



DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 10/12/2013

I	Transformée de Fourier (35 pts)
II	TFD, FFT et calcul de Spectre (15 pts)
III	Opérations Ponctuelles (05 pts)
IV	Filtrage (20 pts)
V	Restauration (20 pts)
VI	Misc. (35 pts)
Total	130 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (35 pts)

1. Expliquer en quelques lignes quelle est la différence, en terme de modèle, entre la série de Fourier, la série de Fourier complexe et la Transformée de Fourier (TF).

<5 pts>

2. Avec la convention $f(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu)$, montrer que $f(-x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F^*(\nu)$ (pour $f(x)$ réelle et avec $F^*(\nu)$ désignant la conjuguée de $F(\nu)$).

<5 pts>

3. (a) Soit la fonction signe, notée $\text{sgn}(x)$ et pour laquelle

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés intéressantes de $F(\nu) = \mathcal{F}[\text{sgn}(x)]$ que l'on pourrait déduire à partir des propriétés de $\text{sgn}(x)$ et des propriétés de la TF.

<5 pts>

- (b) Trouver la TF de cette fonction signe, en exprimant la dérivée de la fonction signe et en utilisant une propriété de la TF.

<5 pts>

- (c) En déduire finalement, à partir de la question précédente, et d'une propriété de la TF, $H(\nu)$, la TF de $h(x) = 1/x$.

<5 pts>

- (d) En déduire de la question précédente, et d'une propriété de la TF, la TF de la fonction $g(x) = 1/x^2$.

<5 pts>

4. Considérons que la fonction $f(x)$ est paire et réelle. Prouver (en utilisant la TF) que pour tout entier $n > 0$, on a aussi,

$$\frac{\partial^{(2n+1)} f(x)}{\partial x^{(2n+1)}} \text{ est une fonction impaire}$$

où $\partial^n / \partial x^n$ désigne la dérivée n-ième par rapport à x .

<5 pts>

Réponse

1

La Transformée de Fourier (TF) est la généralisation de la série de Fourier complexe aux signaux (intégrables) quelconques (pas forcément périodiques), qui elle-même est la généralisation de la série de Fourier incluant la notion (ou le modèle) de fréquences négatives (grâce aux nombres complexes).

Autrement dit, la TF s'applique à des signaux quelconques (périodiques ou non périodiques) et inclue la notion de fréquences négatives. La série de Fourier complexe est plus facile à manipuler (que des fonction trigonométriques) et ne s'applique que pour des signaux périodiques mais inclue le modèle des fréquences négatives. La série de Fourier ne s'applique qu'aux signaux périodiques et ne modélise que les fréquences réelles, *i.e.*, les fréquences positives.

<5 pts>

2

La façon la plus simple est la suivante :

$$\begin{aligned}
f(x) \text{ paire} &\stackrel{\mathcal{F}}{\iff} F(\nu) \text{ réelle} \\
\Leftrightarrow f(x) = f(-x) &\stackrel{\mathcal{F}}{\iff} F(\nu) = F^*(\nu) \\
\text{donc } f(-x) &\stackrel{\mathcal{F}}{\iff} F^*(\nu)
\end{aligned}$$

<5 pts>

Nota : La passage par la propriété de dilatation-contraction, *i.e.*, $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$ est possible mais la démonstration nécessite deux étapes :

$$f(-x) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \frac{1}{|-1|} F\left(\frac{\nu}{-1}\right) = F(-\nu)$$

Mais $f(x)$ réelle donc $F(-\nu) = R(-\nu) + jI(-\nu)$ est à symétrie hermitienne, *i.e.*, $R(-\nu) = R(\nu)$ et $I(-\nu) = -I(\nu)$, et donc : $f(-x) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} F(-\nu) = R(-\nu) + jI(-\nu) = R(\nu) - jI(\nu) = F^*(\nu)$. On a donc bien $f(-x) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} F^*(\nu)$.

3.(a)

La fonction $\text{sgn}(x)$ est impaire, sa TF sera donc imaginaire pure. $\text{sgn}(x)$ étant une fonction réelle, sa TF sera donc à symétrie hermitienne. Sa TF sera donc imaginaire pure et impaire.

De plus, le signal étant non périodique, sa TF sera continue et $\text{sgn}(x)$ possédant une discontinuité (à l'origine), sa TF demandera beaucoup d'harmoniques pour reconstruire cette discontinuité ce qui se traduira par un support fréquentiel assez grand.

<5 pts>

3.(b)

Il y a deux discontinuités à l'origine de la fonction signe et, partout ailleurs, sa dérivée est nulle, donc

$$\text{sgn}'(x) = 2\delta(x)$$

En utilisant maintenant, $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\text{sgn}'(x)] = \mathcal{F}[2\delta(x)] = 2 &= 2\pi j\nu \mathcal{F}[\text{sgn}(x)] \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi j\nu \mathcal{F}[\text{sgn}(x)] = 2 \\
\mathcal{F}[\text{sgn}(x)] &= \frac{1}{j\pi\nu}
\end{aligned}$$

<5 pts>

3.(c)

La question précédente nous a permis de trouver $\mathcal{F}[\text{sgn}(x)] = \frac{1}{j\pi\nu}$.

En utilisant maintenant la propriété duale, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}(\nu)] &= \frac{1}{-j\pi x} \\
\text{sgn}(\nu) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{-j\pi x}\right] \\
\mathcal{F}[1/x] &= -\pi j \text{sgn}(\nu)
\end{aligned}$$

<5 pts>

3.(d)

En utilisant la propriété $\mathcal{F}[f'(x)] = \mathcal{F}\left[\left(\frac{1}{x}\right)'\right] = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{x^2}\right] = 2\pi j\nu F(\nu) = 2\pi j\nu (-\pi j \text{sgn}(\nu)) = 2\pi^2 \nu \text{sgn}(\nu)$ on a donc :

$$\mathcal{F}[1/x^2] = -2\pi^2 \nu \text{sgn}(\nu)$$

<5 pts>

Nota : On aurait put dire aussi que :

$$(1/x^2) = (1/x) \cdot (1/x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} [-\pi j \operatorname{sgn}(\nu)] * [-\pi j \operatorname{sgn}(\nu)] = -\pi^2 \operatorname{sgn}(\nu) * \operatorname{sgn}(\nu)$$

Ce qui aurait été juste aussi, bien que l'expression $\mathcal{F}[1/x^2] = -2\pi^2 \nu \operatorname{sgn}(\nu)$ est plus intéressante. Les deux dernières expressions nous montre donc aussi que : $\operatorname{sgn}(\nu) * \operatorname{sgn}(\nu) = 2\nu \operatorname{sgn}(\nu)$.

4.

Si $f(x)$ est paire et réelle, $F(\nu)$ (i.e., sa TF) est aussi paire et réelle, de plus nous avons

$$\frac{\partial^{(2n+1)} f(x)}{\partial x^{(2n+1)}} \stackrel{\mathcal{F}}{=} (2\pi j \nu)^{2n+1} F(\nu) = (2\pi \nu)^{2n+1} (j)^{2n+1} F(\nu) \propto \nu^{2n+1} (-1)^n j F(\nu)$$

$\nu^{2n+1} (-1)^n j F(\nu)$ sera imaginaire pure donc $\frac{\partial^{(2n+1)} f(x)}{\partial x^{(2n+1)}}$ sera impaire (car une fonction impaire donne une TF qui est imaginaire pure).

<5 pts>

II. TFD, FFT et calcul de Spectre (15 pts)

1. Indiquer comment on passe de la Transformée de Fourier d'une fonction continue à la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal discrétisé en N échantillons, i.e.,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi j u x) dx \quad (u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(\frac{-2\pi j u x}{N}\right) \quad (u = 0, 1, \dots, N-1)$$

Justifier bien, par exemple, la présence du N , dans la deuxième formule.

<5 pts>

2. (a) Calculer par TFD les quatre coefficients spectraux du vecteur de 4 échantillons suivants :

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Indiquer aussi quel intervalle de fréquence sépare le premier du deuxième échantillon.

<5 pts>

- (b) Calculer en utilisant le principe de la FFT les deux premiers échantillons spectraux ($F(\nu = 0)$ et $F(\nu = 1)$) de ce même vecteur.

<5 pts>

Réponse

1

Dans la TF continue, on a des valeurs continues pour $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et une continuité des fréquences harmoniques $u \in \mathbb{R}$ (pour des signaux non périodiques).

Pour la TFD, on a $x = x \Delta x$, $x \in N$ avec $\Delta x = T_e$, résolution spatiale ou période d'échantillonnage et x prenant des valeurs entières correspondant au numéro d'échantillons de la fonction discrétisée. On a aussi $u = u \Delta u$, $u \in N$, résolution fréquentielle et u prenant des valeurs entières, correspondant au numéro d'échantillons du spectre (ou TF) discrétisé.

Lorsqu'on fait le passage TF \triangleright TFD, on a la résolution fréquentielle Δu correspondant à la plus petite fréquence détectable dans le signal qui correspond à l'inverse de la plus grande période existant dans le signal (égale à la longueur même du signal), ce qui s'écrit :

$$\underbrace{u x \quad (u, x \in \mathbb{R}^2)}_{\text{TF}} = \underbrace{u \Delta u x \Delta x = u \frac{1}{N \Delta x} x \Delta x = \frac{u x}{N} \quad (u, x \in \mathbb{I}N^2)}_{\text{TFD}}$$

Lorsqu'on fait le passage TF \triangleright TFD, de plus, l'intégrale continue se change en somme discrète sur les N échantillons du signal. Le facteur $1/N$ au début est un facteur de normalisation.

<5 pts>

2.(a)

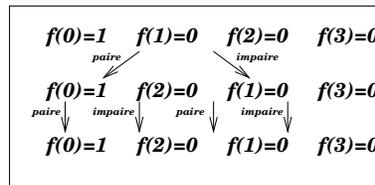
par TFD, on trouve facilement : $F(0) = F(1) = F(2) = F(3) = \frac{1}{4}$ (i.e., $F = \frac{1}{4} \cdot [1 \ 1 \ 1 \ 1]$)

<3 pts>

Chaque échantillon fréquentiel est séparé de la résolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/N T_e = 1/N \Delta x$, avec $N = 4$. Comme aucun renseignement n'est donné sur $T_e = \Delta x$, alors $T_e = \Delta x = 1$ et chaque échantillon fréquentiel est donc séparé de la fréquence numérique $\Delta\nu = 1/4$.

<2 pts>

2.(b)



On doit donc calculer $F_4(0)$ et $F_4(1)$

$$\begin{aligned} F_4(0) &= \frac{1}{2} [F_2^{\text{paire}}(0) + F_2^{\text{impaire}}(0)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}} + F_1^{\text{impaire}}(0)] + \frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}}(0) + F_1^{\text{impaire}}(0)] \right] \\ &= \frac{1}{4} [1 + 0 + 0 + 0] = 1/4 \end{aligned}$$

<2.5 pts>

$$\begin{aligned} F_4(1) &= \frac{1}{2} [F_2^{\text{paire}}(1) - j F_2^{\text{impaire}}(1)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}}(1) - F_1^{\text{impaire}}(1)] - (j/2) [F_1^{\text{paire}}(1) + F_1^{\text{impaire}}(1)] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [1 - 0] - (j/2) [0 - 0] \right] = 1/4 \end{aligned}$$

<2.5 pts>

III. Opérations Ponctuelles (5 pts)

- On veut créer algorithmiquement en langage C, une opération ponctuelle qui à partir d'une image d'entrée `IMGIN` de moyenne μ_{In} et de variance σ_{In}^2 nous donne une image de sortie `IMGOUT` de même moyenne et de variance $\sigma_{Out}^2 = \sigma_{In}^2/4$. Donner l'implémentation de la fonction

`DECREASECONTRAST(FLOAT** IMGIN, FLOAT** IMGOUT, INT LGTH, INT WPTH)` en langage C ou en pseudo-code.

<5 pts>

Réponse

1

```
void DecreaseContrast(float** ImgIn, float** ImgOut,int lgth,int wdth)
. {
.   float Tmp;
.   float MoyI=0;
.   for(int i=0;i<lgth;i++) for(int j=0;j<wdth;j++) MoyI+=ImgIn[i][j];
.   MoyI /=(lgth * wdth)
.   for(i=0;i<lgth;i++) for(j=0;j<wdth;j++)
.     {
.       Tmp=(ImgIn[i][j]- MoyI)/2;
.       ImgOut[i][j]=Tmp + MoyI;
.     }
. }
```

Car diviser la variabilité de l'amplitude du signal intensité par deux permet de diviser la variance de l'intensité par quatre.

<5 pts>

IV. Filtrage (20 pts)

1. Filtrage Passe-Bas

- (a) Expliquer ou démontrer pourquoi tous les masques de convolution avec des coefficients positifs sont des filtres passe-bas ?

<5 pts>

- (b) Prouver qu'une image f que l'on convolue avec un filtre h dont la somme des éléments est égale à un donne une image g dont la moyenne des niveaux de gris est égale à sa moyenne avant filtrage.

<5 pts>



- (c) On vient de réaliser un flou sur l'image MONA en procédant dans le domaine spectral et en utilisant l'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform) et un filtre de moyenne de taille 15×15 . On obtient le résultat montré à droite de l'image MONA. Expliquer en justifiant pourquoi il existe (sur l'image rendue floue) une sorte de grosse ligne noire sur le côté supérieur de l'image (*i.e.*, sur les premières lignes de l'image floue).

<5 pts>

2. Filtrage Passe-Haut

- (a) Quels sont l'avantage et l'inconvénient principal d'utiliser une dérivée seconde (*via* le calcul d'un laplacien) sur une dérivée première (*via* le calcul d'un gradient) pour déterminer quels sont les pixels de l'image appartenant à un contour ?

<5 pts>

Réponse

1.(a)

Une image a la propriété d'être ergodique. C'est-à-dire que dans le cas d'une image, une moyenne spatiale locale aura les mêmes effets qu'une moyenne d'ensemble ($E\{\cdot\}$); qui a pour effet l'atténuation d'un bruit blanc Gaussien additif, i.e., l'effet d'un filtre passe-bas. Un filtrage spatial étant une opération locale à un voisinage et aussi une moyenne spatiale pondérée si tous les coefficients sont positifs, il sera donc aussi un filtre passe-bas.

<5 pts>

1.(b)

Sans perte de généralité, on raisonne en une dimension, et le filtrage spatial ou fréquentiel nous permet d'écrire

$$g(x) = f(x) * h(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \quad G(\nu) = F(\nu).H(\nu)$$

Sachant que la valeur moyenne du signal (image) g , f et h sont respectivement $G(\nu = 0)$, $F(\nu = 0)$ et $H(\nu = 0)$. Si $H(\nu = 0) = 1$ alors $G(\nu = 0) = F(\nu = 0)$. Donc, si la valeur moyenne du masque de convolution est égale à un, l'image filtrée aura la même moyenne que l'image non filtrée.

<5 pts>

1.(c)

Puisqu'on a utilisé une FFT, l'image MONA utilisée dans cette convolution est en fait l'image de MONA se répétant indéfiniment en ligne et colonne (ou cette même image mais toroidale). La grosse ligne noire que l'on voit est en fait le résultat du moyennage des niveaux de gris du haut de l'image (qui sont clairs) avec les niveaux de gris (très noirs) des dernières lignes de l'image.

<5 pts>

1.(d)

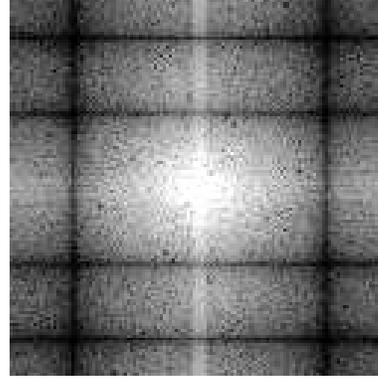
La technique utilisant l'utilisation d'une estimation du gradient (dérivée première) pour savoir si un pixel de l'image est un contour est relativement sensible à un seuil. Par contre, l'utilisation d'une estimation du d'une dérivée seconde permet de déterminer un point de contour en se basant, après filtrage, sur la détection de passage à zéro (entouré de valeurs d'estimée de dérivée seconde de signe opposé), donc sans réellement de seuil. Le désavantage de l'estimation d'une dérivée seconde sur la dérivée première est sa considérable sensibilité au bruit.

<5 pts>

V. Restauration (20 pts)

1. Estimation des paramètres

- (a) Soit $g(x, y)$, l'image de Mona dégradée par un flou non uniforme 2D, de largeurs d_x en x et d_y en y (en pixels) inconnues que l'on va chercher à déterminer dans cet exercice. On dispose pour cela de la connaissance de la TF (Transformée de Fourier) de l'image de Mona floue $G(u, \nu)$ (i.e., $g(x, y) \iff G(u, \nu)$) après recalage cyclique pour que le centre apparaisse au centre de l'image et rehaussement des hautes fréquences avec une transformation du type $\log[1 + G(u, \nu)]$ (comme celle vue en Travaux Pratiques).



Estimer les paramètres d_x et d_y de la PSF.

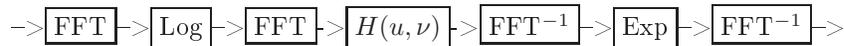
<7 pts>

(b) Écrire la masque de convolution de cette PSF.

<3 pts>

2. Suite d'Opérations Inconnues

(a) Soit $g(x, y)$ une image rendue floue par une PSF Gaussienne $h(x, y)$ de largeur $\sigma = 3$ pixels (et bruit négligeable). On réalise sur l'image $g(x, y)$, les opérations suivantes :



Indiquer, en le justifiant du mieux possible, ce qui va sortir de cette suite d'opérations si Exp est l'opération inverse du Log et si $H(u, \nu)$ à une fonction de transfert (MTF) identique à un passe-Bas.

<10 pts>

Réponse

1.(a)

On a la relation mathématique suivante : $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = f(x, y) * \frac{1}{d_x d_y} \Pi\left(\frac{x}{d_x}, \frac{y}{d_y}\right)$

On sait que du flou (i.e., des absences de discontinuités) dans une direction entraîne des faibles coefficients dans la direction perpendiculaire à cet axe dans le domaine fréquentiel voire même des coefficients nuls lorsque dans cette direction lorsque H comporte des zéros fréquentiels, ce qui est le cas de la TF d'une porte. Donc dans notre cas, puisque des zéros apparaissent dans les deux directions, $d_x \neq 1$ et $d_y \neq 1$ et doivent être estimés. En utilisant la correspondance x (colonne) $\Leftrightarrow u$ et y (ligne) $\Leftrightarrow \nu$, on a

$$\Pi\left(\frac{x}{d_x}, \frac{y}{d_y}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \frac{\sin(\pi u d_x)}{(\pi u d_x)} \frac{\sin(\pi \nu d_y)}{(\pi \nu d_y)} \quad (\text{à une constante de proportion près})$$

Avec le sinc qui s'annule tous les $u = 1/d_x$ et $\nu = 1/d_y$. Sachant que $G(u, \nu)$ est représenté pour $u, \nu \in [-1/2 : 1/2]$ (fréquences numériques), on en déduit immédiatement $u = 1/d_x = 1/3$ et $\nu = 1/d_y = 1/5$ soit $d_x = 3$ pixels et $d_y = 5$ pixels.

<7 pts>

1.(b)

On a le masque de convolution suivante :

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<3 pts>

ou, $h(x, y) = \frac{1}{15} \Pi\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{5}\right)$

2

Puisqu'on a un bruit négligeable, on a donc la relation mathématique suivante : $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$ avec $f(x, y)$ l'image parfaite (non dégradée par le flou).

▷ La première opération (-> **FFT** ->) permet de calculer la TF de cette image floue, soit la TF de $g(x, y)$. Avec les conventions $(x, y) \Rightarrow (u, \nu)$, on obtient en sortie de ce premier bloc, la relation suivante :

$$G(u, \nu) = F(u, \nu) H(u, \nu)$$

▷ La deuxième opération (-> **Log** ->) est un log (fait dans le domaine spectral et localement pour chaque pixel). Donc en sortie de ce deuxième bloc : $\log(G(u, \nu)) = \log(F(u, \nu)) + \log(H(u, \nu))$.

▷ Les trois autres opérations (-> **FFT** -> **$H(u, \nu)$** -> **FFT^{-1}** ->) représentent un filtrage Passe-Bas, mais ce filtrage est fait sur l'image qui additionne le log des deux spectres (spectre de l'image et spectre de la PSF). Le spectre d'une image comporte beaucoup plus de discontinuités que le spectre d'une Gaussienne d'un ou deux pixels d'écart type dans le domaine spatial (cf. TP restauration). Ces deux opérations vont donc laisser passer $\log(H(u, \nu))$ et atténuer beaucoup (voire annuler) $\log(F(u, \nu))$. A la sortie de ces 3 blocs, on aura donc $\log(H(u, \nu))$.

▷ L'opération suivante (-> **Exp** ->) permet de se débarrasser du Log. On aura donc en sortie de ce bloc ($H(u, \nu)$).

▷ La dernière opération (**FFT^{-1}** ->) permet bien sur de retrouver en sortie $h(x, y)$, c'est-à-dire la PSF ou la fonction de floue de notre image initiale.

<10 pts>

Nota : Cette technique est appelée estimation de PSF par filtrage homomorphique. Elle nécessite que le log du spectre de la PSF soit ici de basse fréquence ce qui est vrai ici puisqu'une Gaussienne de trois pixels de variance dans le domaine spatial donnera une Gaussienne de largeur à peu près 1/3 de l'image dans le domaine fréquentiel, soit relativement lisse et sans discontinuité. Il est ainsi nécessaire que la PSF à estimer ne crée pas de zéros dans le domaine fréquentiel comme une fonction porte car le log a proximité de ces zéros créera des zones de hautes fréquences et l'hypothèse faite de basse-fréquence ne serait plus valable.

VI. Misc. (35 pts)

1. Quelle serait la bonne stratégie pour essayer de binariser efficacement cette image, i.e., segmenter en deux classes cette image ; la classe associée aux formes carrées et la classe associée au fond ?

<5 pts>



2. Dans le Travail Pratique 4 : tomographie par rétroprojection filtrée, je vous ai demandé d'implémenter cette méthode en trois points. Le premier point étant : on calcule $P_\theta(u)|u|$ (projection filtrée). Or dans le cours, j'ai fait mention de combiner $|u|$ et de multiplier cette MTF (fonction de transfert) par une fenêtre de Hamming. Expliquer pourquoi malgré l'absence de cette fenêtre de Hamming, la méthode de reconstruction faites en TP marche. Marcherait -elle mieux si on utilisait cette fenêtre de Hamming en TP? Expliquer pourquoi.

<5 pts>

3. Expliquer comment vous pouvez transformer l'image de gauche en l'image de droite à l'aide de la morphologie mathématique. Donner la forme et la taille du ou des masques (éléments structurants) que vous avez choisis. Pour l'image de droite, les trois bandes noires dans le grand rectangle blanc sont de dimension 3×12 (en haut), 15×3 (au centre) et 12×5 (à droite), respectivement. L'objet est blanc.



4. En segmentation, dire quelle est la différence entre une classe et une région.

<5 pts>

5. Dans le cas d'une segmentation d'une image texturée où l'on prend la stratégie classique 1-] extraction de caractéristiques texturales sur une petite fenêtre (de dimension $N \times N$) centrée sur chaque pixel et 2-] clustering de ces vecteurs de caractéristique en K classes en utilisant l'algorithme des K moyennes. Discuter pourquoi en justifiant bien vos arguments, la taille de la petite fenêtre (de dimension $N \times N$) ne doit être ni trop petite, ni trop grande.

<5 pts>

6. Dans le Travail Pratique 5 : Segmentation MV et Markovienne, question D, on vous demandait d'implémenter un recuit simulé itérant d'une température initiale $T_0 = 50$ jusqu'à une température finale de $T_{\min} = 0.1$ avec une décroissance en température du style $T_{n+1} = \tau \cdot T_n = (0.99) \cdot T_n$ ou n est l'itérations.

- (a) On veut maintenant que l'utilisateur de l'algorithme fixe le nombre d'itérations N du recuit simulé et que l'algorithme calcule automatiquement le facteur de décroissance τ nécessaire pour que l'algorithme itère toujours d'une température initiale $T_0 = 50$ jusqu'à une température finale de $T_{\min} = 0.1$ (après ces N itérations). Trouver la formule donnant τ en fonction de N, T_0, T_{\min} .

<5 pts>

- (b) Si on voulait vraiment respecter la décroissance de température théorique permettant de s'extraire de tous les minima locaux d'une fonction d'énergie, il faudrait considérer une décroissance de température de la forme $T_n = T_0 / \ln(n)$ (avec un log népérien). Indiquer combien de fois cette décroissance de température serait plus lente que celle que vous avez utilisé dans le Travail Pratique 5.

<5 pts>

Réponse

1

Le problème avec cette image est l'effet de *shadding* du fond qui fait en sorte que l'utilisation de l'histogramme de l'image soit complètement inutile car celui-ci ne montrera pas deux bosses (ou Gaussiennes) associées à la répartition des niveaux de gris associés à ces deux classes (forme carrée et fond). Pour annuler cet effet de shading, un filtrage homomorphique serait judicieux comme pre-traitement et permettrait, une fois l'image traitée, de se retrouver avec une image dont l'histogramme va exhiber deux bosses et pour lequel on prendrait simplement un seuil au milieu de ces deux bosses.

<5 pts>

2

Dans le TP, on a simulé un tomographe en réalisant des coupes projectives d'une image en intégrant, selon des lignes de projections, (simulant les rayons X) de l'image. Cette opération d'estimation de coupes projectives (synthétiquement) se fait dans notre cas sans (ajout) de bruit (mis à part le bruit de quantification existant dans chaque niveau de gris de l'image) alors que dans le cas de vraies coupes projectives obtenues par rayons X sur un patient, cette opération serait entachée d'un bruit du au capteur. Du coup, la multiplication de la fenêtre de Hamming, dans notre cas n'est pas nécessaire (car le bruit est absent) et n'apporterait pas d'amélioration sensible (le seul bruit que l'on a est un bruit très faible de quantification).

<5 pts>

3

On effectue une dilatation avec un masque 3×3 , puis une érosion avec le même masque, c'est-à-dire la fonction fermeture avec un masque 3×3 .

<5 pts>

4

Une région est un ensemble de pixels connecté partageant la même classe. Une classe est un ensemble de pixels partageant les mêmes caractéristiques (de niveaux de gris, texturale, de mobilité, etc.)

<5 pts>

5

La fenêtre (de dimension $N \times N$) ne doit pas être trop petite pour avoir assez de niveaux de gris pour permettre une bonne estimation des caractéristiques texturales (et bien caractériser des textures grossières aussi). Elle ne doit pas être trop grande pour permettre d'avoir une image segmentée, après le clustering des K -moyennes qui soit assez précis (dans le cas contraire, beaucoup de vecteurs de caractéristiques se trouveront à cheval entre deux textures).

<5 pts>

6.(a)

$$\begin{aligned} \text{Dans notre cas, on a donc la décroissance :} & & T_{n+1} &= T_0 \cdot (0.99)^n = T_0 \cdot \tau^n \\ \text{avec } T_0 = 50 \text{ et une température finale } T_{\min} = 0.1 & \triangleright & 0.1 &= 50 \cdot \tau^n \\ & & \ln(T_{\min}) &= \ln(T_0) + n \ln(\tau) \end{aligned}$$

$$\text{Donc pour } n=N : \quad \tau = \exp\left(\frac{\ln(T_{\min}) - \ln(T_0)}{N}\right)$$

<5 pts>

Nota :

On pourrait écrire aussi, à partir de : $T_{\min} = T_0 \tau^n$

$$\Leftrightarrow T_{\min} = T_0 \tau^n \quad \Leftrightarrow \tau^n = T_{\min}/T_0 \quad \Leftrightarrow \text{pour } N=n, \quad \tau = (T_{\min}/T_0)^{1/N}$$

6.(b)

Dans le cas du TP5, $n = \frac{\ln(0.1) - \ln(50)}{\ln(\tau)} \approx 619$ itérations étaient nécessaires pour faire décroître une température initiale $T_0 = 50$ jusqu'à une température finale de $T_{\min} = 0.1$ avec une décroissance $T_0 \cdot \tau^n$.

Avec une décroissance $T_n = T_0/\ln(n)$, il faut donc $n = \exp(T_0/T_n)$ itérations, soit $n \approx \exp(50/0.1) = \exp(500)$ soit $\approx \exp(494)$ fois plus d'itérations que notre procédure!

<5 pts>