



DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 08/01/2012

I	Transformée de Fourier (36 pts)
II	Opérations Ponctuelles (29 pts)
III	Filtrage (29 pts)
IV	Misc. (32 pts)
Total	126 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (36 pts)

1. (a) Soit la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = \exp(-x)$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$.
Calculer $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, i.e., la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$, puis $G(\nu)$, la TF de $g(x) = x \exp(-x)$ si $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$.
<6 pts>
- (b) Dédurre de la question précédente (en utilisant les propriétés de la TF), la TF de $g(-x)$ (la fonction renversés de $g(x)$).
<4 pts>
- (c) Tracer (succinctement) l'allure de la fonction $h(x) = |x| \exp(-|x|)$ ($\forall x$) et préciser comment cette fonction peut s'écrire à partir de la fonction $g(x)$. En déduire finalement $H(\nu)$, la TF de $h(x)$ et tracer (succinctement) l'allure de la réponse fréquentielle $H(\nu)$.
<6 pts>
- (d) En vous aidant des propriétés de la TF et de ce que vous avez fait précédemment, trouver $l(x)$ la TF inverse de $L(\nu) = |\nu| \exp(-|\nu|)$ ($\forall \nu$).
<4 pts>
- (e) Retrouver dans le cours (au milieu du cours) où un filtre dont la MTF (i.e., la représentation fréquentielle a une forme semblable à) $L(\nu) = |\nu| \exp(-|\nu|)$ a été utilisé et pour laquelle, dans cet exercice, on a retrouvé l'allure de la Point Spread Function (PSF) associée.
<4 pts>
2. Soit $f(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle suivante

$$f(x) - f''(x) = \delta(x)$$

Résoudre cette équation différentielle en vous aidant de la TF.

<7 pts>

3. Considérons que la fonction $f(x)$ soit paire et réelle. Prouver (en utilisant la TF) que pour tout entier $n > 0$, on a aussi

$$\frac{\partial^{(2n)} f(x)}{\partial x^{(2n)}} \text{ est paire}$$

où $\partial^n / \partial x^n$ désigne la dérivée n-ième par rapport à x .

<5 pts>

Réponse

1.(a)

Avec la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et en utilisant directement la définition de la TF (puisque le signal $f(x)$ est à énergie finie et absolument intégrable), on obtient

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \frac{-1}{1 + 2\pi j\nu} \left[\exp(-x(1 + 2\pi j\nu)) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1 + 2\pi j\nu}$$

<3 pts>

De plus, on a la propriété suivante

$$\mathcal{F}[x f(x)] = -\frac{1}{2\pi j} F'(\nu)$$

que l'on peut aussi retrouver en utilisant l'une des deux méthodes expliquées dans la correction de l'examen de 2007. On trouve donc, en posant $\chi(x)$, le symbole signifiant "pour $x > 0$ "

<3 pts>
$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[x \exp(-x) \chi(x)] = -\frac{1}{2\pi j} \left(\frac{1}{1+2\pi j\nu} \right)' = \frac{1}{(1+2\pi j\nu)^2}$$

Nota : puisque la fonction $g(x) = x \exp(-x)$ si $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$ est à énergie finie et absolument intégrable, on aurait pu aussi retrouver cette TF en utilisant directement la définition de la TF

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x \exp(-x) \chi(x)] &= \int_0^{\infty} x \exp(-x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \int_0^{\infty} x \exp[-x(1+2\pi j\nu)] dx \\ &= \left[\frac{-x}{(1+2\pi j\nu)} \cdot \exp[-x(1+2\pi j\nu x)] \right]_0^{\infty} + \frac{1}{(1+2\pi j\nu)} \int_0^{\infty} \exp[-x(1+2\pi j\nu)] dx \\ &= \frac{1}{(1+2\pi j\nu)^2} \end{aligned}$$

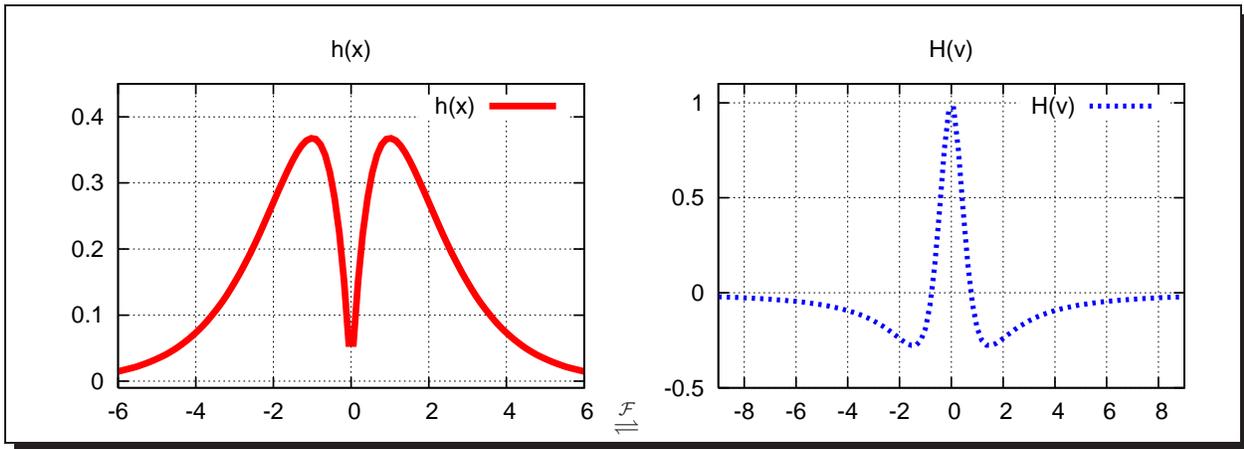
1.(b)

Comparativement à la question précédente, la fonction est inversée (i.e., retournée). Or on sait que l'inversion d'une fonction donne la conjugaison de sa transformée de Fourier (i.e., $\# \stackrel{\mathcal{F}}{=} *$) donc

<4 pts>
$$\mathcal{F}[g(-x)] = G^*(\nu) = \frac{1}{(1-2\pi j\nu)^2}$$

1.(c)

On a $h(x) = g(x) + g(-x)$ avec $h(x)$ une fonction dont l'allure est de la forme suivante



$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) + g(-x) = |x| \exp(-|x|) \quad (\forall x) \\ &\quad \Downarrow \mathcal{F} \quad \quad \quad \Downarrow \mathcal{F} \quad \quad \quad \Downarrow \mathcal{F} \\ \frac{1}{(1+2\pi j\nu)^2} &+ \frac{1}{(1-2\pi j\nu)^2} = \frac{2-8\pi^2\nu^2}{(1+4\pi^2\nu^2)^2} \propto \frac{1-\nu^2}{(1+\nu^2)^2} = H(\nu) \end{aligned}$$

<6 pts>

1.(d)

La fonction $L(\nu)$ est réelle et paire donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$ et de ce fait

$$L(\nu) = |\nu| \exp(-|\nu|) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{=} \frac{2-8\pi^2x^2}{(1+4\pi^2x^2)^2} = l(x)$$

<4 pts>

1.(e)

On a utilisé cette MTF en tomographie (slide 18 du chapitre Tomographie) pour réaliser le filtrage passe-haut $H_1(\nu) = \nu$ nécessaire à la rétroprojection filtrée, mais pour limiter le bruit on multipliait H_1 par une fenêtre de Hamming pour obtenir une MTF de la forme $H(\nu) = |\nu| \exp(-|\nu|)$.

<4 pts>

2.

Avec $\chi(x)$ le symbole signifiant “pour $x > 0$ ” et $\chi(-x)$ “pour $x < 0$ ”

$$\begin{aligned}
f(x) - f''(x) = \delta(x) &\stackrel{\mathcal{F}}{\iff} F(\nu) - (2\pi j\nu)^2 F(\nu) = 1 \\
\iff F(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2} &= \frac{1/2}{(1 + 2\pi j\nu)} + \frac{1/2}{(1 - 2\pi j\nu)} \\
&\quad \downarrow \mathcal{F}^{-1} \qquad \qquad \downarrow \mathcal{F}^{-1} \qquad \downarrow \mathcal{F}^{-1} \\
f(x) = & \qquad \qquad 1/2 \exp(-x) \chi(x) \quad + \quad 1/2 \exp(x) \chi(-x) \\
f(x) = & \frac{\exp(-|x|)}{2}
\end{aligned}$$

<7 pts>

Nota : la résolution pouvait se terminer aussi de la façon suivante :

$$F(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2} = \frac{1}{1 + 2\pi j\nu} \cdot \frac{1}{1 - 2\pi j\nu} \quad \text{donc} \quad f(x) = [\exp(-x)\chi(x)] * [\exp(-x)\chi(-x)]$$

3.

Si $f(x)$ est paire et réelle, $F(\nu)$ (i.e., sa TF) est aussi paire et réelle (et inversement), de plus nous avons

$$\frac{\partial^{(2n)} f(x)}{\partial x^{(2n)}} \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} (2\pi j\nu)^{2n} F(\nu) = (2\pi\nu)^{2n} (-1)^n F(\nu)$$

$(2\pi\nu)^{2n} (-1)^n F(\nu)$ sera réelle et paire (comme produit de deux fonctions paire) donc $\frac{\partial^{(2n)} f(x)}{\partial x^{(2n)}}$ sera paire (en plus d'être réel).

<5 pts>

II. Opérations Ponctuelles (29 pts)

1. Variance d'une image

Quelle opération ponctuelle faut il faire pour qu'une image A de moyenne μ_A et de variance σ_A^2 devienne une image de moyenne μ_B et de variance σ_B^2 ?

Donner un pseudo-code ou un ensemble de phrases indiquant les étapes algorithmiques à effectuer.

<7 pts>

2. Égalisation d'histogramme

Dire si l'opération d'égalisation sur une image, en le justifiant brièvement ;

- (a) Est une opération qui peut faire perdre à l'image de l'information ou non.
- (b) Est une opération qui crée de la fausse information (artefacts) ou non.
- (c) Si une opération d'égalisation sur une image qui a déjà été égalisée à un effet ou non.
- (d) Quelles conditions sur l'histogramme d'une image ferait qu'une opération d'égalisation sur cette image ne perdent pas d'informations.

<10 pts>

3. Traitement à faire

On a numérisé six images photographiques d'une même personne, prise à la même distance et sur un même fond. A cause de légères variations d'éclairage de la scène, une seule image numérisée parmi ces six photos est bien contrastée ce qui n'est pas le cas des autres images numérisées ou le manque de contraste réduit la visibilité de certains détails. Expliquer quel(s) pourrait être le/les traitement(s) les plus appropriés que l'on doit faire sur les cinq images permettant de faire les corrections nécessaires afin de leur donner les mêmes propriétés de contraste que la première image.

<5 pts>

4. Sous-échantillonnage

Soit la fonction d'intensité suivante

$$I(x, y) = 128 + 127 * \cos(2\pi(25x + 30y)/128) = 128 + 127 * \cos(2\pi(k_x x + k_y y))$$

avec $k_x = 25/128$ (25 sommets verticalement (axe des x)) et $k_y = 30/128$ (30 sommets horizontalement (axe des y)) où on définit x comme étant l'axe vertical (ligne) et y , l'axe horizontal (colonne) (cf. TP). En sous-échantillonnant $I(x, y)$ par un facteur trois (en ne retenant qu'un pixel sur trois) en x comme en y , retrouver par calcul le nombre de périodes verticales et horizontales de cette image résultant du sous-échantillonnage en utilisant la théorie de l'échantillonnage.

<7 pts>

Réponse

1.

On enlève à tous les pixels la moyenne μ_A pour que le signal image soit centré en zéro et on multiplie ensuite l'amplitude de tous les pixels de l'image par σ_B/σ_A . Puis on ajoute à tous les pixels la moyenne μ_A . Le signal 2D image obtenue aura une moyenne μ_A et une variance σ_B .

En fait, cela revient à faire comme opération ponctuelle, vue en cours, une transformation linéaire avec une pente σ_B/σ_A .

<7 pts>

2.

Dans le cas très particulier du continu (qui ne nous intéresse pas), on ne perdrait jamais d'information mais dans le cas discret (qui nous intéresse) :

(a) Oui c'est une opération qui peut faire perdre à l'image de l'information car deux barres d'histogramme peuvent fusionner en une seule barre. De ce fait, une zone ou des détails sont représentés avec des niveaux de gris différents pourront possiblement, après égalisation, être rassemblés en une zone d'intensité homogène.

<2.5 pts>

(b) Non, car deux barres de l'histogramme ne peuvent être fractionnés.

<2.5 pts>

(c) Cela n'aura plus d'effet car l'histogramme aura déjà été étiré le plus possible et éventuellement certaines barres de l'histogramme auront déjà fusionner. Une égalisation sur une image déjà égalisée ne changera donc rien. C'est d'ailleurs une bonne façon de savoir si, algorithmiquement, son programme informatique réalisant une égalisation d'histogramme comporte un bug ou non.

<2.5 pts>

Nota : En fait cela pourrait changer un tout petit peu, mais ce changement serait du uniquement au bruit numérique!

(d) Pour que cela soit possible, 2 cas :

1-] il faudrait que toutes les barres de l'histogramme aient soit une proportion supérieure aux nombres de pixels de l'image divisés par le nombre de bins ou soit égale à zéro. Dans ce cas aucune fusion de barre ne serait faite (et donc aucune perte d'information) et les différentes barres de l'histogramme ne seraient qu'étirées entre le niveau de gris min et le niveau de gris max.

2-] Histogramme déjà égalisé

<2.5 pts>

3.

Par exemple ; étirement ou spécification d'histogramme (dont l'histogramme est spécifié par la première image).

<5 pts>

4.

Une fois sous-échantillonnée, la fenêtre spectrale pour les fréquences positives se situe entre les fréquences numériques 0 et $\frac{1}{2} \frac{1}{3} = 0.1\bar{6}$.

En x , la fréquence négative du motif spectral centrée sur la fréquence d'échantillonnage ($f_e = 1/3$) est $\frac{1}{3} - \frac{25}{128} = 0.138$ qui se situe dans la fenêtre spectrale du signal sous-échantillonné et correspondant à ≈ 17.66 périodes en x

Nota :

Une façon de trouver ce nombre de période est de remarquer que $0.138 \approx 17.66/128$ en considérant la remarque faite dans l'énoncée ou en considérant que $\Delta\nu = 1/128 = 1/N$ et que $0.138 = 17.66 \Delta\nu$ sachant que la fréquence $\Delta\nu$, la plus petite fréquence détectable dans le signal génère une période de la taille de l'image et que une fréquence 17.66 fois plus grande génère donc 17.66 période dans l'image.

<3.5 pts>

En y , la fréquence négative du motif spectral centrée sur la fréquence d'échantillonnage ($f_e = 1/3$) est $\frac{1}{3} - \frac{30}{128} \approx 0.09896$ qui se situe dans la fenêtre spectrale du signal sous-échantillonné et correspondant à ≈ 12.66 périodes en y .

<3.5 pts>

III. Filtrage (29 pts)

1. Filtrage échographique

La Point Spread Function (PSF) d'une sonde échographique à la forme paramétrique suivante

$$h(x, y) = \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right] \cdot \cos(2\pi f_0 y)$$

i.e., une fonction (symétrique en x et y) cosinus modulée par une enveloppe Gaussienne. Trouver la réponse fréquentielle associée à cette PSF et tracer la succinctement dans la direction des ν ($y \Rightarrow \nu$).

<12 pts>

2. Filtrage et descripteur SIFT

Développé en 1999 par le chercheur Canadien David Lowe, les descripteurs SIFT (Scale-invariant feature transform) est un algorithme (utilisé beaucoup en vision par ordinateur) pour détecter et identifier un ensemble de points visuellement caractéristiques (et correspondant en général à des éléments distincts et pertinents) d'une image $I(x, y)$, de la façon la plus indépendante possible de l'échelle, du cadrage, de l'angle d'observation et de l'exposition (luminosité). La première étape de l'algorithme est la détection des points d'intérêt, dits points-clés et cette étape se fait en cherchant, pour différentes valeurs d'échelle $0.5 < k < 1$, les minima et maxima de l'opération spatiale suivante :

$$\{G(x, y, k\sigma) * I(x, y)\} - \{(G(x, y, \sigma) * I(x, y))\}$$

Dans laquelle $G(x, y, \sigma)$ correspond à une fonction Gaussienne d'écart-type σ .

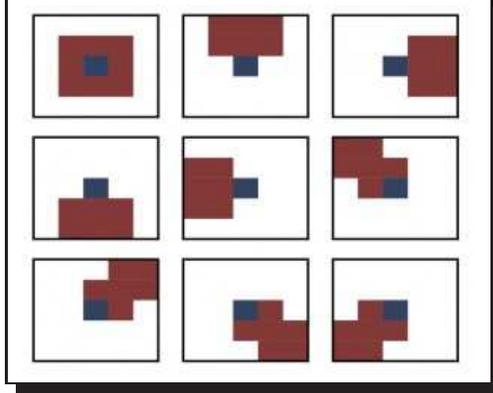
En fait de quel filtre correspond l'opération spatiale précédente ? Justifiez bien votre réponse en utilisant possiblement un raisonnement qualitatif.

<9 pts>

3. Filtrage à sélection de voisinage

Parmi la multitude de filtres existants, il existe le filtre suivant (appelé filtre à sélection de voisinage) dans lequel on associe à chaque pixel s que l'on désire filtré, un voisinage carré 5×5 et dans ce voisinage

5 × 5, 9 sous-domaines D_i ou voisinages possibles (de 8 ou 6 pixels), représentés en foncé (mais pas en noir) dans le graphe ci-dessous :



Pour chaque sous domaines D_i^s , [1-] on calcule la moyenne et la variance Moy_i^s et Var_i^s des pixels. 2-] On va ensuite rechercher le domaine D_i^s où cette variance est la plus faible et [3-] on va remplacer le niveaux de gris (ou de couleur) du pixel s par Moy_i^s .

De quelle famille ce filtre fait-il partie? Donner les caractéristiques de ce filtre, i.e., expliquer dans quelles circonstances (type de bruit, type d'image) ce filtre est intéressant et efficace. Justifier votre réponse en indiquant aussi le rôle de l'opération calculant la variance de chaque sous domaines et la sélection du domaine D_i^s où cette variance est la plus faible.

<8 pts>

4. Filtrage

Prouver qu'une image f que l'on convolue avec un filtre h dont la somme des éléments est égale à zéro donne une image g dont la moyenne des niveaux de gris est égale à zéro.

<5 pts>

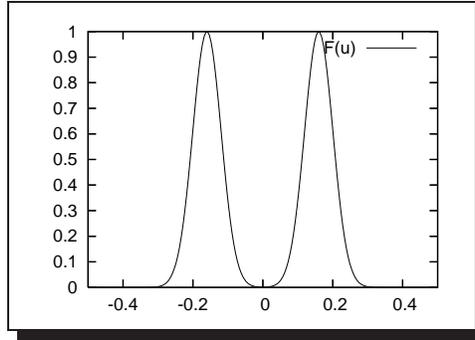
Réponse

1.

- On va se servir d'une part de la relation établie en cours : $\exp(-\pi x^2) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-\pi \nu^2)$
- De la propriété de contraction dilatation de la TF : $\mathcal{F}[f(ax)] = (1/|a|)F(\nu/a)$
- Sachant de plus que : $\cos(2\pi f_0 y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}[\delta(\nu - f_0) + \delta(\nu + f_0)]$

La réponse fréquentielle (ou MTF) associée à cette PSF s'écrit dans le domaine de Fourier, avec la convention $f(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(u, \nu)$

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right] \cdot \cos(2\pi f_0 y) \\
 \Downarrow \mathcal{F} \\
 H(u, \nu) &= 2\pi\sigma_x\sigma_y \exp[-2\pi^2(\sigma_x^2 u^2 + \sigma_y^2 \nu^2)] * [\delta(\nu - f_0) + \delta(\nu + f_0)] \\
 &= 2\pi\sigma_x\sigma_y \exp(-2\pi^2\sigma_x^2 u^2) \cdot \left\{ \exp\{-2\pi^2\sigma_y^2 (\nu - f_0)^2\} + \exp\{-2\pi^2\sigma_y^2 (\nu + f_0)^2\} \right\}
 \end{aligned}$$



Donc un filtre passe-bande.

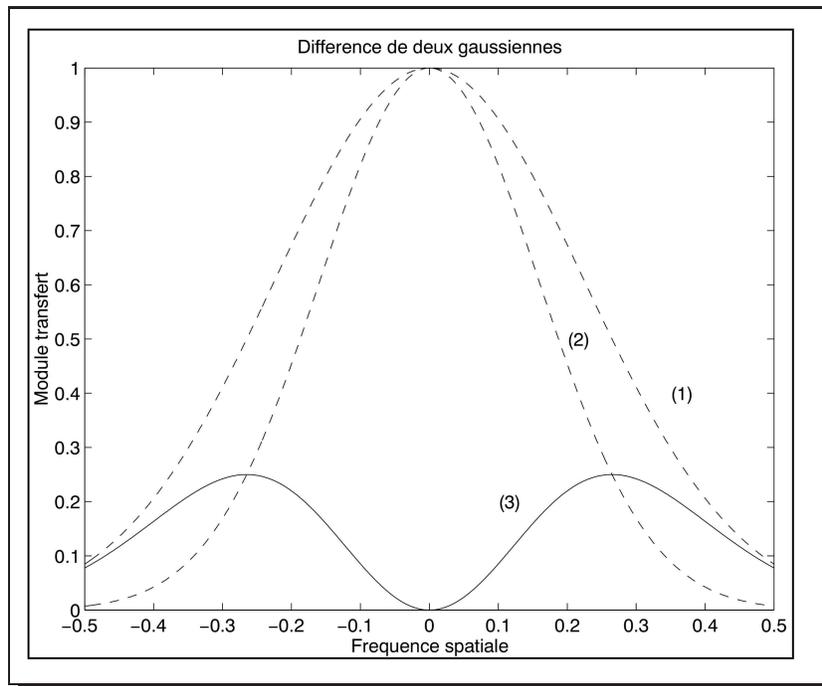
<12 pts>

2.

La distributivité de l'opérateur de convolution permet d'écrire la relation spatiale utilisée dans les points SIFT sous la forme

$$\{G(x, y, k\sigma) * I(x, y)\} - \{G(x, y, \sigma) * I(x, y)\} = I(x, y) * \underbrace{(G(x, y, k\sigma) - G(x, y, \sigma))}_{PSF}$$

Il reste à savoir quel réponse fréquentielle est associée à une PSF qui est la différence de deux Gaussiennes (DOG :difference of Gaussians), la deuxième étant plus large que la première ($0 < k < 1$). Or, une Gaussienne dans le domaine spatiale donne une Gaussienne dans le domaine fréquentiel et la propriété de dilatation-contraction de la TF nous permet de dire que cette opération spatiale équivaut à une différence de deux Gaussiennes, la première étant plus large que la seconde. Une différence de deux Gaussiennes dont la seconde est plus large que la première dessine, dans le domaine fréquentiel, une réponse fréquentielle associée à un filtre passe-bande (cf. cours)



L'opération spatiale donnée équivaut donc à un filtre passe-bande. Les différentes valeur de k font déplacer la bande de fréquence associée à ce filtre passe-bande. Plus k de rapproche de 1, plus la bande de fréquence se déplace vers les hautes fréquences. Ce raisonnement est à rapprochée de celle que l'on a eu pour le filtre de Marr-Hildreth (cf. slide 26 du chapitre Filtrage Spatiale).

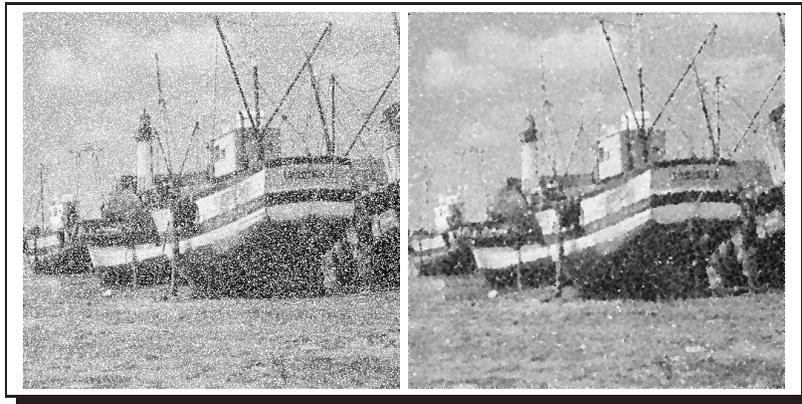
<9 pts>

3.

Il s'agit d'un **filtre à opération locale** moyenneur avec un voisinage sélectionné et donc, un **filtre passe-bas** (qui serait **adaptatif** en filtrant en dehors des zones de transition). On peut s'en convaincre en remarquant, d'une part, que le filtrage d'une zone homogène dans laquelle tous les pixels ont un niveau de gris similaire, restera homogène avec le même niveau de gris. De plus, la procédure calculant la variance de chaque sous-domaine et sélectionnant le domaine D_i^s où cette variance est la plus faible permet de sélectionner le domaine D_i^s où, vraisemblablement, aucun contour ne passe et donc de faire un filtrage (passe-bas) uniquement en dehors des zones de transitions un peu comme le filtre adaptatif vu en cours au chapitre Filtrage Spatial (slide 11). Ce filtre semble donc **robuste au bruit Gaussien** et adaptatif en filtrant en dehors des zones de transition. De plus, il est aussi **robuste au bruit impulsionnel** et plus généralement aux pixels hors norme (outliers) comme ceux créés par du bruit impulsionnel. Il semble aussi préserver et même améliorer le contraste; les zones avant et après la transition sont plus homogènes.

< 8 pts >

Nota : Voici un exemple d'image filtré par ce filtre (appelé aussi filtre de Nagao) (image bruitée par un bruit sel 30% et filtrée)



4.

Sans perte de généralité, on raisonne en une dimension, et le filtrage spatial ou fréquentiel nous permet d'écrire

$$g(x) = f(x) * h(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} G(\nu) = F(\nu) \cdot H(\nu)$$

Sachant que la valeur moyenne du signal (image) g , f et h sont respectivement $G(\nu = 0)$, $F(\nu = 0)$ et $H(\nu = 0)$. Si $H(\nu = 0) = 0$ alors $G(\nu = 0) = 0$. Donc, si la valeur moyenne du masque de convolution h est nulle alors la valeur moyenne du signal g est nulle.

< 5 pts >

Nota : Une autre démonstration plus calculatoire mais tout aussi valable consiste à dire :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) * h(x) = \sum_i \sum_j f(x-i, y-j) h(i, j) \\ \text{et } \text{Moy}_g &= \frac{1}{N^2} \sum_x \sum_y g(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j \sum_x \sum_y f(x-i, y-j) h(i, j) \\ &= \frac{1}{N^2} \underbrace{\sum_i \sum_j h(i, j)}_{=0} \sum_x \sum_y f(x-i, y-j) = 0 \end{aligned}$$

1. **Transformée de Hadamard**

Peux t'on appliquer la propriété de séparabilité (vue pour la TFD) pour la transformée de Hadamard ? Justifier votre réponse.

<5 pts>

2. **Couleur**

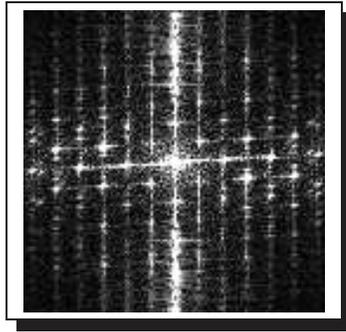
On demande à un traiteur d'image de réaliser une petite simulation informatique qui permettrait d'afficher la couleur perçue **par le système visuel humain** d'une source lumineuse $S_T(\lambda)$ qui a la propriété de produire un rayonnement polychromatique pour différentes températures données T .

Expliquer ce qu'est un rayonnement polychromatique et expliquer qualitativement comment on pourrait créer cette simulation.

<8 pts>

3. **Texton**

On calcule le module du spectre d'une image texturée (de taille $N = 128$) et, après recalage cyclique, application d'une fonction log pour rehausser les hautes fréquences) et on trouve le spectre suivant



Dans ce type d'image on a l'impression de voir un spectre discrétisé, et plus précisément une fonction spectrale pour laquelle on a pris des échantillons à des intervalles régulièrement espacés de $S(u, \nu)$ en u et en ν , qui sont de l'ordre de ≈ 9 pixels pour cette image dans chacune des directions.

Trouver la relation mathématique qui exprime que l'on voit une version discrétisée de $S(u, \nu)$ et trouver ensuite la longueur moyenne du texton de cette image texturée.

<8 pts>

4. **Tracking**

On aimerait implémenter une technique de suivi de formes (ou tracking) des voitures mobiles circulant dans un parking par corrélation entre les images d'une séquence vidéo (d'une caméra de surveillance) et le masque de corrélation de la voiture mobile que l'on a préalablement extrait de la première image de la séquence vidéo.

- (a) Énoncer quelques techniques qui permettent de rendre plus robuste ou contraindre ce système de suivi de forme.

<5 pts>

- (b) Sans les techniques précédentes, pourquoi pourrait-on dire que ce problème (de suivi de forme) est possiblement mal posé ?

<2 pts>



5. Bruit Gaussien

A quoi est égale la fonction d'autocorrélation d'un signal ne comportant que du bruit blanc Gaussien blanc d'écart type σ ? Comment aurait-on pu retrouver cela par la connaissance de la forme de son énergie spectrale?

<4 pts>

Réponse

1.

Oui car le noyau de cette transformée est séparable de la façon suivante

$$(-1)^{\sum_{i=1}^n b_i(x)a_i(u)+b_i(y)a_i(v)} = (-1)^{\sum_{i=1}^n b_i(x)a_i(u)} (-1)^{b_i(y)a_i(v)}$$

<5 pts>

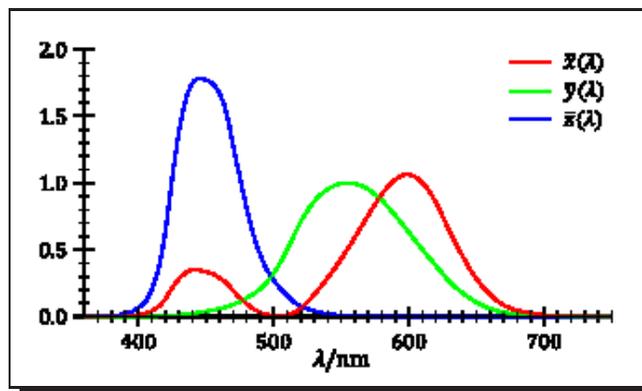
2.

On appelle rayonnement monochromatique un rayonnement comportant une seule longueur d'onde et rayonnement polychromatique un rayonnement qui en contient plusieurs (c'est à dire un spectre lumineux).

<3 pts>

La réponse des trois capteurs RVB de notre système visuel humain est donnée par les intégrales

$$X = \int \bar{x}(\lambda) S_T(\lambda), \quad Y = \int \bar{y}(\lambda) S_T(\lambda), \quad Z = \int \bar{z}(\lambda) S_T(\lambda)$$



ensuite on convertit XYZ en RGB avec l'aide des formules ou du diagramme de chromacité.

<5 pts>

3.

La fonction spectrale $S(u, \nu)$ semble discrétisée, c'est à dire que mathématiquement, elle semble se mettre sous la forme (avec la correspondance $x \Leftrightarrow u$ et $y \Leftrightarrow \nu$) :

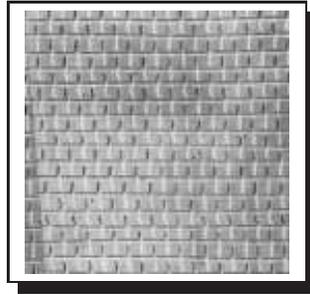
$$S(u, \nu) \cdot \text{III}_T(u, \nu) \stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} s(x, y) * \text{III}_{1/T}(x, y)$$

en posant III_T un peigne de dirac espacé de $T = 9$ pixels en u et en ν , c'est à dire espacé d'une fréquence numérique de $T = 9\Delta\nu = 9/N$.

La relation précédente montre donc que quelquechose (i.e., $s(x, y)$) visiblement se périodise spatialement (à cause de l'opérateur $*\text{III}_{1/T}$) tous les $1/T = N/9 = 128/9 \approx 14$ pixels (en moyenne) dans chaque direction (N étant la longueur de l'image carrée).

< 8 pts >

Ce que l'on peut constater si on regarde l'image texturée pour laquelle on avait calculé le module de sa TF.



4.(a)

Pour contraindre ce problème et le rendre plus robuste, on pourrait re-mettre à jour le masque de corrélation (pour rendre le problème de tracking invariant selon la position de la voiture) et délimiter une zone de recherche autour de la position du masque obtenu à l'image précédente (exprimant le fait que la voiture ne peut se déplacer plus vite qu'une certaine vitesse). On pourrait aussi considérer un ensemble de masque (correspondant à la voiture pour différentes valeurs discrétisées de rotation) et prendre le minima de cette serie d'autocorrélation. Une detection de mouvement permettrait aussi de distinguer parmi les pics de corrélation seulement celui qui est associé à une zone mobile (et permettrait d'éliminer les solutions abérantes et donc contraindre efficacement ce problème).

< 5 pts >

4.(b)

Sans ces contraintes, le problème est mal posé car l'étude de la fonction d'auto-corrélation pourrait exhiber plusieurs pics (un des pics correspondant à une des voiture garée dans le parking qui ressemble beaucoup à la voiture mobile), donc plusieurs solutions. Pour rendre le problème bien posé (une seule solution correspondant à la voiture mobile), il faut donc contraindre le problème.

< 2 pts >

5

Soit $b(x)$, ce bruit Gaussien blanc. L'énergie spectrale de ce bruit blanc Gaussien est une constante de paramètre σ^2 , donc sa fonction d'autocorrélation est un pic de dirac pondéré par σ^2 , en effet, mathématiquement

$$b(x) * b(-x) = \sigma^2 \cdot \delta(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} B(\nu) \cdot B^*(\nu) = |B(\nu)|^2 = \sigma^2$$

< 4 pts >