



DIRO  
IFT 6150

# TRAITEMENT D'IMAGES BINARISATION ET MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.  
Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)  
E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

## BINARISATION ET MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE SOMMAIRE

### Seuillage

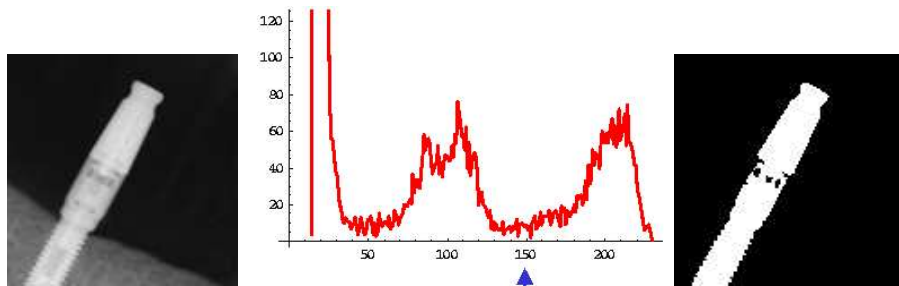
Seuillage par Inspection .....	2
Seuillage Optimale .....	4
Seuillage Locale .....	7
Seuillage & Filtrage .....	9

### Morphologie Mathématique

Théorie des Ensembles .....	10
Translation .....	11
Dilatation .....	12
Érosion .....	15
Détection des Contours .....	17
Estimation de Squelette .....	18
Remplissage .....	19
Détection .....	20
Ouverture .....	21
Fermeture .....	22
Propriétés de l'Ouverture/Fermeture .....	23
Filtrage Morphologique .....	24
Autres Applications .....	25
Morphologie en Niveaux de Gris .....	26
Exemples .....	27

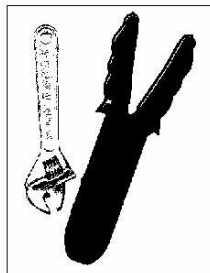
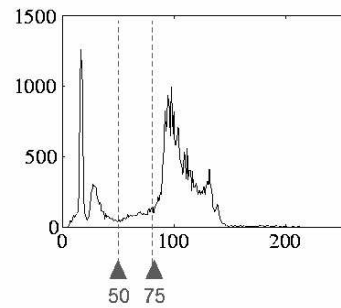
## BINARISATION SEUILLAGE PAR INSPECTION (1)

Seuillage par inspection de l'histogramme

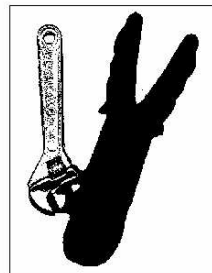


Original

Histogram



Threshold = 50



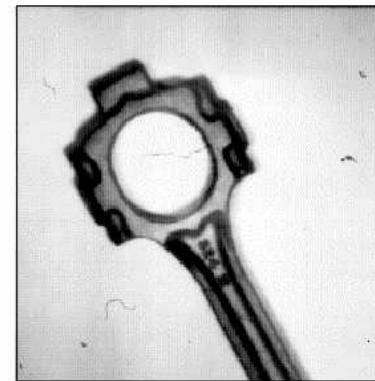
Threshold = 75

2

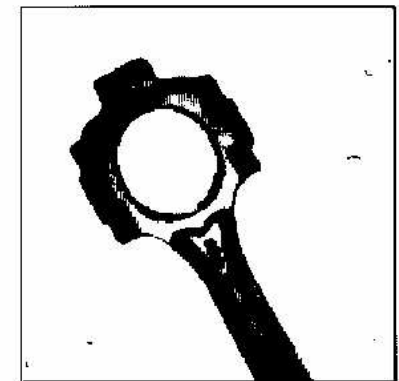
## BINARISATION SEUILLAGE PAR INSPECTION (2)

Seuillage par inspection de l'histogramme

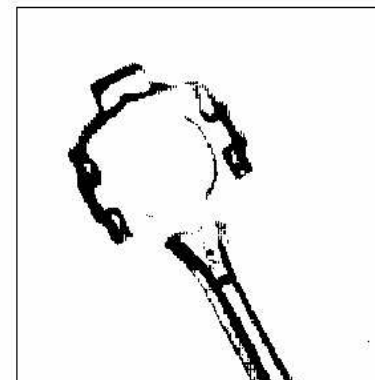
Original Image



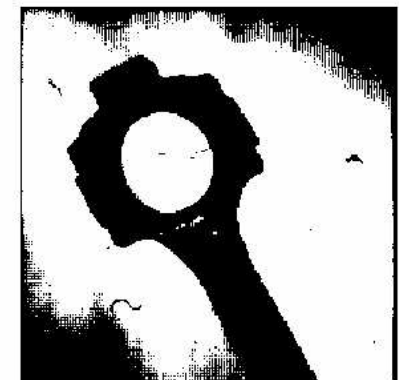
Binary Image



Threshold too low



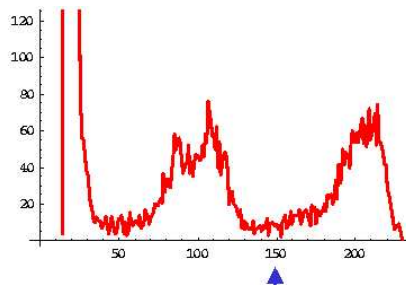
Threshold too high



3

## BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (1)

Seuillage optimal



Soit deux régions (arrière-plan et objet)  
présent dans une image

La probabilité  $P(z)$  d'avoir une valeur de niveau de gris  $z$  ( $z \in [0, 255]$  par ex.) dans l'image est donnée par

$$p(z) = P_1 p_1(z) + P_2 p_2(z)$$

$P_i$  : prop. de pixels appartenant à la région  $i$  ( $P_1 + P_2 = 1$ )  
 $p(z)$  : Histogramme de l'image  
 $p_i(z)$  : proba. d'un pixel  $\in$  région  $i$  d'avoir un ng =  $z$

Si nous supposons que  $p_1(z)$  et  $p_2(z)$  sont distribués selon une loi normale, nous obtenons

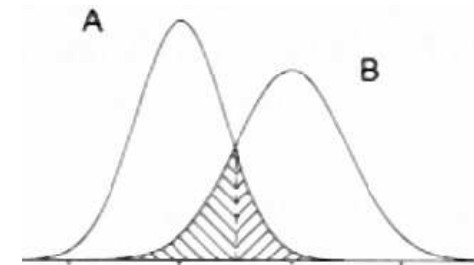
$$p_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

## BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (2)

$p(z)$  devient alors

$$p(z) = P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + P_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$



Soit  $E_1$ , la probabilité de classer un pixel dans la classe 1 lorsqu'il appartient à la classe 2 et  $E_2$ , la proba. de classer un pixel dans la classe 2 lorsque celui-ci appartient à la classe 1.

Les probabilités d'erreur sont données par

$$E_1(T) = \int_{-\infty}^T p_2(z) dz \quad \text{et} \quad E_2(T) = \int_T^{\infty} p_1(z) dz$$

La probabilité d'erreur totale est alors donnée par

$$E(T) = P_2 E_1(T) + P_1 E_2(T)$$

Cherchons une valeur de  $T$  qui minimise  $E(T)$

$$E'(T) = -P_1 p_1(T) + P_2 p_2(T) = 0$$

$$P_1 p_1(T) = P_2 p_2(T)$$

## BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (3)

Après simplification, nous obtenons une expression de la forme

$$AT^2 + BT + C = 0$$

Avec

$$A = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$

$$B = 2(\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2)$$

$$C = \mu_2^2 \sigma_1^2 - \mu_1^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \ln\left(\frac{\sigma_2 P_1}{\sigma_1 P_2}\right)$$

- Lorsque les variances sont égales

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

- Lorsque les variances et les proportions sont égales

$$P_1 = P_2$$

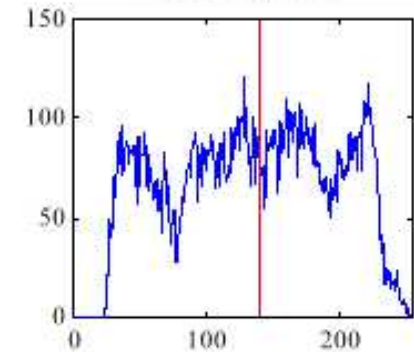
$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

## BINARISATION SEUILLAGE LOCALE (1)

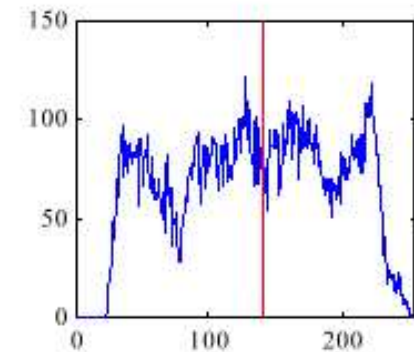
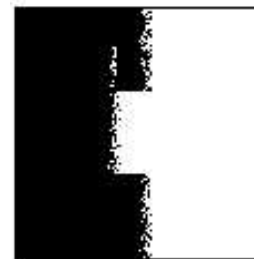
Original



Histogram

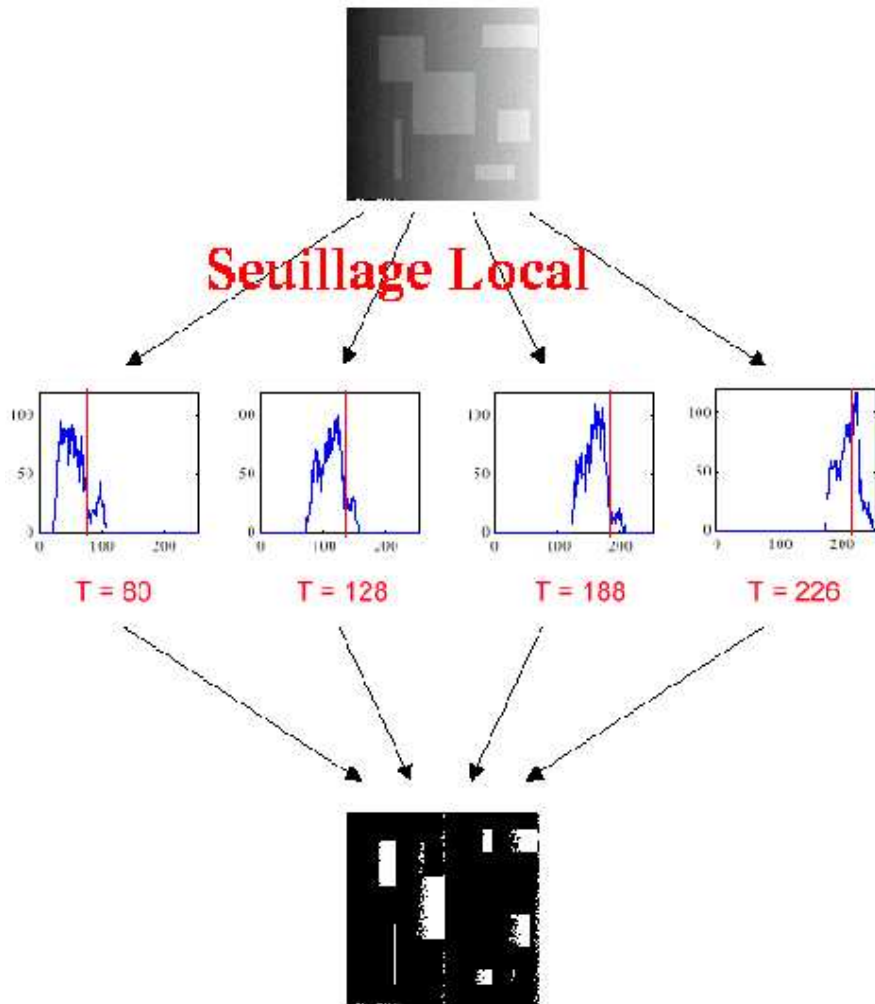


### Single Global Threshold



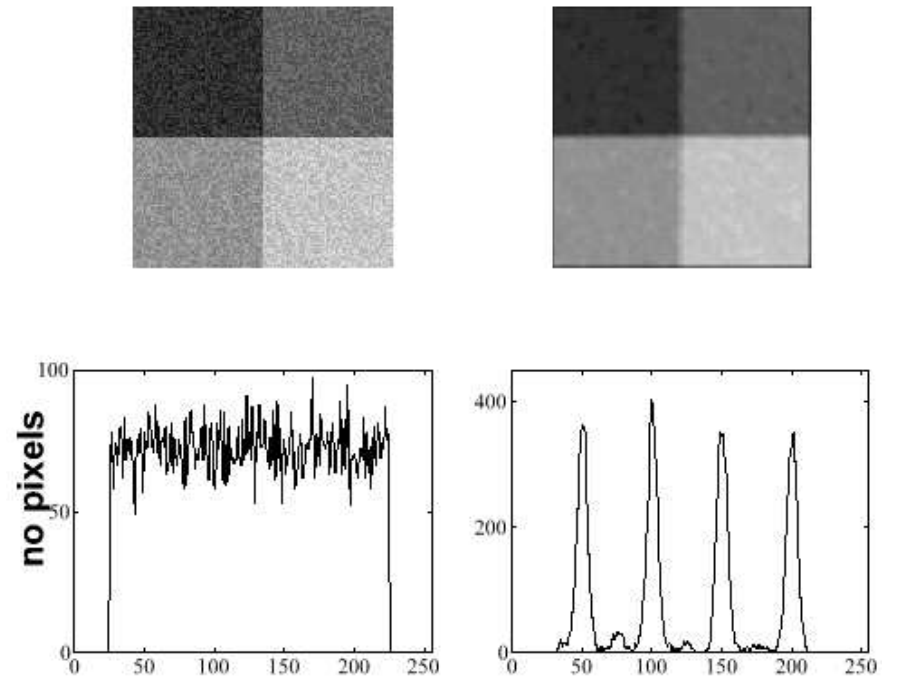
T = 128

## BINARISATION SEUILLAGE LOCALE (2)



8

## BINARISATION SEUILLAGE & FILTRAGE



Le bruit complique la sélection d'un seuil  
► Filtrage passe-bas

9

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE THÉORIE DES ENSEMBLES

► Traitement d'image basé sur la théorie des ensembles



Quelques images binaires

$A, B =$  Ens. des pixels = Ens. des coordonnées

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$  Union

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$  Intersection

$A^C = \{x \mid x \notin A\}$  Complément

$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$  Différence

$(A)_c = \{x \mid x = a + c, a \in A\}$  Translation

$\hat{A} = \{x \mid -x \in A\}$  Inversion

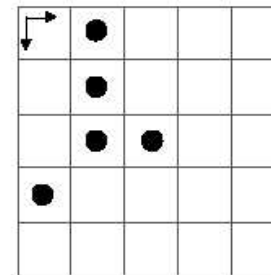
## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE TRANSLATION

Translation

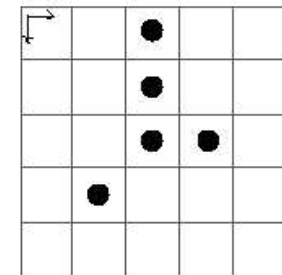
$A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (0,3)\}$

$x = (1,0)$

$(A)_x = \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (1,3)\}$



A



$(A)_x$

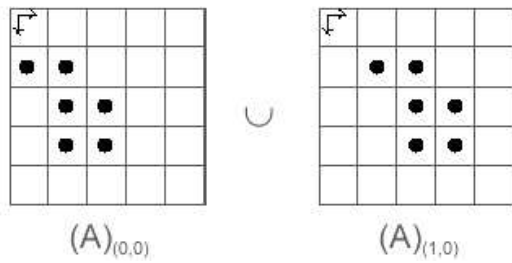
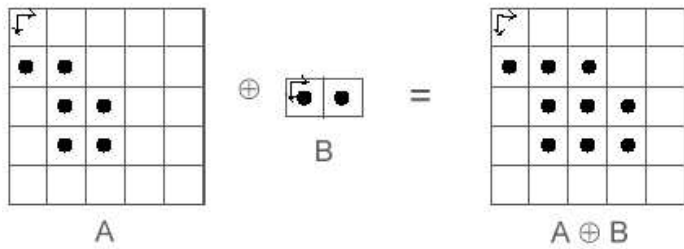
# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## DILATATION (1)

Dilatation

$$A \oplus B = \{x \mid x=a+b, a \in A, b \in B\}$$

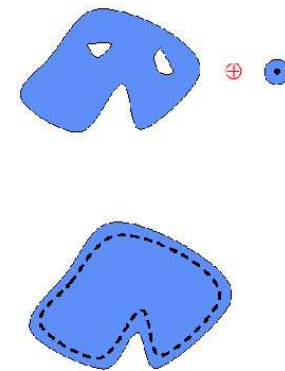
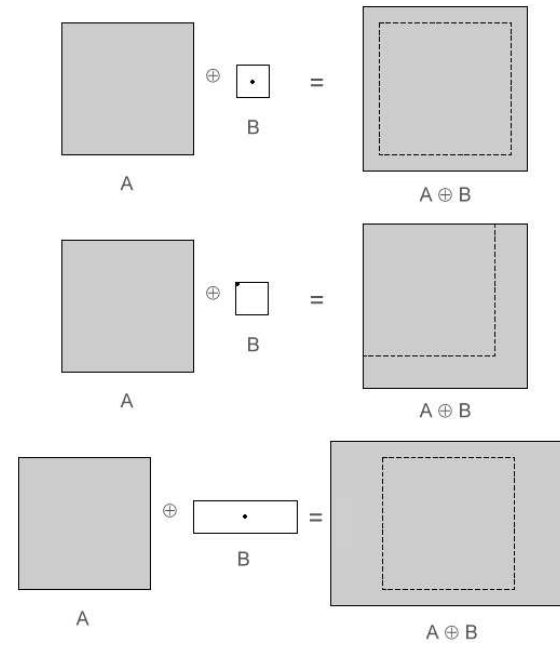
$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$



B : Élément structurant

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## DILATATION (2)



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## DILATATION (3)

### Propriétés de la dilatation

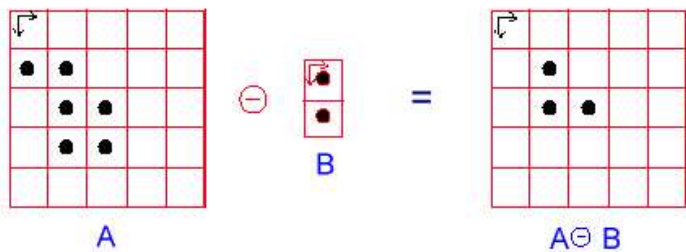
- $A \oplus B = B \oplus A$  Commutative
- $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$  Associative
- $A \subseteq B \Rightarrow C \oplus A \subseteq C \oplus B$  Monotone
- $(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$  Distributive
- $(A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$

### Érosion

$$A \ominus B = \{x \mid x+b \in A, \forall b \in B\}$$

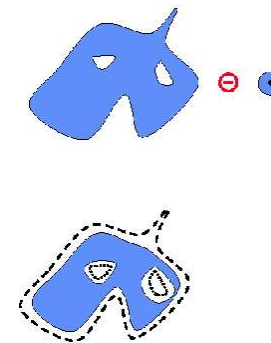
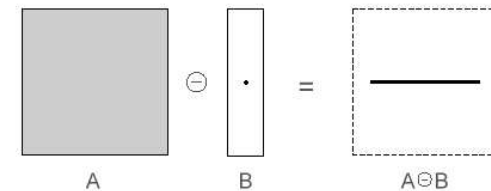
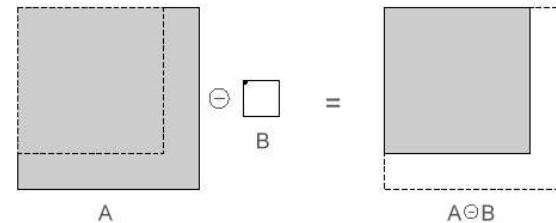
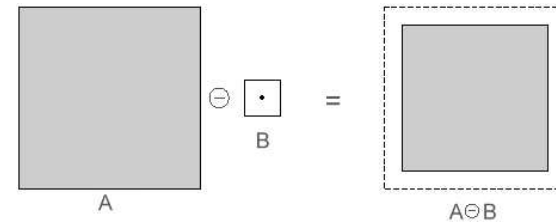
$$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## ÉROSION (2)





## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### ÉROSION (3)

#### Propriétés de l'érosion

$$A \subseteq B \Rightarrow A \ominus C \subseteq B \ominus C \quad \text{Monotone}$$

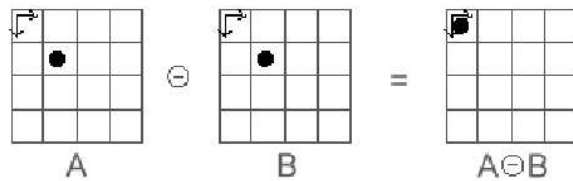
$$A \supseteq B \Rightarrow C \ominus A \subseteq C \ominus B$$

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B} \quad \text{Erosion vs Dilation}$$

Note:

$$(A \ominus B) \subseteq A \quad ?$$

Non! Exemple:



## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### DÉTECTION DE CONTOURS



Original



Eroded



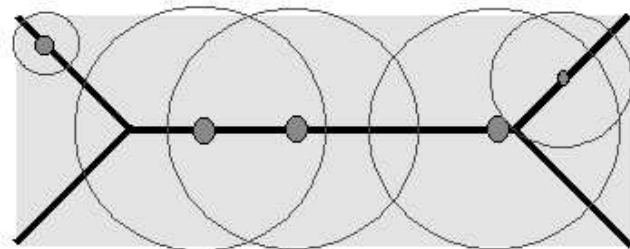
Edges = Original - Eroded

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### ESTIMATION DE SQUELETTE

#### Squelette d'un objet

► Estimation de l'axe intermédiaire d'un objet  
(Méthode des feux de prairies ou des disques circulaires)



Original

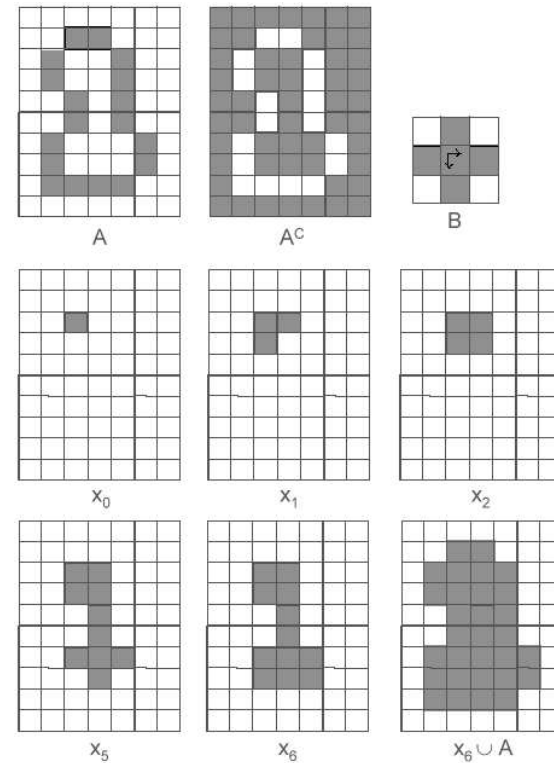
Erosion

Multiple Erosion =  
Skeleton

Si on conserve les derniers résultats juste avant  
la disparition du point ou du segment

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### REPLISSAGE

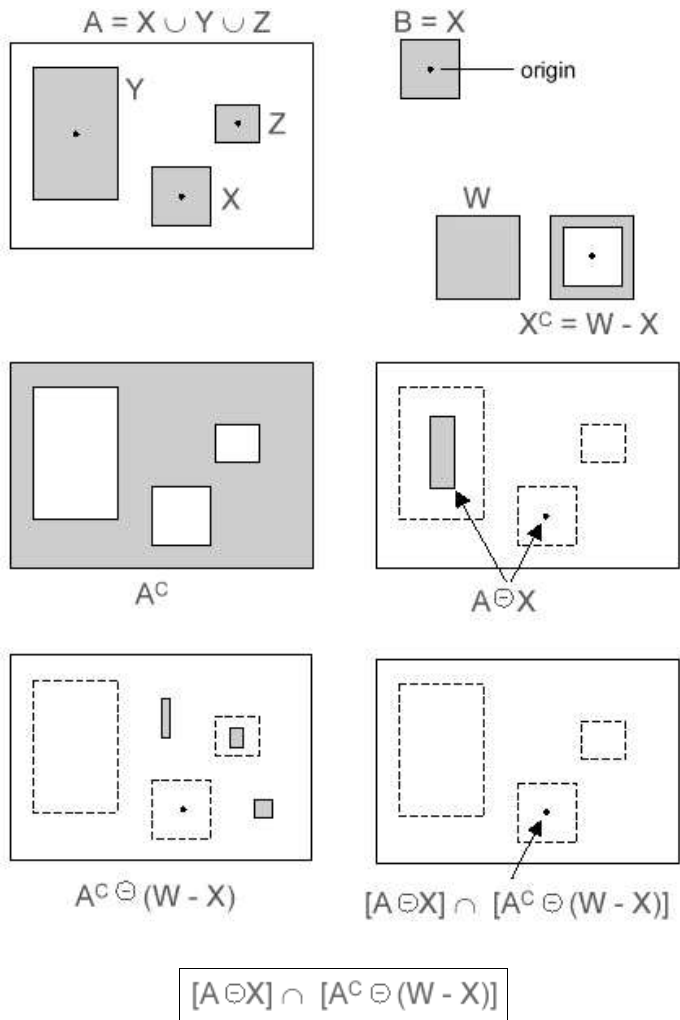


$$x_k = (x_{k-1} \oplus B) \cap A^c$$

- Répéter jusqu'à  $x_k = x_{k-1}$
- Contour rempli :  $x_k \cup A$
- Germe  $x_0$  : point à l'intérieur

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

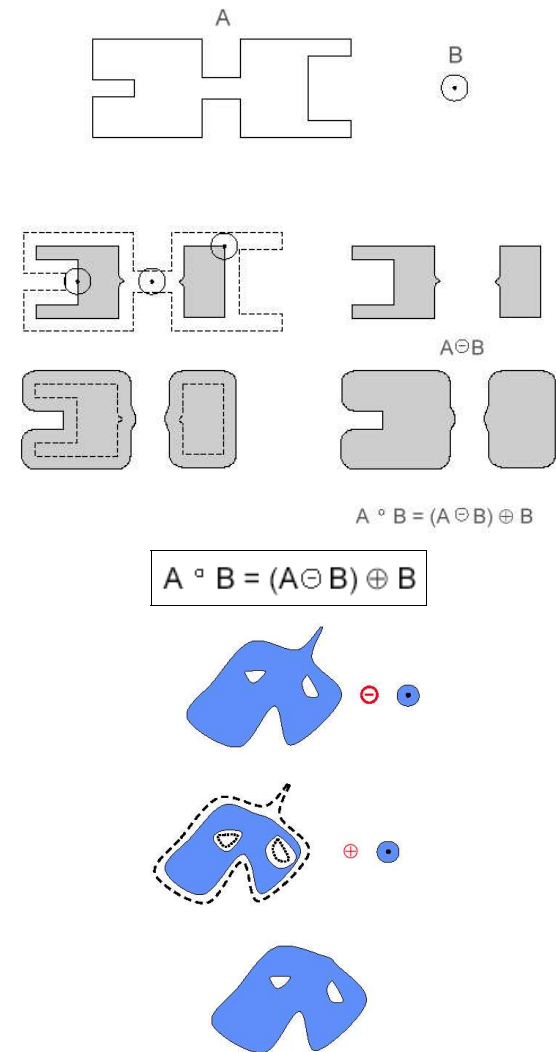
## DÉTECTION (HIT OR MISS)



$W$  : fenêtre englobant l'objet  $X$  à détecter

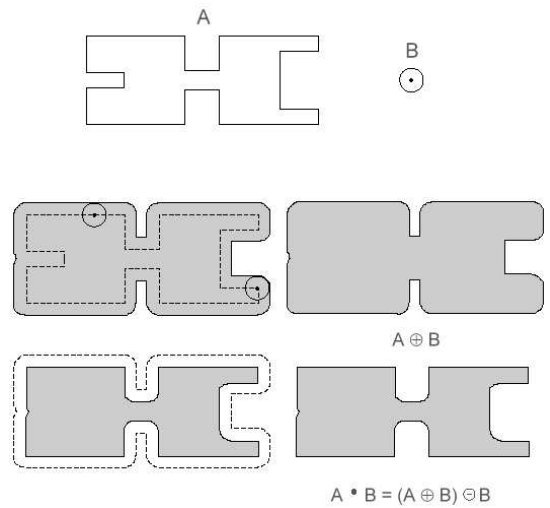
# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## OUVERTURE

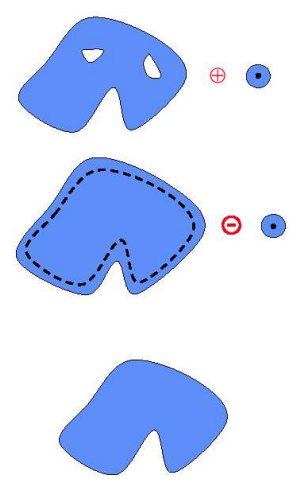


# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## FERMETURE



$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## PROPRIÉTÉS DE L'OUVERTURE ET FERMETURE

$$(A \bullet B)^C = (A^C \circ \hat{B})$$
  

$$A \circ B \subseteq A$$
  

$$A \subseteq B \Rightarrow A \circ C \subseteq B \circ C$$
  

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$
  
  

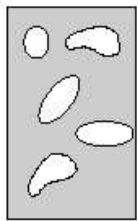
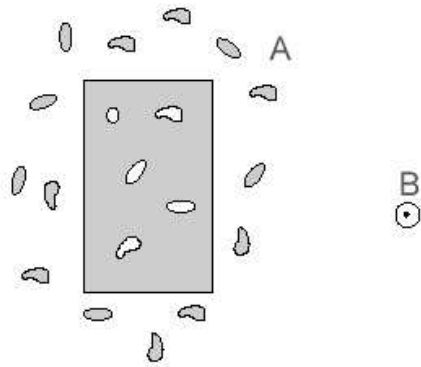
$$A \bullet B \supseteq A$$
  

$$A \subseteq B \Rightarrow A \bullet C \subseteq B \bullet C$$
  

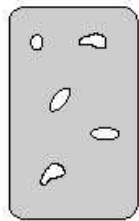
$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

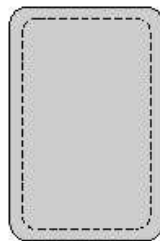
### FILTRAGE MORPHOLOGIQUE (BRUIT)



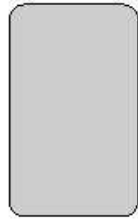
$$A \ominus B$$



$$(A \oplus B) \ominus B = A \circ B$$



$$(A \circ B) \oplus B$$

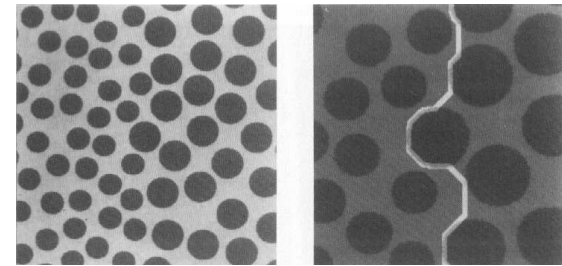


$$[(A \circ B) \oplus B] \ominus B = (A \circ B) \bullet B$$

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

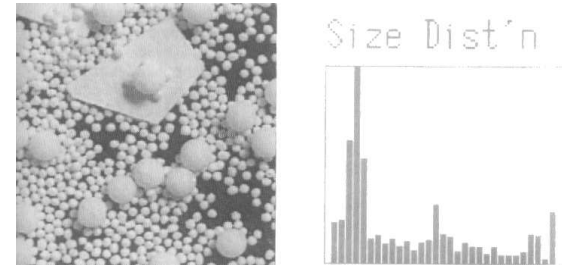
### AUTRES APPLICATIONS

#### Segmentation



- Ouverture avec un élément structurant qui fait disparaître les petits disques noirs
- Fermeture qui fusionne les gros disques
- Détection du contour

#### Granulométrie



- Ouverture avec des éléments structurant de taille croissante pour faire disparaître les granules blancs successivement en fonction de leur taille
- Moyenne de la différence avec l'image précédente pour obtenir le nombre d'occurrence

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## MORPHOLOGIE EN NIVEAUX DE GRIS

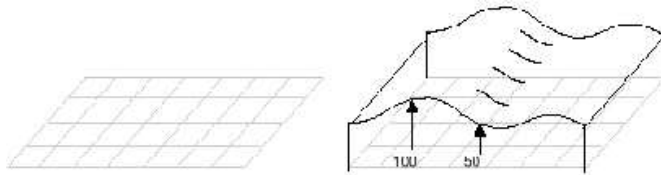
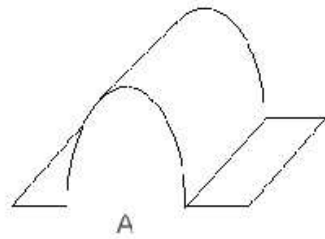


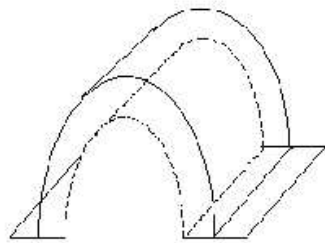
Image  
NdeG



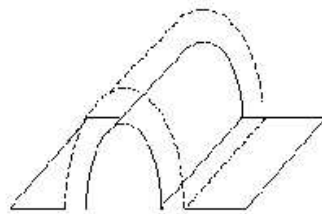
A



B



$A \oplus B$



$A \ominus B$

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## EXEMPLES (1)



Original



Dilation



Erosion



Opening

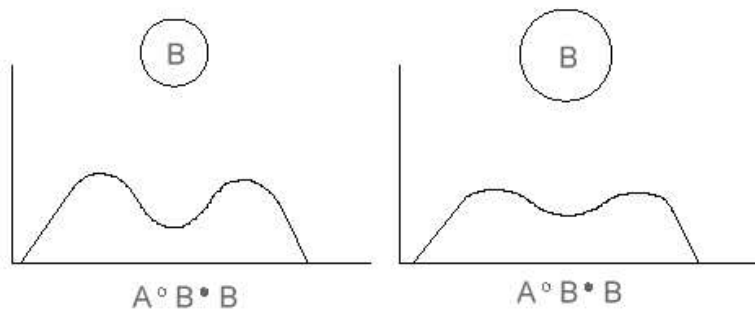
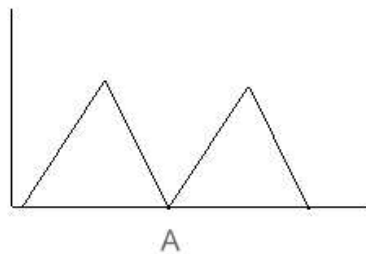


Closing

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## EXEMPLES (2- FILTRAGE PASSE-BAS)

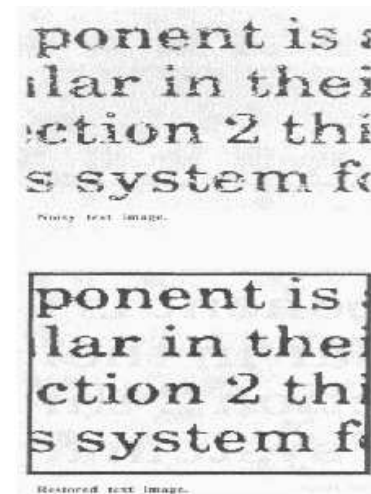
Bruit Poivre & Sel



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

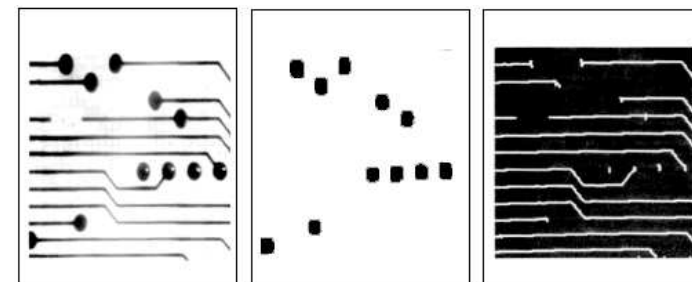
## EXEMPLES (3)

Restauration de documents imprimés



$$A \circ B \bullet B$$

Segmentation de Circuit imprimés



Circuit Imprimé

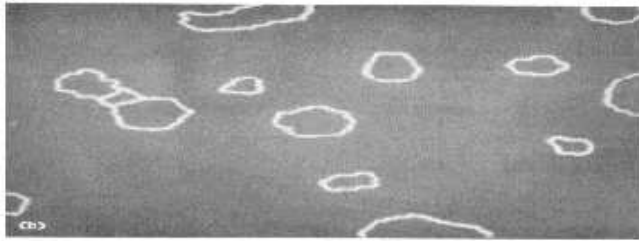
$$A \circ B$$

Squelette

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## EXEMPLES (4)

Segmentation



$$A \oplus B - A \ominus B$$



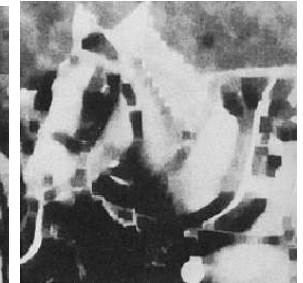
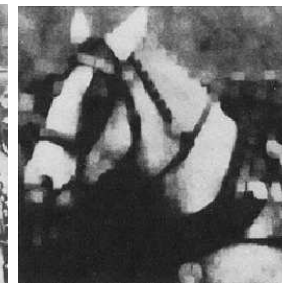
Original

$A \oplus B$

$A \ominus B$

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

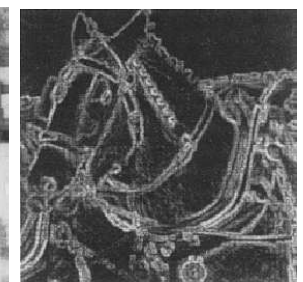
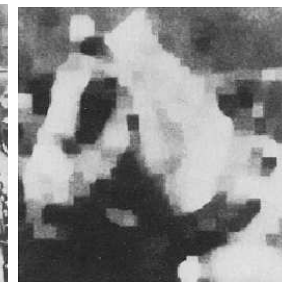
## EXEMPLES (5)



Original

$A \circ B$

$A \bullet B$



Original

$A \circ B \bullet B$

$A \oplus B - A \ominus B$