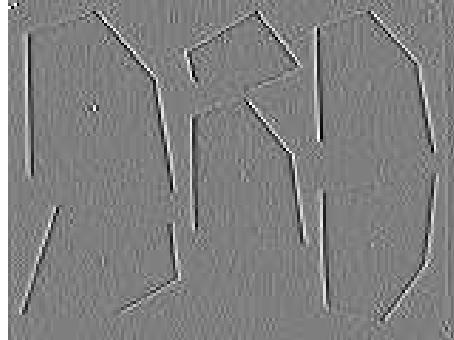
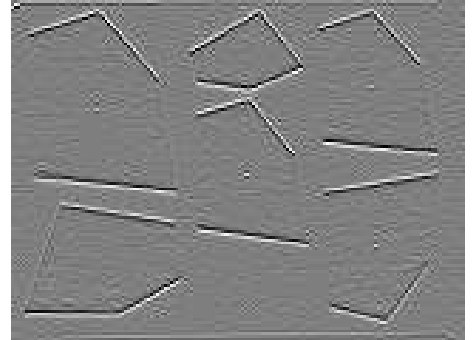


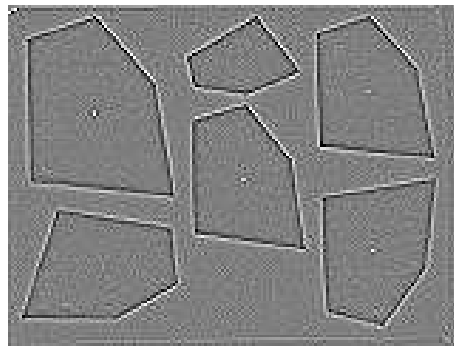
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

$$1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

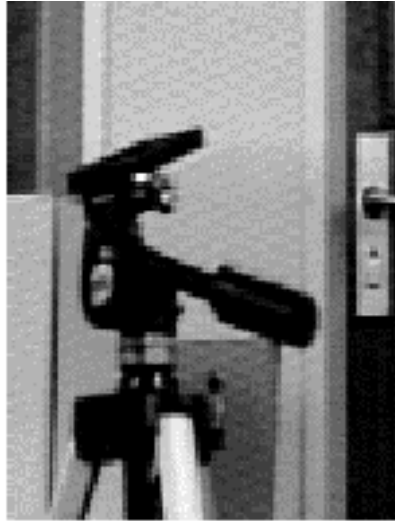
Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$1/4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

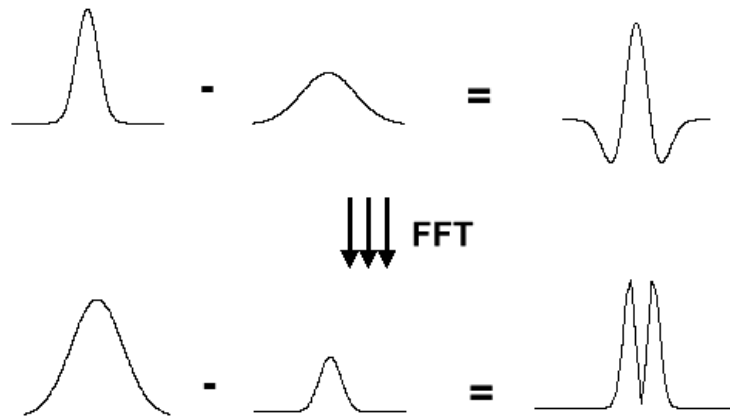
1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée



# FILTRAGE SPATIALE

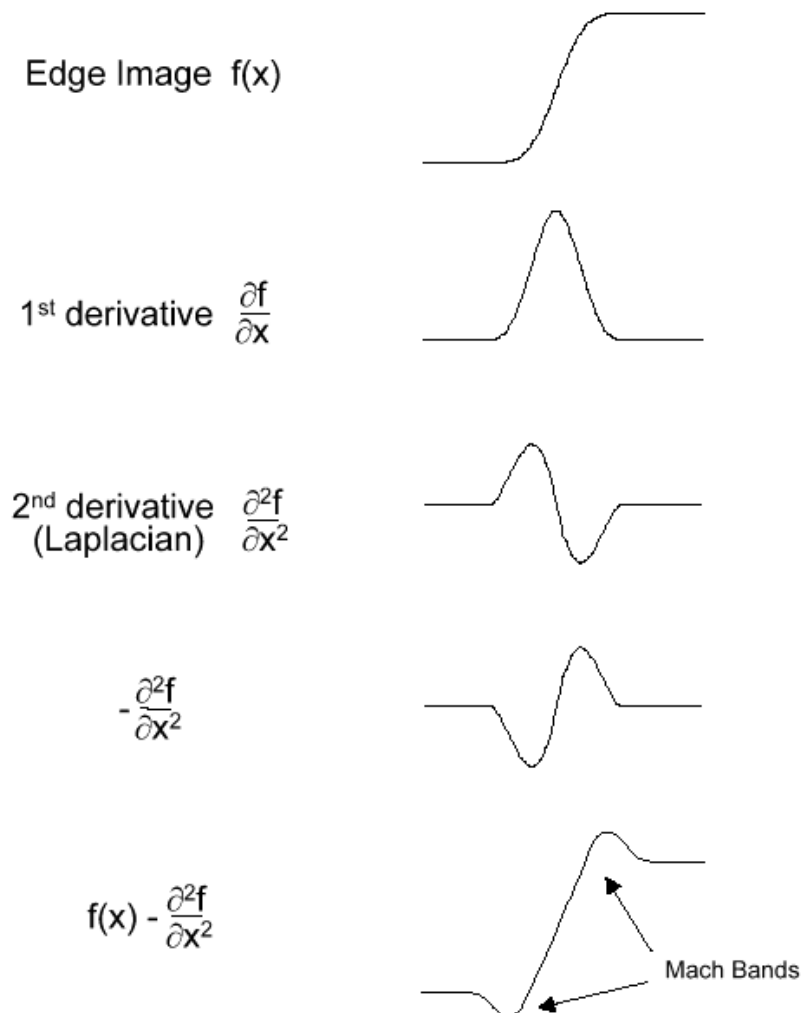
## FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth  $\approx$  Différence de deux Gaussienne



► Filtre Passe-bande

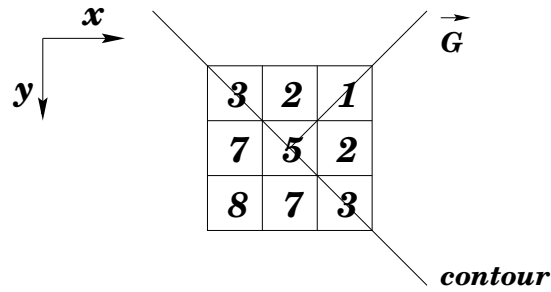
Rehaussement des contours avec le Laplacien



# FILTRAGE SPATIALE

## EXERCICE

### Exercice 1



convoluée par l'op. gradient en  $x$  ► 

-1	0	1
----	---	---

 et  $y$ 

-1
0
1

on trouve, pour le pixel du milieu  $G_y = -5$  et  $G_x = 5$ .  
Donc,  $|\vec{G}| = 10$  et  $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

### Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur

de convolution 

1	-3	1
-3	9	-3
1	-3	1

.

Filtre séparable ► 

-1
3
-1

-1	3	-1
----	---	----

$$\begin{aligned}
 H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x) \\
 &= -\exp(2\pi j u) + 3 - \exp(-2\pi j u) = 3 - 2 \cos(2\pi u)
 \end{aligned}$$

