



DIRO
IFT 6150

TRAITEMENT D'IMAGES FILTRAGE SPATIAL

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

FILTRAGE SPATIALE

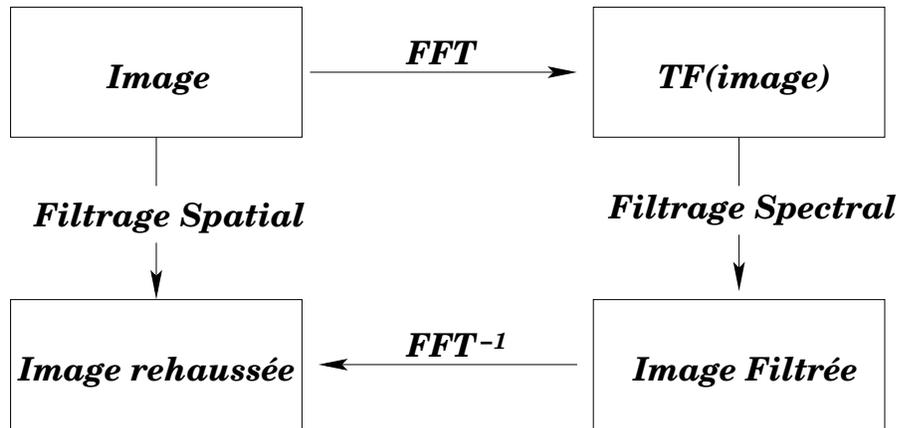
SOMMAIRE

Introduction	2
Convolution Discrète 2D -Rappel-	4
Filtre de Moyenne (Passe-bas)	6
Filtre Gaussien (Passe-bas)	7
Autres Filtres Passe-bas	8
Filtre Médian	9
Filtre Adaptatif	11
Filtre Directionnel	12
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique-.....	14
Filtre Passe-haut -Masque de Détection-	16
Filtre Passe-haut -Gradient-	17
Décision Contour	22
Filtre Passe-haut -Laplacien-	23
Filtre de Marr-Hildreth	25
Rehaussement des Contours	26
Exercices	27

FILTRAGE SPATIALE

INTRODUCTION

Rehaussement d'Images par Filtrage Spatial/Fréquentiel



Théorème de Convolution -Rappel-

$$\begin{aligned} f(x, y) * g(x, y) &\leftrightarrow F(u, \nu) \cdot G(u, \nu) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) &\leftrightarrow F(u, \nu) * G(u, \nu) \end{aligned}$$

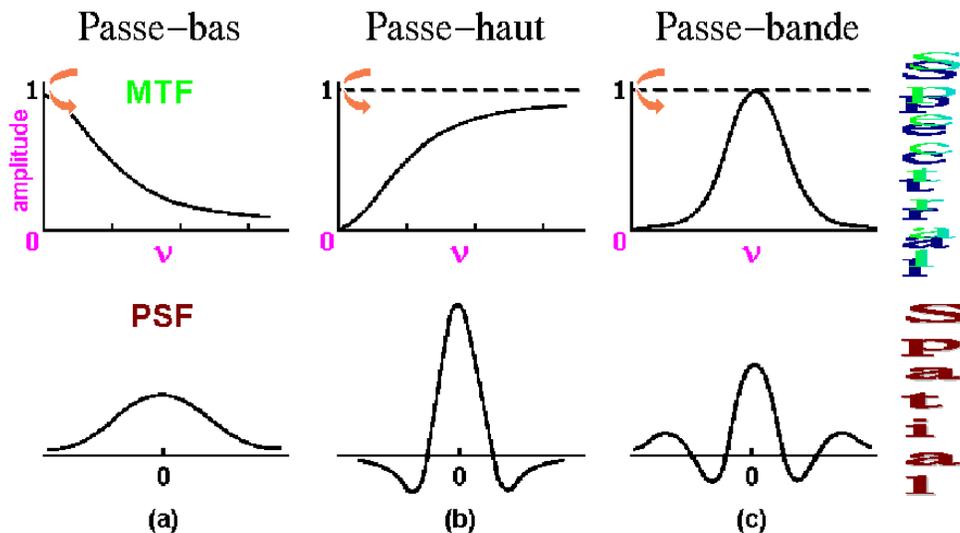
donc, si $f(x, y)$ est l'image à filtrer (ou à rehausser) et $g(x, y)$, le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x, y) * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{f(x, y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x, y)\}}_{G(u, \nu)} \right\}$$

FILTRAGE SPATIALE

INTRODUCTION

Trois Types de Filtrage



- **PSF** : Point Spread Function (ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function (ou Fonction de Transfert)
- ▶ **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ **Filtre Passe-haut** : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ **Filtre Passe-bande** : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

FILTRAGE SPATIALE

CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL-

$$g(x, y) = (f * \text{filtre})(x, y) = \sum_i \sum_j f(x - i, y - j) \text{filtre}(i, j)$$

Remarque

- Généralement le masque est de dimension (DF) impair et symétrique. Dans ce cas

$$(f * \text{filtre})(x, y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x + i, y + j) \text{filtre}(i, j)$$

Filtre(i, j)

<i>w1</i>	<i>w2</i>	<i>w3</i>	}	<i>DF=3</i>
<i>w4</i>	<i>w5</i>	<i>w6</i>		
<i>w7</i>	<i>w8</i>	<i>w9</i>		

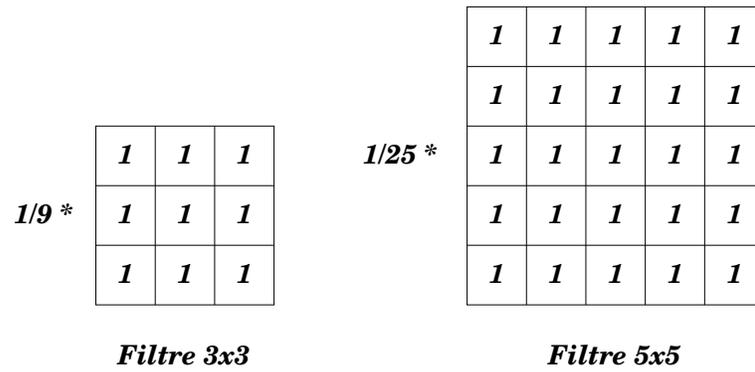
$$\mathbf{Filtre(0,0)=w5}$$

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= w_1 f(x - 1, y - 1) + w_2 f(x, y - 1) + w_3 f(x + 1, y - 1) \\
 &+ w_4 f(x - 1, y) + w_5 f(x, y) + w_6 f(x + 1, y) \\
 &+ w_7 f(x - 1, y + 1) + w_8 f(x, y + 1) + w_9 f(x + 1, y + 1)
 \end{aligned}$$

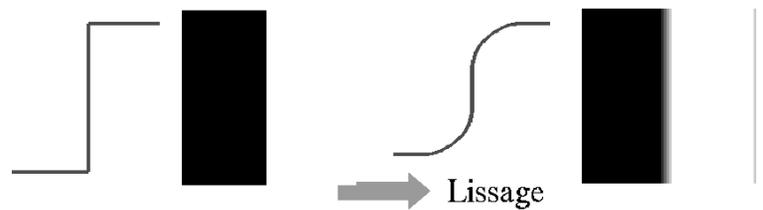
- Afin de conserver la moyenne de l'image $f(x, y)$, la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e., $\sum_i w_i = 1$)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)



Exemple

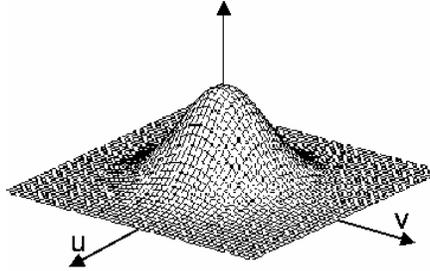


► **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

$$\text{Gaussienne}(x,y) = \exp(-\pi(x^2 + y^2)/\sigma^2)$$



$$(1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Idéalement on devrait prévoir un filtre (ou masque) de taille $(6\sigma + 1) \times (6\sigma + 1)$

FILTRAGE SPATIALE

AUTRES FILTRES PASSE-BAS

Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binome de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur $(1/16)(1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$. Le filtre 2D est

$$\frac{1}{256}$$

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

Filtre Pyramidal

$$\frac{1}{81}$$

1	2	3	2	1
2	4	6	4	2
3	6	9	6	3
2	4	6	4	2
1	2	3	2	1

Filtre Conique

$$\frac{1}{25}$$

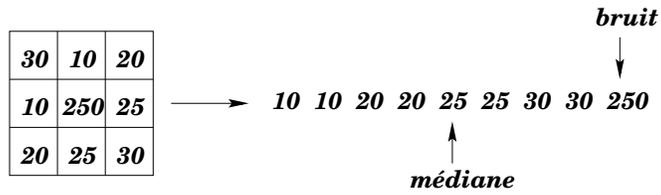
0	0	1	0	0
0	2	2	2	0
1	2	5	2	1
0	2	2	2	0
0	0	1	0	0

FILTRAGE SPATIALE

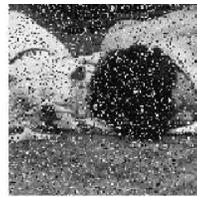
FILTRE MÉDIAN (1)

$$g(x, y) = \text{médian} \{f(n, m)\}_{(n, m) \in S}$$

(S voisinage de (x, y))



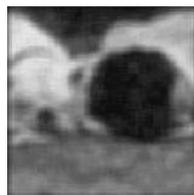
Utile pour contrer l'effet d'un bruit Poivre & Sel (faux "0" et "255" dans l'image)



3 X 3 Average



5 X 5 Average



7 X 7 Average

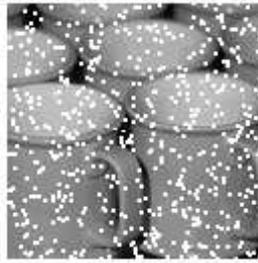


Median

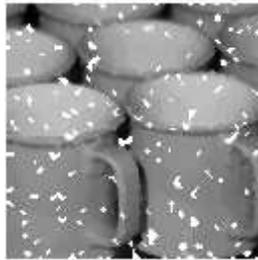
FILTRAGE SPATIALE

FILTRE MÉDIAN (2)

- Exemple de bruit P & S avec gros agrégats -



Large Noise



Median



Median x 2



Median x 4



Median x 8



Median x 6



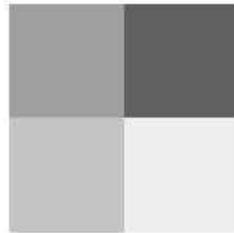
Median x 7

Si le bruit P & S est supérieur à la moitié de la dimension du filtre ► filtrage inefficace.

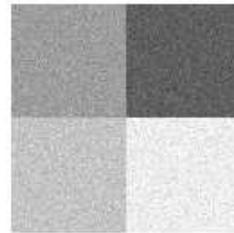
FILTRAGE SPATIALE

FILTRE ADAPTATIF

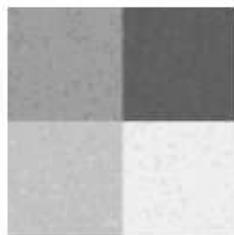
$$g(x, y) = \begin{cases} \text{filtre PB}[f(x, y)] & \text{si } |\text{filtrePB}[f(x, y)] - f(x, y)| < \text{seuil} \\ f(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$



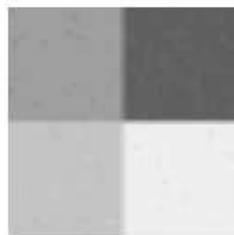
Original



Original+Delta Noise



3x3 Average



5x5 Average



9x9 Average



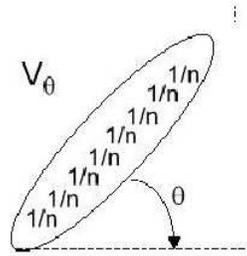
15x15 Average



Adaptive 9x9 Average
T=25

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE DIRECTIONNEL



- Trouver le voisinage orienté tq

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta} |f(x, y) - f * V_{\theta}(x, y)|$$

- Calculer la moyenne (ou autre) suivant V_{θ}

$$g(x, y) = f * V_{\theta_0}(x, y)$$

Image bruitée originale



4×4

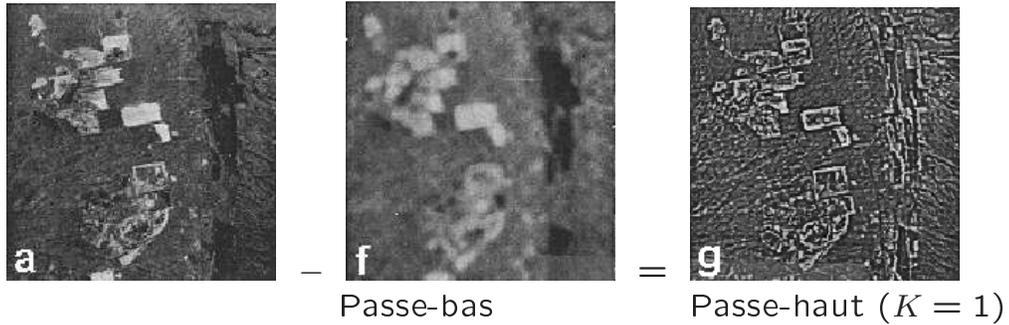
7×2



FILTRAGE SPATIALE

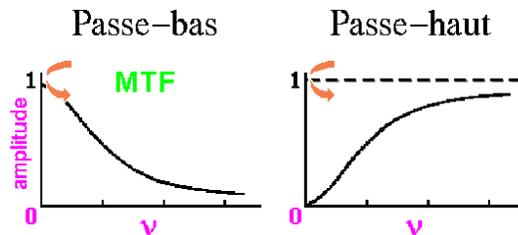
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"



High boost = $K(\text{original}) - \text{Passe-bas}(\text{original})$

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= Kf(x, y) - f(x, y) * h(x, y) \\
 &= (K - 1)f(x, y) + (f(x, y) * \delta(x, y)) - f(x, y) * h(x, y) \\
 &= (K - 1)f(x, y) + f(x, y) * (\delta(x, y) - h(x, y)) \\
 &\quad \updownarrow \mathcal{F} \\
 G(u, v) &= (K - 1)F(u, v) + F(u, v) \underbrace{[1 - H(u, v)]}_{\text{Passe-haut}}
 \end{aligned}$$



- $K = 1$ Passe-haut
- $K > 1$ Rehaussement de Contour

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3 × 3 -

$$\delta(x, y) - h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Filtre 5 × 5 -

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{1} \right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \left\{ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{25} \right\}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

Détection de Point

Convolution avec

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

- Grande valeur positive ► point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ► point noir sur fond blanc

- Exemple -

5	5	5	5	5
5	5	5	100	5
5	5	5	5	5

 *

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

 =

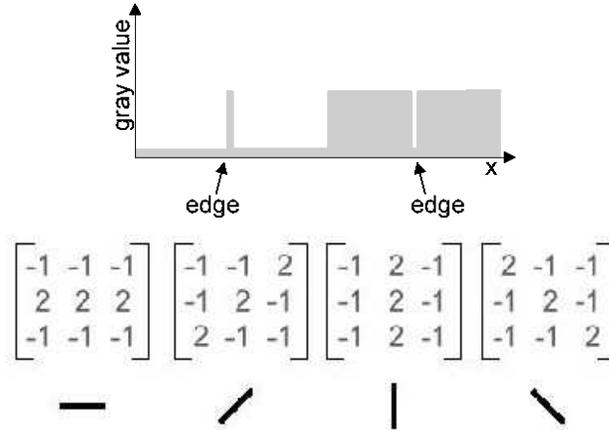
0	0	-95	-95	-95
0	0	-95	760	-95
0	0	-95	-95	-95

FILTRAGE SPATIALE

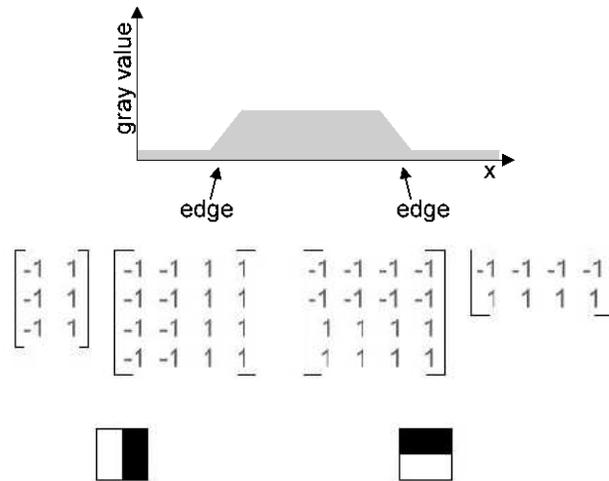
FILTRE PASSE-HAUT - MASQUE DE DÉTECTION-

Détection des contours

- Contour d'une ligne -



- Contour d'un objet -



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

Le Gradient

- Soit $f(x, y)$, alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Magnitude du Gradient

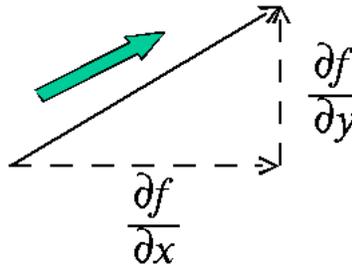
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)$$



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

Approximation du Gradient (en x)

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$ ► Masque de convolution ►

1	-1
---	----

 ou

-1	1
----	---

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{2\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$ ► Masque de convolution ►

1	0	-1
---	---	----

Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution ►

1
-1

 ou

-1
1

 ou

-1	0
0	1

 ou

1	0
0	-1

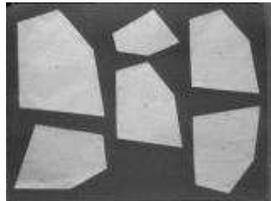
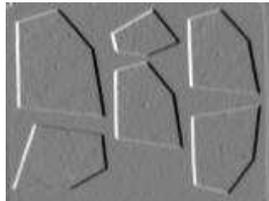
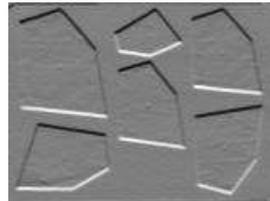


Image original



Gradient en x



Gradient en y

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x - 1, y - 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x - 1, y) - f(x, y - 1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

► Sensible au bruit

Filtre de Prewitt

Filtre Moyonneur + Gradient

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Filtre Gaussien + Gradient = Filtre de Sobel

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

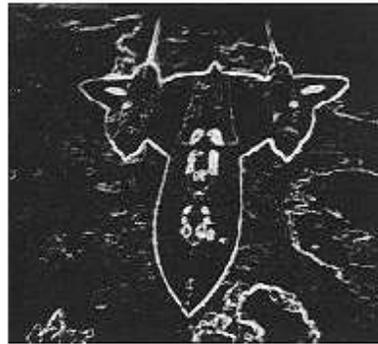
FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

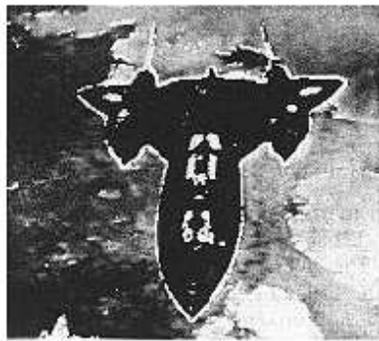
Exemple



(a)



(b)



(c)



(d)

- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient $> 10\%I_{max}(= 25)$ ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient $< 25\%I_{max}$ ont été mis à 0 (image binaire)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

Filtres compas

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \text{N} & \swarrow \text{NW} & \leftarrow \text{W} & \swarrow \text{SW} \\ \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow \text{S} & \searrow \text{SE} & \rightarrow \text{E} & \nearrow \text{NE} \end{array}$$

Le gradient est défini par

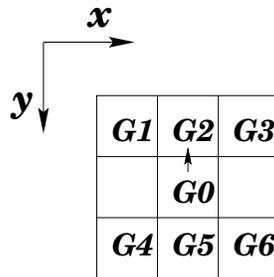
$$g(x, y) = \max_k |g_k(x, y)|$$

► k donne l'orientation du gradient

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (6)

Décision Contour



- G_0 contour si $|G_0| > \text{seuil}$
- G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$ ou G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 > G_5 \\ G_1 < G_0 > G_6 \\ G_3 < G_0 > G_4 \end{cases}$
- Seuillage par hystéresis

On définit deux seuils S_b (seuil bas) et S_h (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= f''(x, y) = f'(x + 1, y) - f'(x, y) \\ &= [f(x + 1, y) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x - 1, y)] \\ &= f(x + 1, y) - 2f(x, y) + f(x - 1, y)\end{aligned}$$

Convolution avec le masque ►

1	-2	1
---	----	---

- Par convolution répétée -

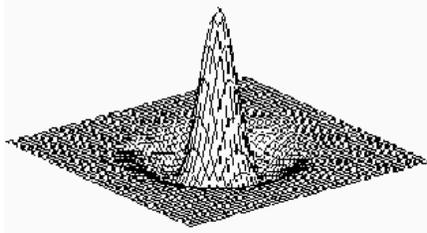
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad \blacktriangleright \quad [1 \quad -2 \quad 1] + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

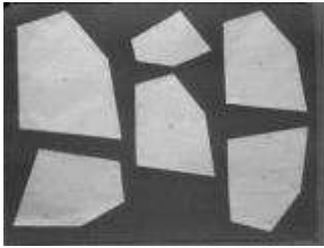
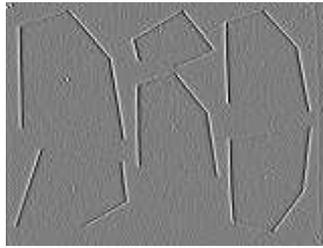
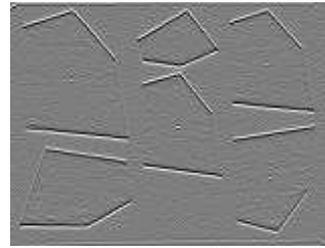


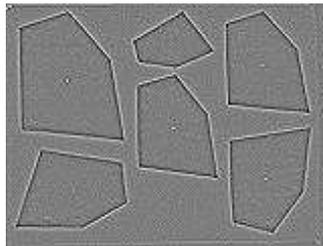
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

$$1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

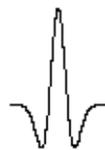
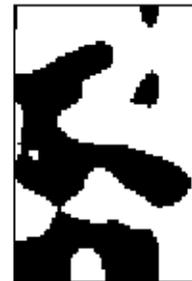
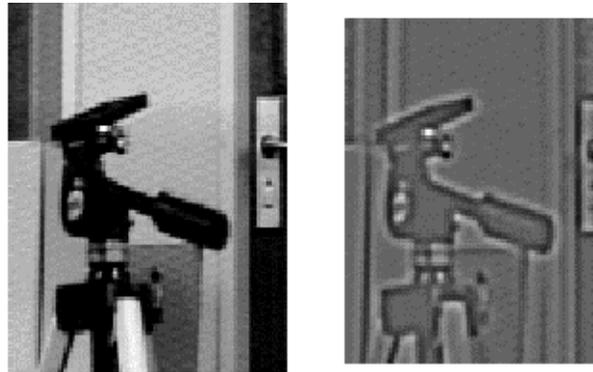
Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$1/4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

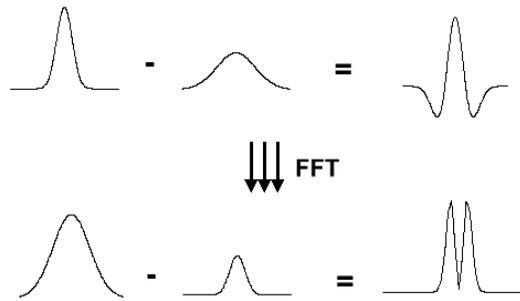
1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée



FILTRAGE SPATIALE

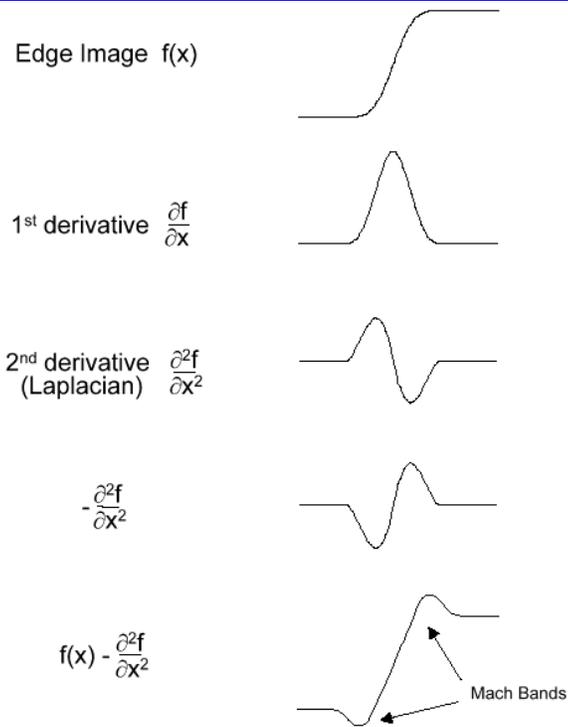
FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth \approx Différence de deux Gaussienne



► Filtre Passe-bande

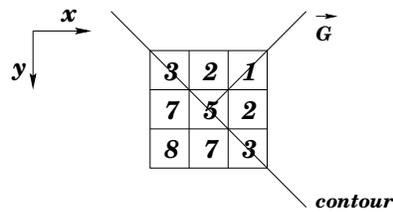
Rehaussement des contours avec le Laplacien



FILTRAGE SPATIALE

EXERCICE

Exercice 1



convoluée par l'op. gradient en $x \blacktriangleright$

-1	0	1
----	---	---

 et y

-1
0
1

on trouve, pour le pixel du milieu $G_y = -5$ et $G_x = 5$.
Donc, $|\vec{G}| = 10$ et $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur

de convolution

1	-3	1
-3	9	-3
1	-3	1

.

Filtre séparable \blacktriangleright

-1
3
-1

-1	3	-1
----	---	----

$$\begin{aligned}
 H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x) \\
 &= -\exp(2\pi j u) + 3 - \exp(-2\pi j u) = 3 - 2 \cos(2\pi u)
 \end{aligned}$$

