



DIRO  
IFT 6150

## TRAITEMENT D'IMAGES CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.  
Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)  
E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE SOMMAIRE

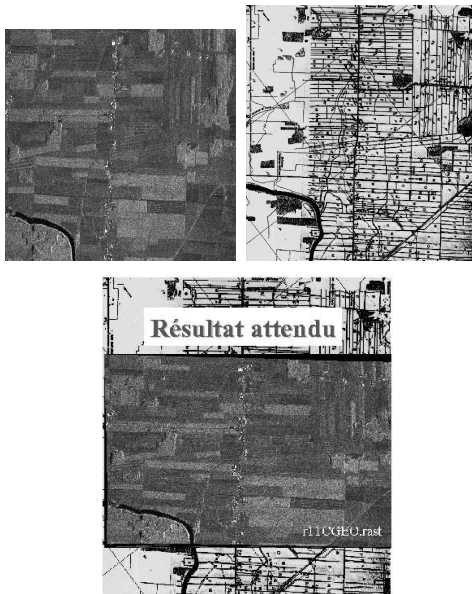
Exemples .....	2
Transformations Géométriques .....	3
Interpolation Directe .....	4
Interpolation Bilinéaire .....	6
Autres Interpolations .....	8
Tomographie .....	9

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE EXEMPLES

### Exemples de distorsions géométriques



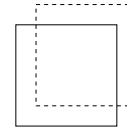
### Exemples de corrections géométriques



2

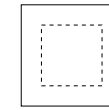
## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

### Translation



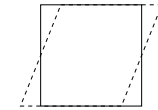
$$\begin{aligned}x' &= a + x \\y' &= b + y\end{aligned}$$

### Echelle



$$\begin{aligned}x' &= a x \\y' &= b y\end{aligned}$$

### Inclinaison



$$\begin{aligned}x' &= x + a y \\y' &= y\end{aligned}$$

### Rotation

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

### Assignment des niveaux de gris

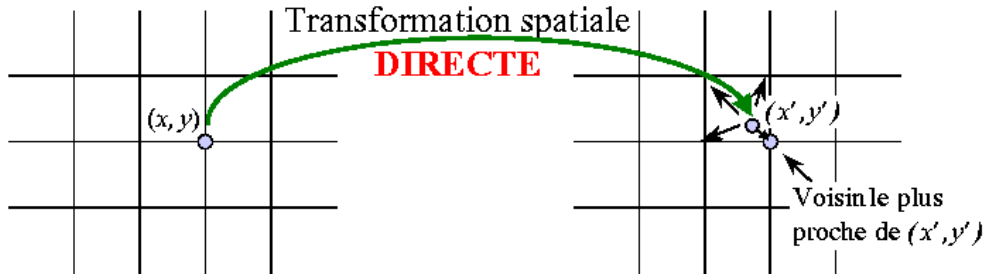
- Nécessaire car la position d'un pixel transformé n'est pas entière
- Interpolation au voisin le plus proche
- Interpolation bilinéaire
- Autres type d'interpolation



3

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE INTERPOLATION DIRECTE (1)

Transformée spatiale directe



*Image originale*

*Image transformée*

- Difficile de distribuer le niveau de gris sur les pixels voisins
  - Des “trous” peuvent apparaître car on n’a pas la certitude que tous les pixels de l’image transformée recevront une valeur

Exemple

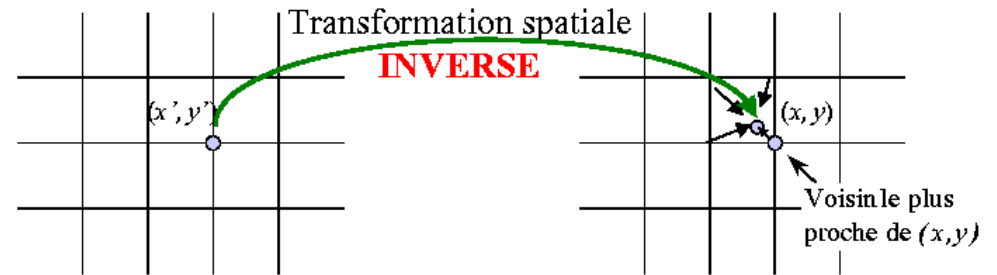
Transformation : Facteur d’échelle 10×

$A(x_0, y_0) \blacktriangleright A(x_0, y_0)$  et  $B(x_0 + 1, y_0) \blacktriangleright B(x_0 + 10, y_0)$

Mais entre  $A(x_0, y_0)$  et  $B(x_0 + 10, y_0)$  ?

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE INTERPOLATION DIRECTE (2)

Transformée spatiale inverse



*Image transformée*

*Image originale*

- Interpolation de la valeur du pixel à partir des voisins ► plus facile
  - Aucun “trou” car on parcourt tous les pixels de l’image transformée

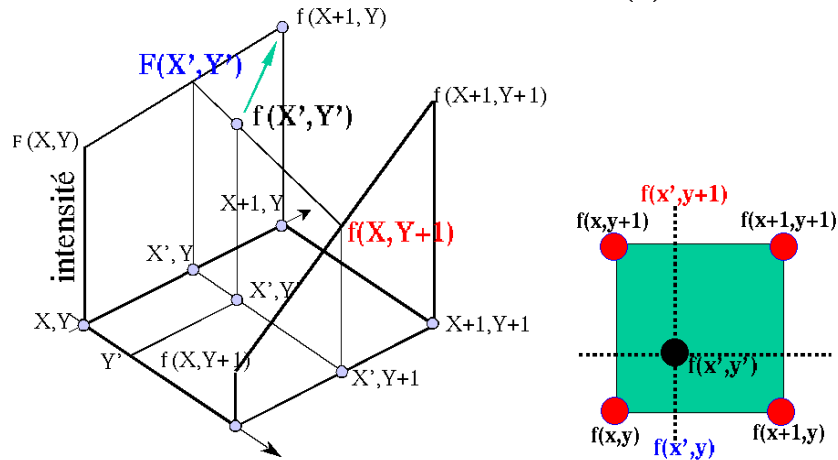
Exemple



512 × 512 ► 64 × 64

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

### INTERPOLATION BILINÉAIRE (1)



$$f(x, y) = ax + by + cxy + d$$

4 inconnus ► 4 points

#### Résolution du système

$$\begin{aligned} a &= f(x+1, y) - f(x, y) \\ b &= f(x, y+1) - f(x, y) \\ c &= f(x+1, y+1) + f(x, y) - f(x, y+1) - f(x+1, y) \\ d &= f(x, y) \end{aligned}$$

(4 Multiplications et 8 additions)

#### Implantation

$$\begin{aligned} f(x', y) &= f(x, y) + (x' - x)[f(x+1, y) - f(x, y)] \\ f(x', y+1) &= f(x, y+1) + (x' - x)[f(x+1, y+1) - f(x, y+1)] \\ f(x', y') &= f(x', y) + (y' - y)[f(x', y+1) - f(x', y)] \end{aligned}$$

(3 Multiplications et 6 additions)

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

### INTERPOLATION BILINÉAIRE (2)

#### Exemple

100	150	y+1
175	200	y
x	x+1	

Quel est la valeur interpolée en (x+0.7, y+0.2)?

- Interpolation au voisin le plus près : 200
- Interpolation bilinéaire

$$\begin{aligned} I(x', y) &= I(x, y) + [I(x+1, y) - I(x, y)](x' - x) \\ &= 175 + (200 - 175) \times 0.7 = 192.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(x', y+1) &= I(x, y+1) + [I(x+1, y+1) - I(x, y+1)](x' - x) \\ &= 100 + (150 - 100) \times 0.7 = 135 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(x', y') &= I(x', y) + [I(x', y+1) - I(x', y)](y' - y) \\ &= 192.5 + (135 - 192.5) \times 0.2 = 181 \end{aligned}$$

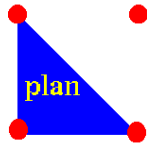
#### Exemple



512 × 512 ► 64 × 64

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE AUTRES INTERPOLATION

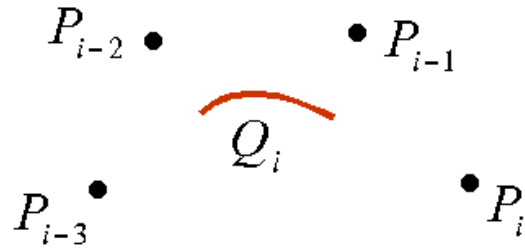
Interpolation linéaire



$$f(x, y) = ax + by + c$$

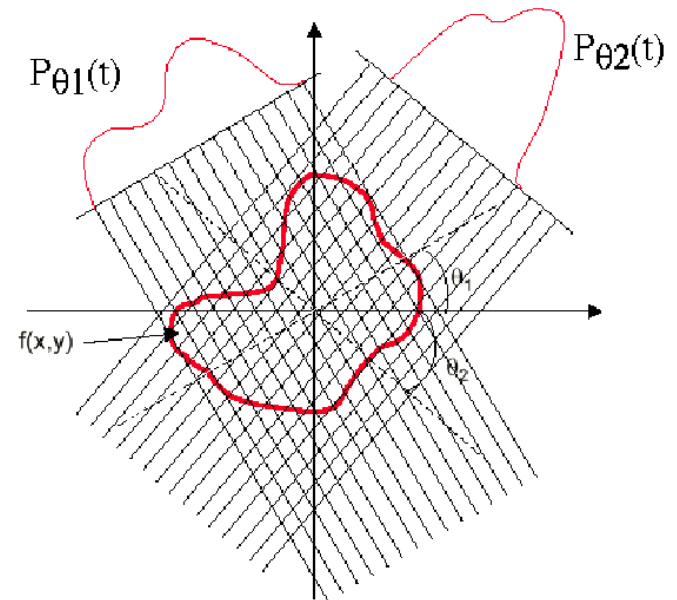
B-splines cubique

### B-Spline cubique



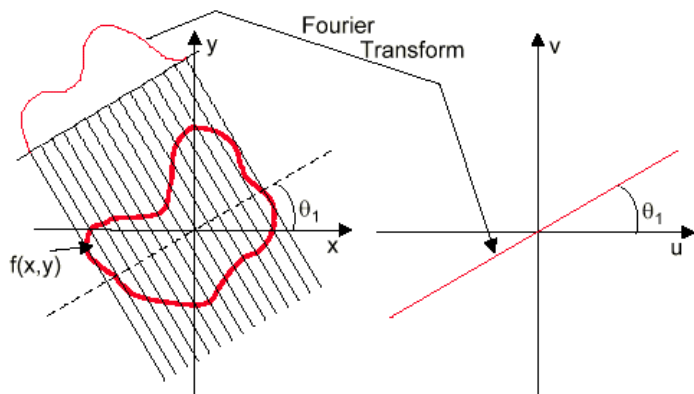
$$Q_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

## TOMOGRAPHIE RECONSTRUCTION À PARTIR DE PROJECTIONS



## TOMOGRAPHIE

### THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (1)



Considérons la Transformée de Fourier de  $f(x, y)$

$$F(u, \nu) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy$$

Que représente la ligne  $\nu = 0$  du spectre de Fourier ?

$$F(u, 0) = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] \exp(-2\pi j(ux)) dx$$

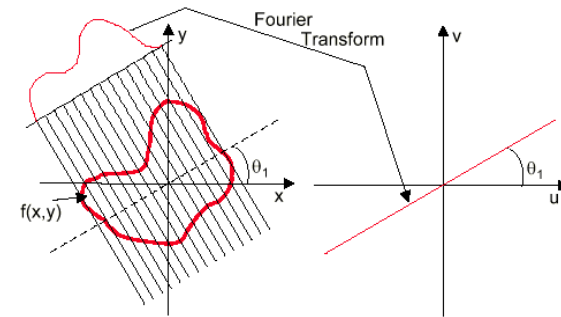
$$F(u, 0) = \mathcal{F}(p_{\theta=0^\circ}(t)) \text{ de même } F(0, \nu) = \mathcal{F}(p_{\theta=90^\circ}(t))$$

**Plus généralement, pour une projection de l'image suivant un angle  $\theta$  (i.e., suivant un axe de projection passant par l'origine et orienté selon un angle  $\theta$ )**

$$p_\theta(t) = \int_l f(x, y) dl$$

## TOMOGRAPHIE

### THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (2)



Une ligne de projection au point  $t$  est (cf. Hough)

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t$$

On obtient donc

$$p_\theta(t) = \iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

La TF de  $p_\theta(t)$  est

$$P_\theta(w) = \int p_\theta(t) \exp(-2\pi j w t) dt$$

$$P_\theta(w) = \int \left[ \iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \right] \exp(-2\pi j w t) dt$$

En utilisant la propriété du  $\delta$ , ( $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$ )

$$P_\theta(w) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j w [x \cos \theta + y \sin \theta]) dx dy$$

Sachant que la TF 2D est

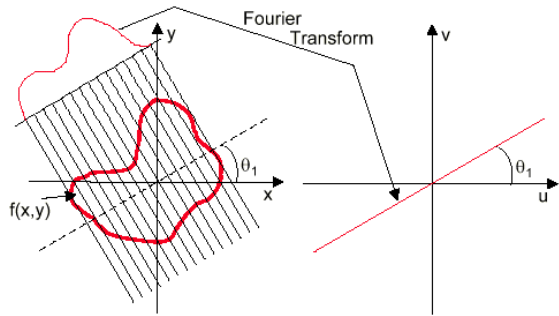
$$F(u, \nu) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy$$

## TOMOGRAPHIE

### THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (3)

Si on pose  $u = w \cos \theta$  et  $v = w \sin \theta$ , on a l'équation de l'axe de projection dans le domaine de Fourier

Donc à une ligne du spectre de Fourier d'orientation  $\theta$  correspond la TF de la projection de l'image selon cet angle



Si on empile les différentes projections  $p_\theta(t)$  d'une image dans une matrice  $g(\theta, t)$ , on obtient la Transformée de Radon

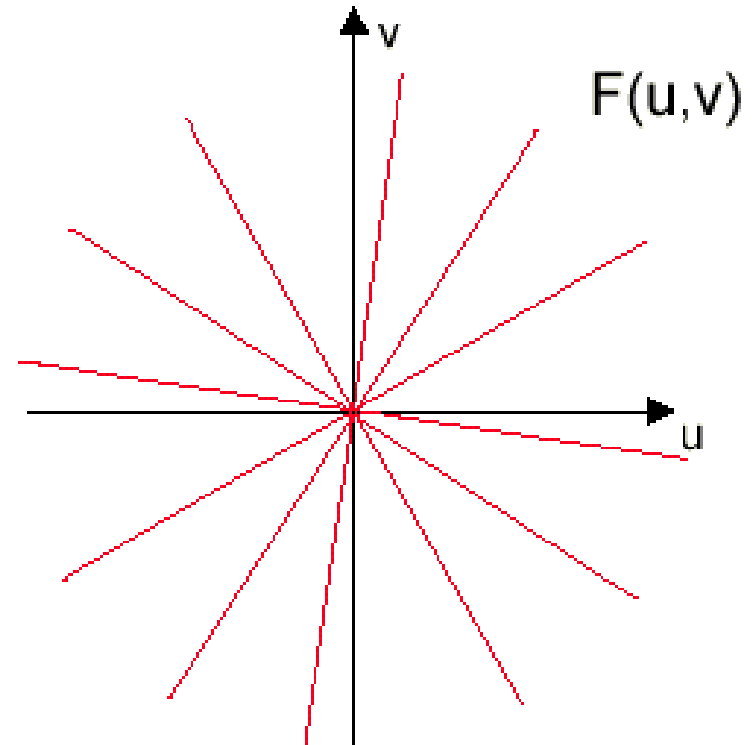


Image lenna



TF Radon

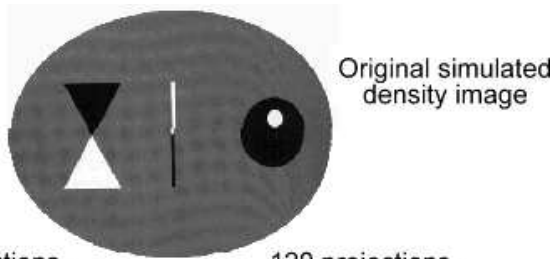
## TOMOGRAPHIE RECONSTRUCTION



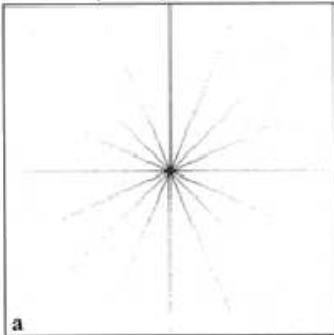
### Reconstruction

- Interpolation des points manquant de  $F(u,v)$ , par exemple ► interpolation bilinéaire
- Transformée de Fourier inverse de  $F(u,v)$  pour obtenir  $f(x,y)$  ► Cf. TP

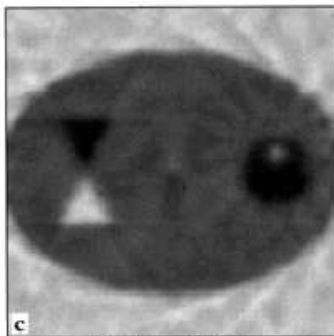
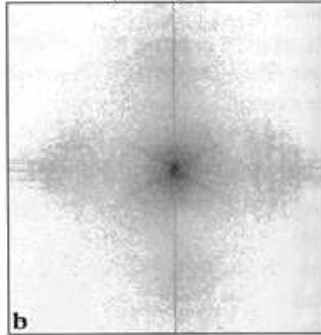
## TOMOGRAPHIE EXEMPLES



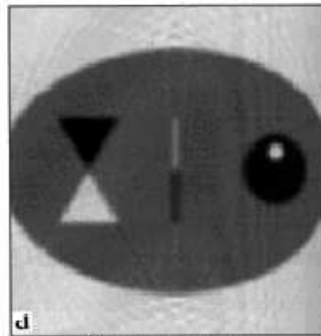
8 projections-  
Frequency Domain



120 projections-  
Frequency Domain



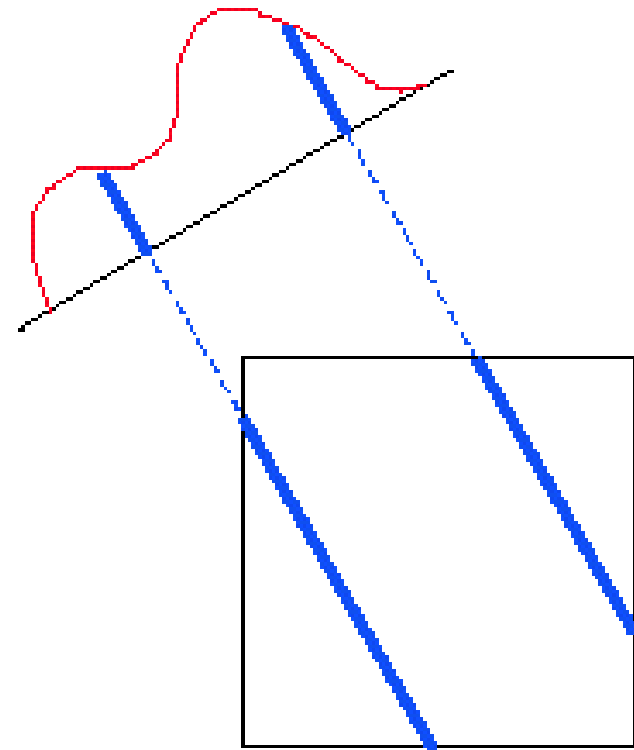
8 projections-  
Reconstruction



120 projections-  
Reconstruction

14

## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION (1)



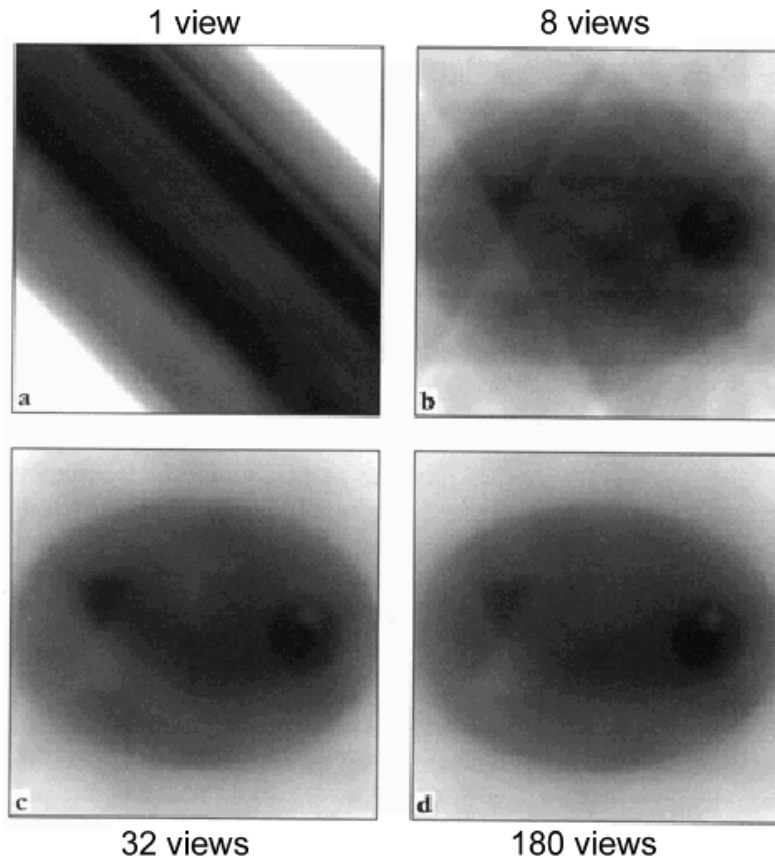
### Principe de la rétroprojection

- $p_\theta(t)$  est rétroprojeté le long des lignes de projections
- Les valeurs de  $p_\theta(t)$  sont ajoutées aux valeurs existantes obtenues des autres projections

15



## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION (2- EXEMPLE)



► Reconstruction floue

Un point rétroprojeté ne donnera pas un point  
mais une "tache"

Solution : Infinité de Projections

## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION FILTRÉE (3)

La TF inverse de  $F(u, \nu)$  est

$$f(x, y) = \iint F(u, \nu) \exp(2\pi j(ux + \nu y)) du d\nu$$

En coordonnées polaires

$$f(x, y) = \iint F(w, \theta) \exp(2\pi j(xw \cos \theta + yw \sin \theta)) |w| dw d\theta$$

Puisqu'on obtient  $F(w, \theta)$  à partir des projections  $P_\theta(w)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \iint [P_\theta(w)|w|] \exp(2\pi jw(x \cos \theta + y \sin \theta)) dw d\theta \\ &= \iint \left[ \int P_\theta(w)|w| \exp(2\pi jw t) dw \right] \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \\ &= \iint \underbrace{p_\theta(t)_{\text{filtrée}} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t)}_{\text{Rétroprojection de } p_\theta(t)} dt d\theta \end{aligned}$$

(le long d'une ligne de projection d'orientation  $\theta$   
et passant par l'origine)

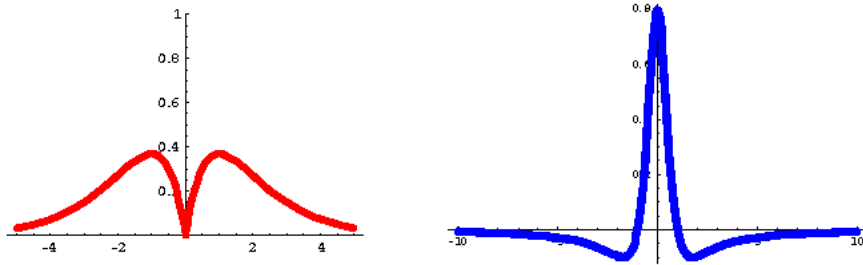
### Principe de la rétroprojection filtrée

- On calcule  $P_\theta(w)|w|$  (projection filtrée)
- On fait la TF inverse de  $P_\theta(w)_{\text{filtrée}}$
- On rétroprojeté pour tous les angle  $\theta$

## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION FILTRÉE (4)

### Réduction du bruit

- L'objet à reconstruire est bande-limité
- On a donc généralement intérêt à multiplier dans le domaine fréquence par une fenêtre de Hamming (filtre passe-bas)
- $|u|$  n'es pas carré intégrable (Fourier inverse impossible)



## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION FILTRÉE (5)

### Exemple

