



DIRO
IFT 6150

TRAITEMENT D'IMAGES

CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE

SOMMAIRE

Exemples	2
Transformations Géométriques	3
Interpolation Directe	4
Interpolation Bilinéaire	6
Autres Interpolations	8
Tomographie	9

CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

EXEMPLES

Exemples de distorsions géométriques



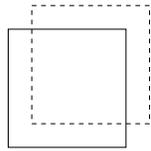
Exemples de corrections géométriques



CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

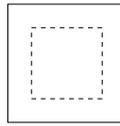
TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Translation



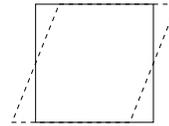
$$\begin{aligned}x' &= a + x \\y' &= b + y\end{aligned}$$

Echelle



$$\begin{aligned}x' &= a x \\y' &= b y\end{aligned}$$

Inclinaison



$$\begin{aligned}x' &= x + a y \\y' &= y\end{aligned}$$

Rotation

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

Assignation des niveaux de gris

► Nécessaire car la position d'un pixel transformé n'est pas entière

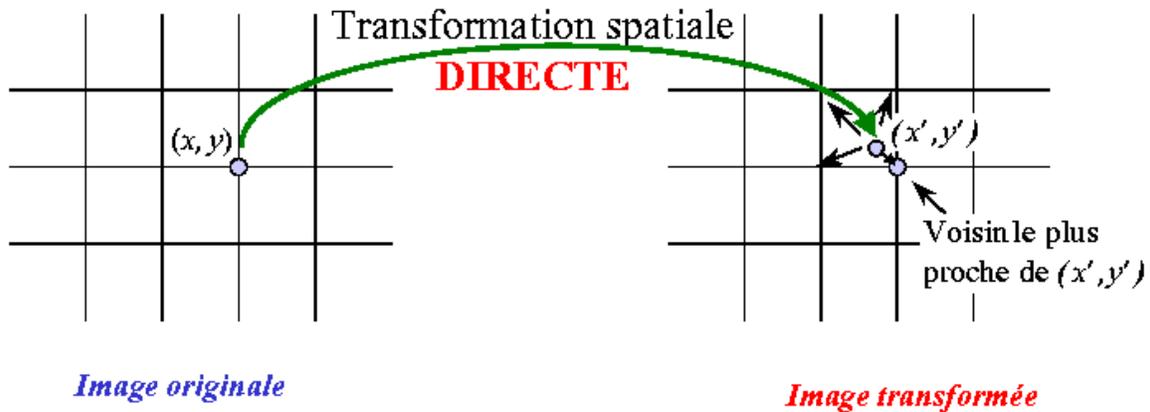
- Interpolation au voisin le plus proche
- Interpolation bilinéaire
- Autres type d'interpolation



CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

INTERPOLATION DIRECTE (1)

Transformée spatiale directe



- Difficile de distribuer le niveau de gris sur les pixels voisins
 - Des “trous” peuvent apparaître car on n’a pas la certitude que tous les pixels de l’image transformée recevront une valeur

Exemple

Transformation : Facteur d’échelle $10\times$

$A(x_0, y_0) \blacktriangleright A(x_0, y_0)$ et $B(x_0 + 1, y_0) \blacktriangleright B(x_0 + 10, y_0)$

Mais entre $A(x_0, y_0)$ et $B(x_0 + 10, y_0)$?

CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

INTERPOLATION DIRECTE (2)

Transformée spatiale inverse

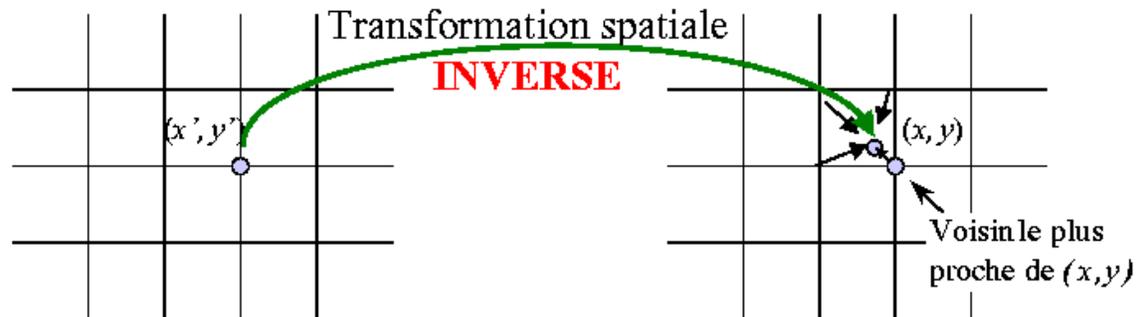


Image transformée

Image originale

- ▶ Interpolation de la valeur du pixel à partir des voisins ▶ plus facile
 - ▶ Aucun "trou" car on parcourt tous les pixels de l'image transformée

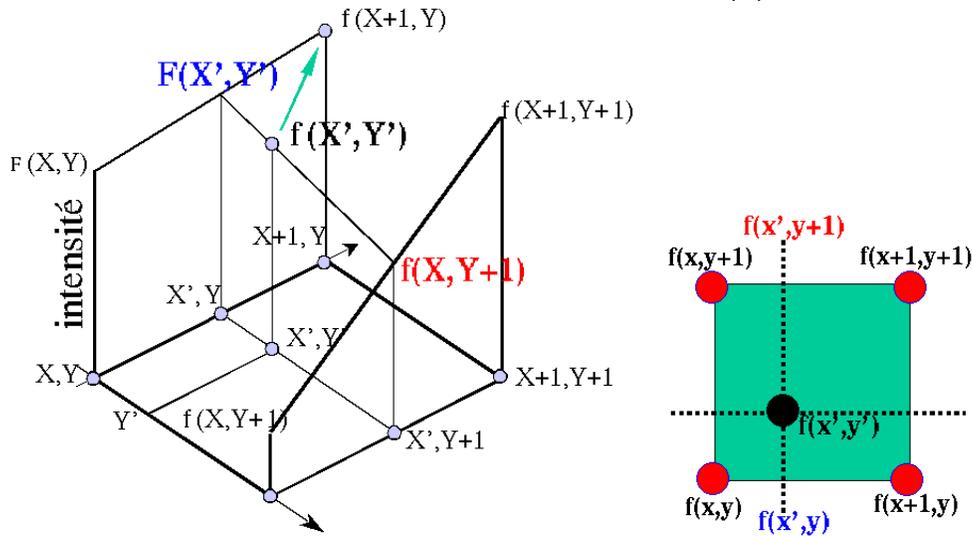
Exemple



512 × 512 ▶ 64 × 64

CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

INTERPOLATION BILINÉAIRE (1)



$$f(x, y) = ax + by + cxy + d$$

4 inconnus ► 4 points

Résolution du système

$$a = f(x + 1, y) - f(x, y)$$

$$b = f(x, y + 1) - f(x, y)$$

$$c = f(x + 1, y + 1) + f(x, y) - f(x, y + 1) - f(x + 1, y)$$

$$d = f(x, y)$$

(4 Multiplications et 8 additions)

Implantation

$$f(x', y) = f(x, y) + (x' - x)[f(x + 1, y) - f(x, y)]$$

$$f(x', y + 1) = f(x, y + 1) + (x' - x)[f(x + 1, y + 1) - f(x, y + 1)]$$

$$f(x', y') = f(x', y) + (y' - y)[f(x', y + 1) - f(x', y)]$$

(3 Multiplications et 6 additions)

CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

INTERPOLATION BILINÉAIRE (2)

Exemple

100	150	$y+1$
175	200	y
x	$x+1$	

Quel est la valeur interpolée en $(x+0.7, y+0.2)$?

- Interpolation au voisin le plus près : 200
- Interpolation bilinéaire

$$\begin{aligned}
 I(x', y) &= I(x, y) + [I(x + 1, y) - I(x, y)](x' - x) \\
 &= 175 + (200 - 175) \times 0.7 = 192.5 \\
 I(x', y + 1) &= I(x, y + 1) + [I(x + 1, y + 1) - I(x, y + 1)](x' - x) \\
 &= 100 + (150 - 100) \times 0.7 = 135 \\
 I(x', y') &= I(x', y) + [I(x', y + 1) - I(x', y)](y' - y) \\
 &= 192.5 + (135 - 192.5) \times 0.2 = 181
 \end{aligned}$$

Exemple

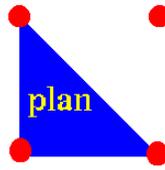


512 × 512 ► 64 × 64

CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

AUTRES INTERPOLATION

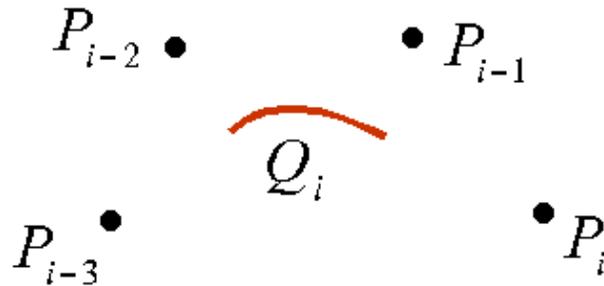
Interpolation linéaire



$$f(x, y) = ax + by + c$$

B-splines cubique

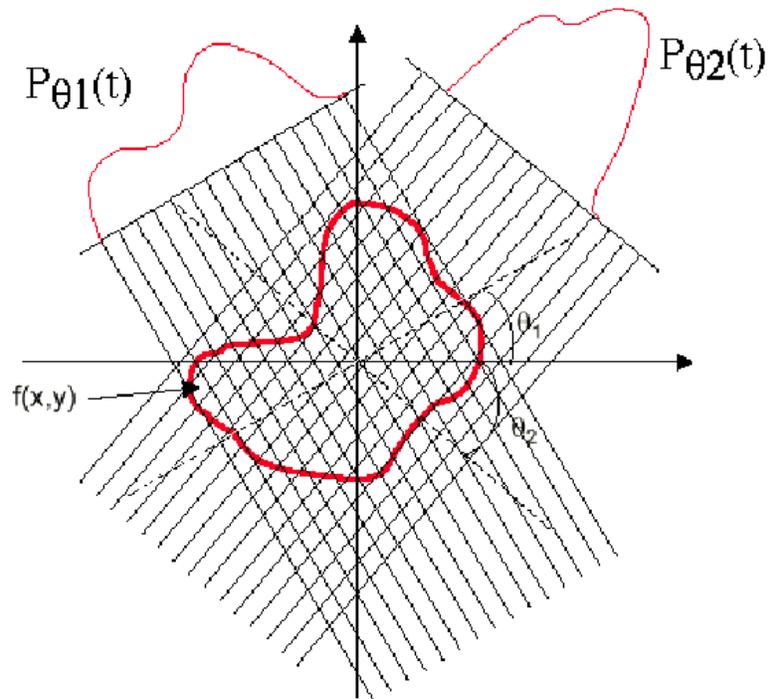
B-Spline cubique



$$Q_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

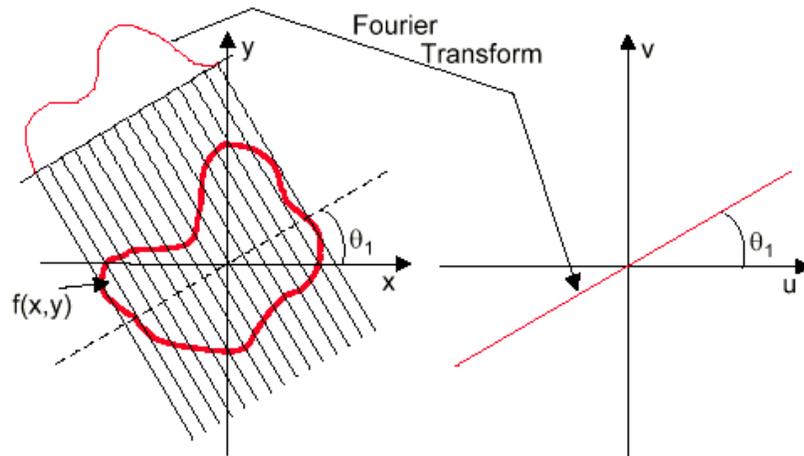
TOMOGRAPHIE

RECONSTRUCTION À PARTIR DE PROJECTIONS



TOMOGRAPHIE

THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (1)



Considérons la Transformée de Fourier de $f(x, y)$

$$F(u, \nu) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy$$

Que représente la ligne $\nu = 0$ du spectre de Fourier ?

$$F(u, 0) = \int \left[\int f(x, y) dy \right] \exp(-2\pi j(ux)) dx$$

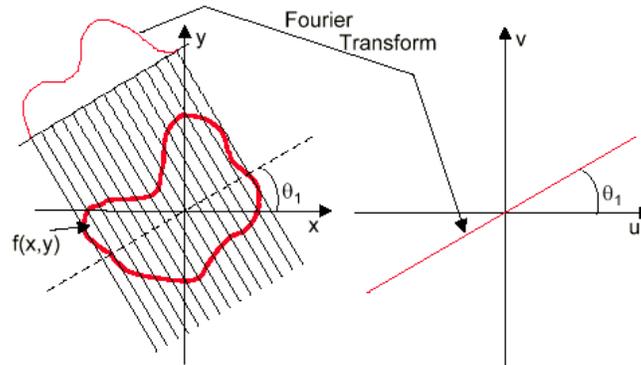
$$F(u, 0) = \mathcal{F}(p_{\theta=0^\circ}(t)) \text{ de même } F(0, \nu) = \mathcal{F}(p_{\theta=90^\circ}(t))$$

Plus généralement, pour une projection de l'image suivant un angle θ (i.e., suivant un axe de projection passant par l'origine et orienté selon un angle θ)

$$p_\theta(t) = \int_l f(x, y) dl$$

TOMOGRAPHIE

THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (2)



Une ligne de projection au point t est (cf. Hough)

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t$$

On obtient donc

$$p_{\theta}(t) = \iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

La TF de $p_{\theta}(t)$ est

$$P_{\theta}(w) = \int p_{\theta}(t) \exp(-2\pi j w t) dt$$

$$P_{\theta}(w) = \int \left[\iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \right] \exp(-2\pi j w t) dt$$

En utilisant la propriété du δ , ($f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$)

$$P_{\theta}(w) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j w [x \cos \theta + y \sin \theta]) dx dy$$

Sachant que la TF 2D est

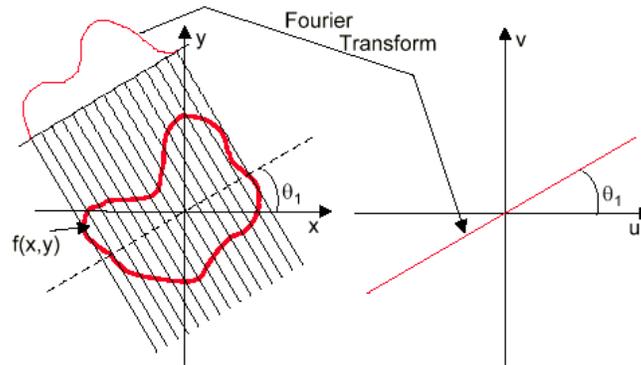
$$F(u, \nu) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j (ux + \nu y)) dx dy$$

TOMOGRAPHIE

THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (3)

Si on pose $u = w \cos \theta$ et $v = w \sin \theta$, on a l'équation de l'axe de projection dans le domaine de Fourier

Donc à une ligne du spectre de Fourier d'orientation θ correspond la TF de la projection de l'image selon cet angle



Si on empile les différentes projections $p_\theta(t)$ d'une image dans une matrice $g(\theta, t)$, on obtient la Transformée de Radon

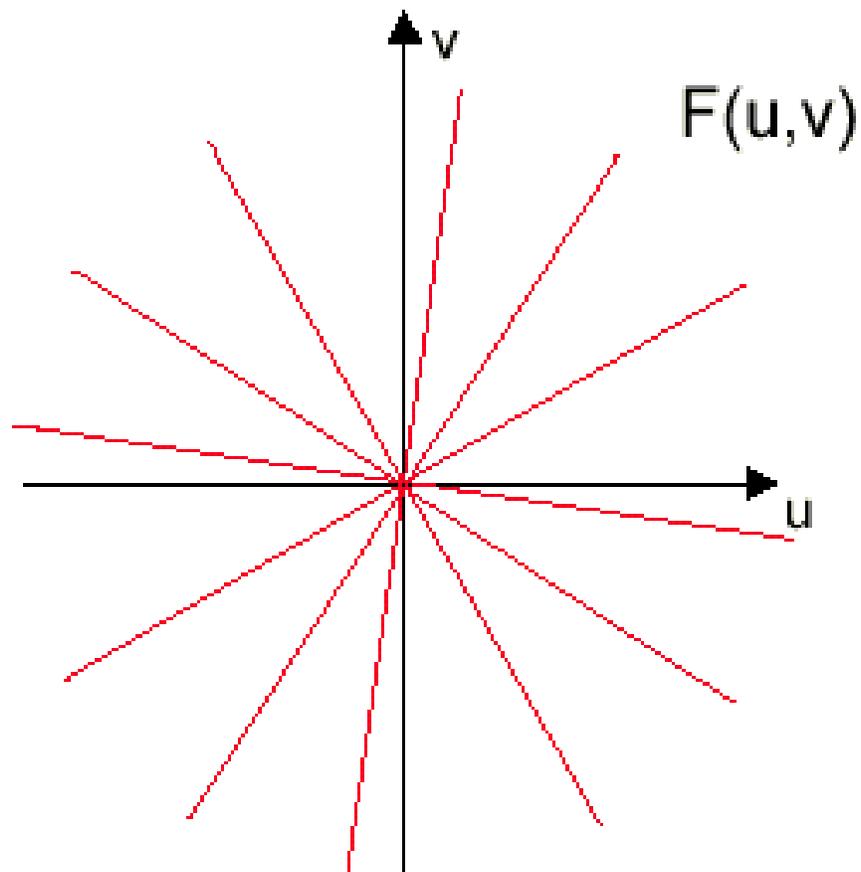


Image lenna



TF Radon

TOMOGRAPHIE RECONSTRUCTION

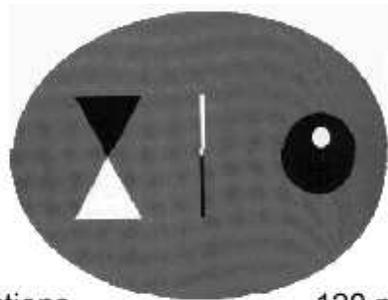


Reconstruction

- Interpolation des points manquant de $F(u, \nu)$, par exemple ► interpolation bilinéaire
- Transformée de Fourier inverse de $F(u, \nu)$ pour obtenir $f(x, y)$ ► Cf. TP

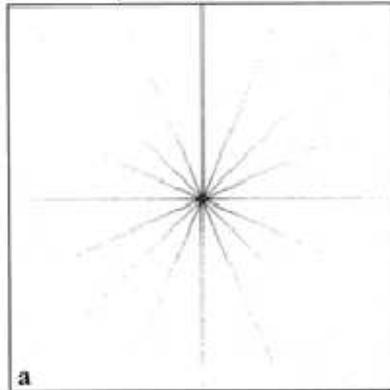
TOMOGRAPHIE

EXEMPLES



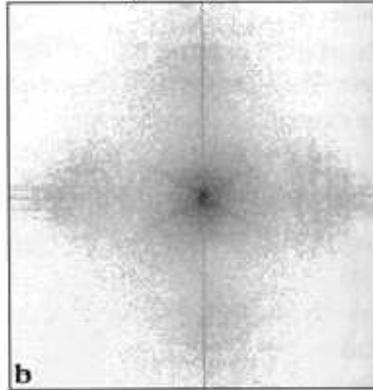
Original simulated density image

8 projections-
Frequency Domain

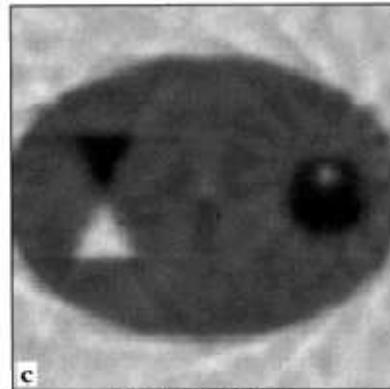


a

120 projections-
Frequency Domain

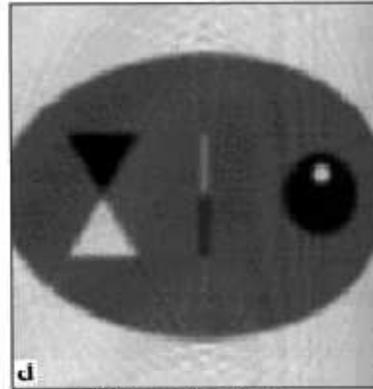


b



c

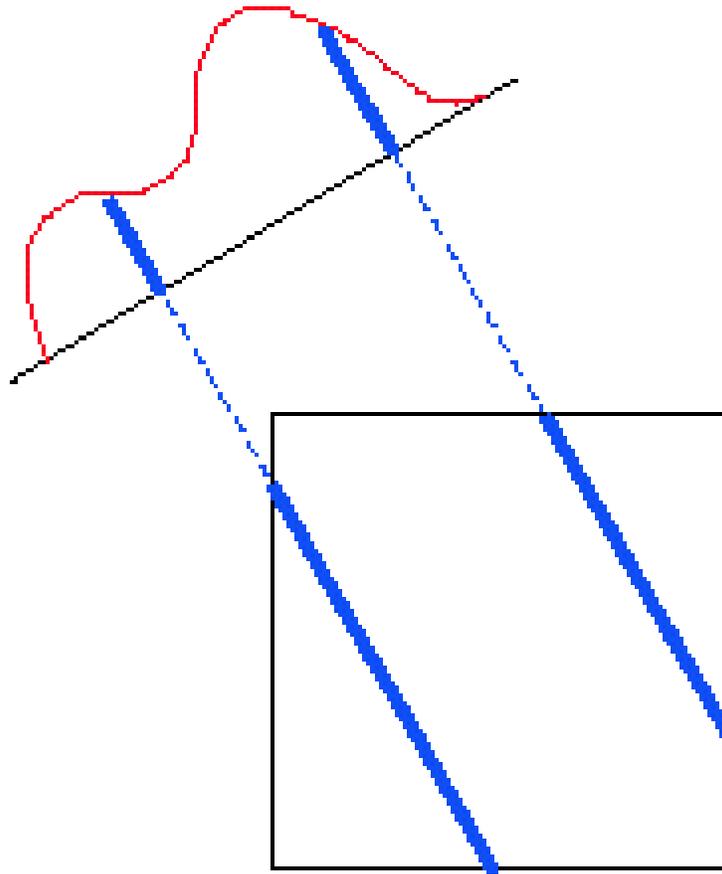
8 projections-
Reconstruction



d

120 projections-
Reconstruction

TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION (1)

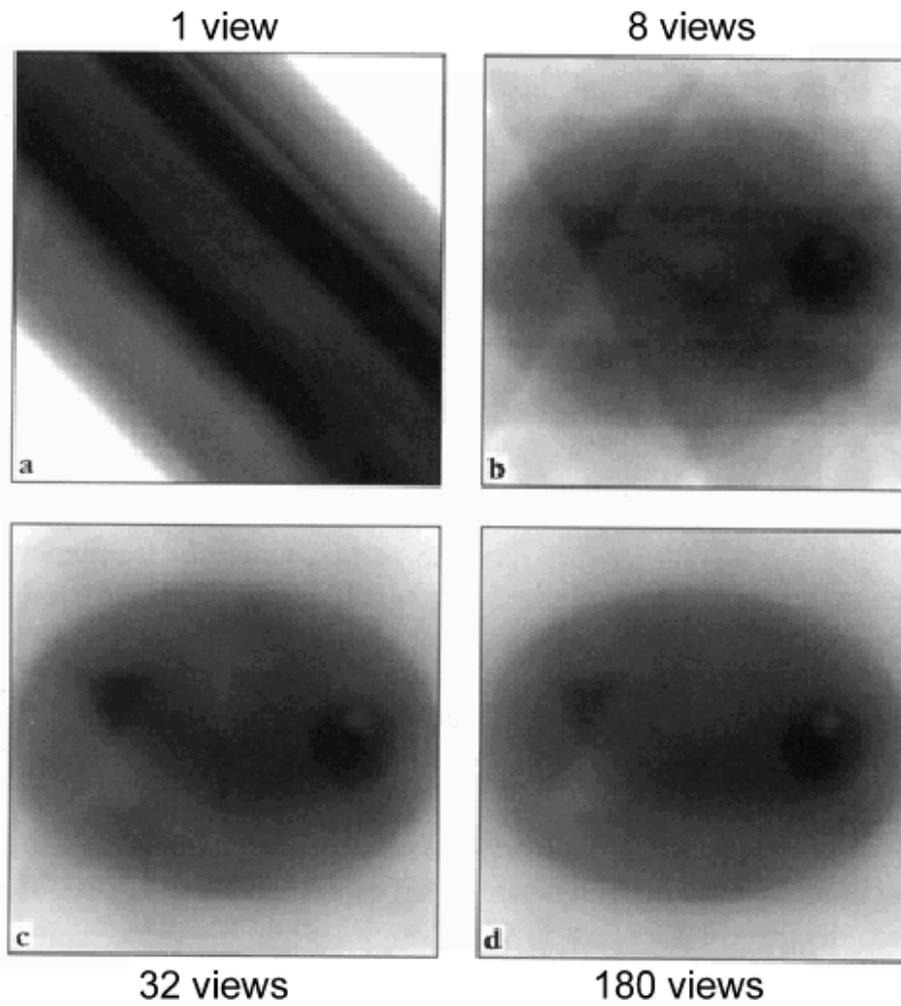


Principe de la rétroprojection

- $p_\theta(t)$ est rétroprojeté le long des lignes de projections
- Les valeurs de $p_\theta(t)$ sont ajoutées aux valeurs existantes obtenues des autres projections

TOMOGRAPHIE

RÉTROPROJECTION (2- EXEMPLE)



► Reconstruction floue

Un point rétroprojeté ne donnera pas un point
mais une "tache"

Solution : Infinité de Projections

TOMOGRAPHIE

RÉTROPROJECTION FILTRÉE (3)

La TF inverse de $F(u, \nu)$ est

$$f(x, y) = \iint F(u, \nu) \exp(2\pi j(ux + \nu y)) du d\nu$$

En coordonnées polaires

$$f(x, y) = \iint F(w, \theta) \exp(2\pi j(xw \cos \theta + yw \sin \theta)) |w| dw d\theta$$

Puisqu'on obtient $F(w, \theta)$ à partir des projections $P_\theta(w)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \iint [P_\theta(w) |w|] \exp(2\pi jw(x \cos \theta + y \sin \theta)) dw d\theta \\ &= \iint \left[\int P_\theta(w) |w| \exp(2\pi jwt) dw \right] \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \\ &= \underbrace{\iint p_\theta(t)_{\text{filtrée}} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta}_{\text{Rétroprojection de } p_\theta(t)} \end{aligned}$$

(le long d'une ligne de projection d'orientation θ
et passant par l'origine)

Principe de la rétroprojection filtrée

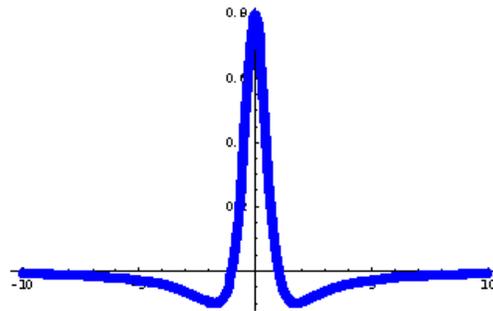
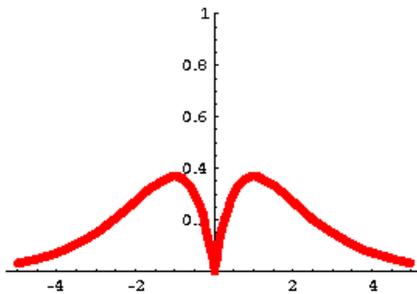
- On calcule $P_\theta(w) |w|$ (projection filtrée)
- On fait la TF inverse de $P_\theta(w)_{\text{filtrée}}$
- On rétroprojete pour tous les angle θ

TOMOGRAPHIE

RÉTROPROJECTION FILTRÉE (4)

Réduction du bruit

- L'objet à reconstruire est bande-limité
- On a donc généralement intérêt à multiplier dans le domaine fréquence par une fenêtre de Hamming (filtre passe-bas)
- $|u|$ n'es pas carré intégrable (Fourier inverse impossible)



TOMOGRAPHIE

RÉTROPROJECTION FILTRÉE (5)

Exemple

