



DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 08/12/2015

I	Convolution & Transformée de Fourier (39 pts)
II	Spectre & Aliasing (44 pts)
III	Filtrage Spatial (20 pts)
IV	Restauration & Tomographie (18 pts)
V	Misc. (14 pts)
Total	125 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Convolution & Transformée de Fourier (39 pts)

1. CONVOLUTION

- (a) On note dans cette question, $\mathbf{1}(x)$ ou tout simplement $\mathbf{1}$, la fonction qui vaut $\mathbf{1}$ pour tout x . De plus, $*$ désigne l'opérateur de convolution. Soit f une fonction quelconque, calculer $(\mathbf{1} * f)(x)$ de deux façons différentes. La première en restant dans le domaine spatial et la deuxième en exprimant ce calcul dans le domaine fréquentiel.

<8 pts>

- (b) Démontrer que :
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \quad (1)$$

<6 pts>

- (c) En considérant les notes de cours, chapitre Transformé de Fourier, (slide 3, convolution 1D de fonctions continues), retrouver le résultat de $(f * g)(x)$ en utilisant pas l'intégration mais seulement les propriétés (de décalage et de produit) du Dirac et le fait que la convolution d'une fonction porte $(\Pi(x))$ avec une fonction porte a pour résultat la fonction Triangle $(\Delta(x))$.

<6 pts>

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

- (a) Que peut-on dire des propriétés de $F(\nu)$, la TF de la fonction $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ (sans la calculer).

<4 pts>

- (b) Dans les tables de Transformée de Fourier, on trouve facilement :

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{\pi}{j} \operatorname{sgn}(\nu) \quad (2)$$

dans laquelle j est le nombre imaginaire unité et $\operatorname{sgn}(x)$ est la fonction signe (égale à 1 pour tout $x > 0$ et -1 pour tout $x < 0$ et égal à 0 pour $x = 0$).

Calculer maintenant $F(\nu)$, la TF de la fonction $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

<7 pts>

- (c) En utilisant la relation (2) et une propriété que l'on nommera, calculer $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)]$.

<4 pts>

- (d) En déduire la TF de la fonction $f(x) = (\operatorname{sgn}(x)) \cos x$.

<4 pts>

Réponse

1.(a)

- En restant dans le domaine spatial, par calcul, on obtient directement :

$$(\mathbf{1} * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}(y) \cdot f(x - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) dy = \int_{+\infty}^{-\infty} f(z) (-dz) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Mais le calcul est presque immédiat, en utilisant d'abord, la commutativité du produit de convolution et en écrivant :

$$(\mathbf{1} * f)(x) = (f * \mathbf{1})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \mathbf{1}(x - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

<4 pts>

Nota : Mais, si on n'aime pas les calculs, on peut aussi raisonner qualitativement en se souvenant de ce que fait physiquement la convolution entre deux fonctions :

Pour réaliser $f(x)$ convolué par la fonction $\mathbf{1}(x)$, on doit d'abord retourner $\mathbf{1}(x)$ en considérant $\mathbf{1}(-x)$ qui redevient $\mathbf{1}(x)$ (car la fonction est paire), puis pour différents décalages y de cette fonction retournée, i.e., $\mathbf{1}(x+y)$, i.e., pour cette même fonction $\mathbf{1}(x)$, qui vaut 1 pour tout x (cf. énoncé), on multiplie cette fonction décalée (qui vaut 1 pour tout x) par $f(x)$ et on intègre le tout pour trouver finalement la valeur de $(f * \mathbf{1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ pour le décalage considéré y , mais aussi pour n'importe quel autre décalage. On obtient donc, quelle que soit la valeur de décalage ou quelle que soit la position d'abscisse de la fonction $(f * \mathbf{1})$, la fonction constante de valeur $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

• En *téléportant* la relation $(\mathbf{1} * f)(x)$ dans le domaine fréquentiel, l'expression devient, avec la correspondance $x \rightleftharpoons \nu$ et $f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$:

$$\mathbf{1}(x) * f(x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \delta(\nu) \cdot F(\nu) = F(\nu=0) \cdot \delta(\nu) = F(0) \cdot \delta(\nu) \quad (\text{car : } \delta(x-x_0) \cdot f(x) = f(x_0) \cdot \delta(x-x_0))$$

$$\text{et par définition : } F(\nu=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \exp(2\pi j(\nu=0)x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

<4 pts> et donc $F(\nu=0) \cdot \delta(\nu) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{=} F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = (\mathbf{1}(x) * f(x))$

1.(b)

On peut le démontrer de plusieurs façons différentes. En se servant de ce qu'on a fait plus haut (i.e., la fonction constante $\mathbf{1}(x)$) et de l'associativité du produit de convolution :

$$\int f * g = \mathbf{1} * (f * g) = (\mathbf{1} * f) * g = \int f \cdot \mathbf{1} * g = \int f \cdot \int g$$

ou en utilisant la TF et la correspondance $f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$ et $g(x) \rightleftharpoons G(\nu)$. En effet, chaque fois que l'on doit calculer une intégrale d'une fonction compliquée (dont on ne connaît pas la primitive), on peut toujours résoudre ce calcul en le considérant égale à la TF de cette fonction en $\nu = 0$, en effet :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) \exp[-2\pi j(\nu=0)x] dx = \mathcal{F}[(f * g)(x)]_{\nu=0} \\ &= F(\nu=0) \cdot G(\nu=0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \exp[-2\pi j(\nu=0)x] dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot \exp[-2\pi j(\nu=0)x] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x), dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x), dx \end{aligned}$$

<6 pts>

Nota : On peut utiliser aussi la définition de la convolution et donc exprimer le tout avec une double intégrale et après quelques manipulations, trouver que l'expression est séparable et arriver au même résultat aussi (mais les deux méthodes expliquées plus haut sont plus élégantes et demandent moins de calcul.

1.(c)

Cela revient à exprimer le calcul de $\Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} \Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}\Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\Pi(x) * \Pi(x) * \delta(x - \frac{1}{2}) * \delta(x - \frac{1}{2}) \quad (\text{commutativité de } *) \\ &= \frac{1}{2}\Delta(x) * \delta(x - 1) \\ &= \frac{1}{2}\Delta(x - 1) \end{aligned}$$

Une autre possibilité est de passer dans le domaine Fourier pour calculer cette expression :

$$\begin{aligned} \Pi(x - \frac{1}{2}) * \frac{1}{2} \Pi(x - \frac{1}{2}) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \\ \frac{1}{2} \exp(-j\pi\nu) \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) \exp(-j\pi\nu) \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{(\pi\nu)} \right) &= \frac{1}{2} \Lambda(\nu) \exp(-2j\pi\nu) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{2} \Delta(x - 1) \end{aligned}$$

<6 pts>

Nota : On peut vérifier que la relation démontrée à la question 1.(b) est vraie dans cet exemple. En effet, l'intégrale du résultat de $\frac{1}{2}\Delta(x-1)$ est égal à 1/2 ce qui est bien le produit entre l'aire intégrale sous $\Pi(x - \frac{1}{2})$ qui est égal à 1 multiplié par l'aire intégrale sous $\frac{1}{2}\Pi(x - \frac{1}{2})$ qui est égal à 1/2.

2.(a)

La fonction $f(x)$ est réelle et impaire, donc sa transformée $F(\nu)$ sera imaginaire pur et impair. On pourrait dire aussi que la fonction étant non périodique, son spectre sera continu et aussi que, comme la fonction $f(x)$ possède une discontinuité en $x = 0$, ($f(x)$ tend vers ∞ en $x = 0+$ et vers $-\infty$ en $x = 0-$), on s'attend à voir une TF dont le support est très grand (nécessaire pour reconstruire cette discontinuité).

<5 pts>

2.(b)

$$\begin{aligned} \text{(avec } x \Rightarrow \nu) : f(x) = \frac{\cos x}{x} = (\cos x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{2} \left(\delta(\nu - 1/2\pi) + \delta(\nu + 1/2\pi) \right) * \frac{\pi}{j} \operatorname{sgn}(\nu) \\ F(\nu) &= -\frac{j\pi}{2} \left\{ \operatorname{sgn}(\nu - 1/2\pi) + \operatorname{sgn}(\nu + 1/2\pi) \right\} \end{aligned}$$

Comme prévu, $F(\nu)$ est bien imaginaire pure, impaire continue et à grand support dans l'espace fréquentiel.

<7 pts>

Nota : Bien sur, le résultat : $F(\nu) = \frac{\pi}{2j} \{ \operatorname{sgn}(\nu - 1/2\pi) + \operatorname{sgn}(\nu + 1/2\pi) \}$ est équivalent.

2.(c)

En utilisant la propriété duale, on a : $\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\nu} \right] = \frac{\pi}{-j} \operatorname{sgn}(x)$ donc : $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] = \frac{1}{\pi j \nu} = -\frac{j}{\pi \nu}$

<4 pts>

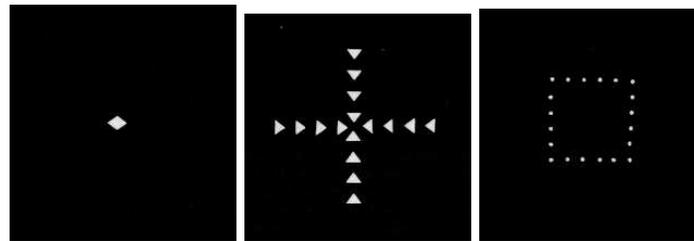
2.(d)

$$\begin{aligned} f(x) = (\operatorname{sgn}(x)) \cdot \cos x &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{2} \left(\delta(\nu - 1/2\pi) + \delta(\nu + 1/2\pi) \right) * \frac{1}{j\pi\nu} \\ &= \frac{-j}{2\pi} \left(\frac{1}{\nu - 1/2\pi} + \frac{1}{\nu + 1/2\pi} \right) \\ &= \frac{-j}{2\pi} \frac{2\nu}{\nu^2 - 1/4\pi^2} \end{aligned}$$

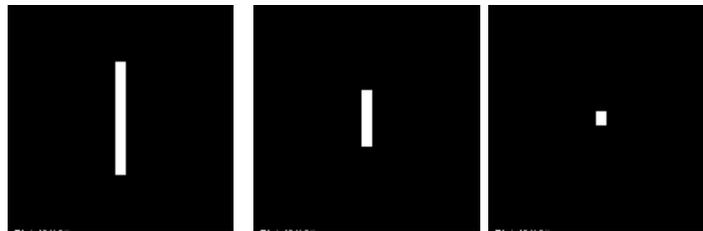
<4 pts>

II. Spectre & Aliasing (44 pts)

1. Pour chacune de ces six images :

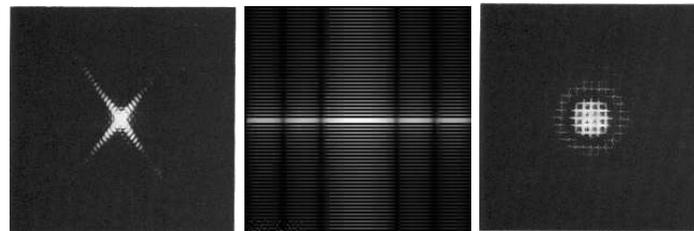


(a) (b) (c)

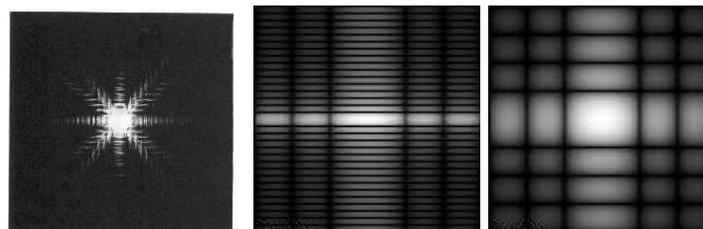


(d) (e) (f)

Indiquer sa transformée de Fourier (module) correspondante après avoir fourni une explication.



(I) (II) (III)

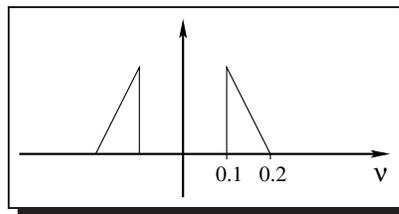


(IV) (V) (VI)

<15 pts>

2. ALIASING I

(a) Voici $S(\nu)$, le spectre (module) d'un signal $s(t)$ (avec les fréquences numériques en abscisse)



Dire si on a échantillonné le signal $s(t)$ en respectant le théorème de Shannon.

<3 pts>

- (b) On sous-échantillonne par un facteur 5 un signal discret $s(k)$ (en prenant un pixel sur 5, dessiner le spectre du signal sous-échantillonné $S^\bullet(\nu)$ obtenu après l'avoir justifié par une explication.
<7 pts>
- (c) En notant $S(\nu) = M(\nu) + M(-\nu)$, respectivement le motif spectral de droite et le motif spectral de gauche. Indiquer l'opération mathématique faisant intervenir l'opérateur de convolution qui permet de passer du spectre $S(\nu)$ au spectre $S^\bullet(\nu)$ puis l'opération mathématique, dans le domaine spatial, qui permet de réaliser cette même opération.
<7 pts>

3. ALIASING II

- (a) Soit la fonction d'intensité suivante

$$I(x, y) = 128 + 127 * \cos(2\pi(16x + 32y)/128) = 128 + 127 * \cos(2\pi(k_x x + k_y y))$$

avec $k_x = 16/128$ (16 sommets verticalement (axe des x)) et $k_y = 32/128$ (32 sommets horizontalement (axe des y)) où on définit x comme étant l'axe vertical (ligne) et y , l'axe horizontal (colonne) (cf. TP-1-).

À combien doit-on sous échantillonner $I(x, y)$ en x pour voir disparaître le nombre de périodes verticales de cette image, en utilisant la théorie de l'échantillonnage et éventuellement un petit graphique explicatif. On rappelle que "sous échantillonné" par un facteur k consiste à ne retenir seulement un pixel sur k .

<7 pts>

- (b) Si on sous échantillonne avec le nombre trouvé précédemment, que se passera-t-il pour les périodes horizontales de cette image?

<4 pts>

Réponse

1.

On va utiliser dans la suite, la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image) croissantes.

• On va procéder par élimination. Dans les six images possibles (a-f), on voit qu'il existe trois images qui se ressemblent à un facteur de contraction près en y . On devrait donc avoir pour ces trois images, trois spectres qui se ressemblent avec un facteur de dilatation en v près. Ces trois spectres sont certainement les spectres (II), (V) et (VI). Sachant qu'une contraction \rightleftharpoons dilatation, on se retrouve donc avec l'association

(d-II), (e-V) et (f-VI).

Nota : On aurait pu être aussi un peu plus précis en disant que mathématiquement, le motif blanc dans l'image s'écrit $\Pi(x/T_x) \cdot \Pi(y/T_y) \rightleftharpoons \propto \text{sinc}(2\pi\nu T_x) \cdot \text{sinc}(2\pi\nu T_y)$. On reconnaît le spectre en sinc dans les images (II), (V) et (VI).

• On va prendre maintenant la figure (a), celle-ci ne comporte que des discontinuités seulement suivant les 4 diagonales. Son spectre aura donc les mêmes discontinuités plus 90 degré c-a-d, des discontinuités pour les quatre directions diagonales seulement. On a donc la correspondance (a-I).

Nota : On aurait pu être aussi un peu plus précis en disant que mathématiquement, le motif blanc dans l'image s'écrit $\Pi(x, y)$ rotationné de 45 degrés $\rightleftharpoons \propto \text{sinc}(2\pi\nu T)$ rotationné de 45 degrés. On

reconnait le spectre en sinc rotationné de 45 degrés dans l'image (I).

• Il reste l'image (b) et (c) dans lesquelles on voit des motifs (plus semblables dans l'image (c) et quelquefois inversé dans (b)) qui se répète en x et y et les deux spectres (III) et (IV). Si on se base sur la propriété que tout ce qui est périodique dans un espace est discrétisé dans l'autre espace et inversement, on voit bien que les deux spectres (III) et (IV) des successions de zones noires et blanches. Dans le spectre (III), cette succession est plus marquée et doit correspondre à l'image (c) donc l'association (c-III) et (b-IV).

Nota : On aurait pu être aussi un peu plus précis en disant que mathématiquement, le motif blanc dans l'image est un cercle qui se périodise en x et y . Le spectre résultant sera la fonction sombrero (vue en cours) discrétisée en ν et v .

<15 pts>

2.(a)

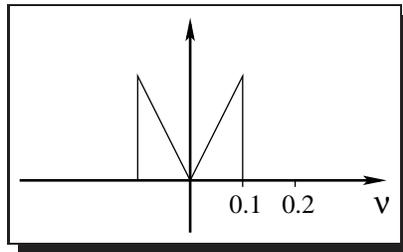
Le théorème de Shannon est respecté car les fréquences s'annulent avant la fréquence numérique $\nu = 0.5$.

<3 pts>

2.(b)

Puisque le signal est discret, le spectre est périodique et se répète identiquement à lui-même toutes les multiples de la fréquence numérique $\nu = 1$ (i.e., en $\nu = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) avec une parité (puisque le signal est réel et on rappelle qu'on ne peut parler que de fréquence numérique, dans cet exemple, car on ne connaît pas la période d'échantillonnage de ce signal). Ce que l'on observe, spectralement (i.e., donné par une TFD) correspond donc à une petite fenêtre spectrale de longueur de support 1 centré autour de la fréquence $\nu = 0$, i.e., entre les fréquences numérique $\nu = -0.5$ et la fréquence numérique $\nu = +0.5$.

Lorsqu'on sous échantillonne d'un facteur 5, le signal, le spectral se répétera identiquement à lui-même toutes les multiples de la fréquence numérique $\nu = 0.2$ (i.e., en $\nu = \dots -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, \dots$) (T_e étant cinq fois plus grande, non plus tous les $\nu = 1/T_e$ mais à une nouvelle fréquence numérique $\nu' = 1/5 \times T_e$ cinq fois plus petite) et on observera le spectre du nouveau signal (dans une fenêtre spectrale de longueur de support 0.2 centrée autour de la fréquence $\nu = 0$, i.e., $\nu \in [-0.1 \ +0.1]$), le nouveau signal dont le spectre ressemblera à :



<7 pts>

2.(c)

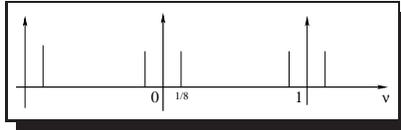
En utilisant dans la suite, la convention $t \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, on passe du spectre $S(\nu)$ au spectre $S^\bullet(\nu)$ par une simple opération de décalage dans le domaine fréquentiel, ou par l'opération mathématique, dans le domaine fréquentiel et spatial :

$$\begin{aligned}
 S^\bullet(\nu) = S(\nu) * \delta(\nu - 0.2) &\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} s^\bullet(t) \cdot \exp(2\pi j \cdot 0.2t) \\
 \text{ou } S^\bullet(\nu) = S(\nu) * \delta(\nu + 0.2) &\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} s^\bullet(t) \cdot \exp(-2\pi j \cdot 0.2t) \\
 \text{ou } S^\bullet(\nu) = S(\nu) * [\delta(\nu + 0.2) + \delta(\nu - 0.2)] &\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} s^\bullet(t) \cdot 2 \cos(2\pi \cdot 0.2t)
 \end{aligned}$$

<7 pts>

3.(a)

On va utiliser dans la suite, la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et on va raisonner suivant l'axe des x et pour l'instant avec le signal $I(x, y)$ (non sous-échantillonné). Puisque le signal est discret, le spectre est périodique et se répète identiquement à lui-même toutes les multiples de la fréquence numérique $\nu = 1$ (i.e., en $\nu = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) avec une parité (puisque le signal est réel). Dans notre cas, on observe donc deux pics fréquentiels de fréquence $n\nu = \pm 1/8$ centrée sur la fréquence $\nu = 0$ et plus généralement deux pics de fréquence $n\nu = k \pm 1/8$ centrée sur la fréquence $\nu = k$ pour tout k entier.



Lorsqu'on sous échantillonne d'un facteur k , le signal, le spectre se répétera identiquement à lui-même toutes les multiples de la fréquence numérique $\nu = 1/k$. Il faut donc que cet axe coïncide avec la fréquence $n\nu = \pm 1/8$ pour voir ainsi disparaître le nombre de périodes verticales de cette image. On doit donc sous-échantillonner d'un facteur k :

<7 pts>

$$1/k = 1/8 \quad \text{c'est à dire : } k = 8$$

3.(b)

On va utiliser dans la suite, la convention $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et on va raisonner suivant l'axe des y et pour l'instant avec le signal $I(x, y)$ (non sous-échantillonné). Le spectre est le même que précédemment si ce n'est qu'il présente deux pics de fréquence $\nu = k \pm 32/128 = k \pm 1/4$ centrée sur la fréquence $\nu = k$ pour tout k entier. Si on sous-échantillonne par un facteur 8, on aura deux pics de fréquence $n\nu = k/8 \pm 1/4$ centrés sur la fréquence $\nu = k/8$ pour tout k entier qui vont aussi se confondre avec l'axe où le spectre se périodise et cela aura pour effet de voir ainsi disparaître le nombre de périodes horizontales de cette image.

En résumé, si on sous échantillonne d'un facteur 8, cette image en x et en y , on obtiendra une image toute blanche.

<4 pts>

III. Filtrage Spatial (20 pts)

1. Soit l'image ci-dessous dégradée par un défaut de transmission par ligne qui génère des pertes d'information sur celle-ci se traduisant sur l'image par quelques segments de lignes horizontales noires d'épaisseur 1 pixel et de taille (horizontale) variable.



- (a) Trouver parmi les filtres proposés, le filtre spatial qui vous semble le plus adéquat pour restaurer (par filtrage spatial) cette image dégradée par ce défaut de transmission par ligne. Justifier bien votre réponse. S'agit-il de :

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<5 pts>

- (b) On aimerait calculer la fonction de transfert en module (ou réponse fréquentielle) $H(\nu)$ du masque de convolution suivant :

$$h(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sans calculer de TF, énumérer toutes les propriétés que possède $H(\nu)$ à partir des propriétés de la fonction discrète $h(x)$. En utilisant la TFD, calculer puis tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (module). Interpréter l'allure de cette réponse fréquentielle. De quel type de filtre (passe-bas, passe-haut, Passe-bande, etc.) s'agit-il? Quel effet aura ce filtre sur une image naturelle (non synthétique)?

<10 pts>

2. (a) Comment se serait comporté un filtrage médian face à une telle dégradation? Dire et justifier quelle aurait été la taille idéale de ce filtre médian pour contrer au mieux une telle dégradation. Expliquer les différences obtenues entre un filtre médian de taille optimale, la stratégie optimale trouvée à la question 1.(a) et un filtre passe-bas traditionnel du type moyenneur.

<5 pts>

- (b) Dire aussi, face à ce type de dégradation (défaut de transmission) et les propriétés de celle-ci, comment on pourrait améliorer un filtrage médian traditionnel pour le rendre plus efficace pour ce type de dégradation?

<5 pts>

Réponse

1.(a)

Du fait que les lignes sont d'épaisseur un seul pixel, il est plus judicieux, dans ce cas, de ne pas tenir en compte, dans ce filtrage spatial, du niveau de gris du pixel central qui est dégradé. De plus, les lignes étant horizontales, on écarte d'emblée les filtres horizontaux (ou construit avec un filtre horizontal comme les filtres spatiaux proposés 2D) qui moyenneront localement, dans ces zones dégradées, que des valeurs de niveaux de gris erronés.

Il ne reste que le filtre $3 \times$ lignes (vertical) suivant : $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ qui permettra de bien restaurer cette image.
 <5 pts>

Nota : On peut vérifier que ce filtre conservera bien la moyenne de l'image, ce qui est le cas puisque la somme de ses coefficients est égale à un.

On peut voir ce filtre comme une simple interpolation linéaire entre la ligne du haut et celle du bas pour estimer, au sens de cette interpolation d'ordre 1, les niveaux de gris de la ligne du milieu.

1.(b)

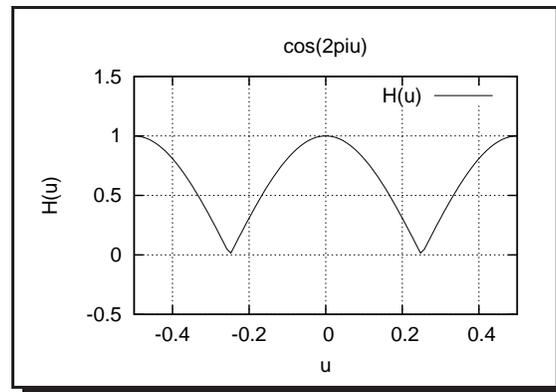
Tous les coefficients de ce filtre sont positifs, c'est donc un filtre passe-bas qui ne changera pas la moyenne de l'image (car ce masque est normalisé avec une somme de coefficients égale à un). De plus la MTF $H(\nu)$ sera réel et pair, car le masque de convolution est pair et réel.

<2.5 pts>

$$\begin{aligned} \text{Avec } x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu, \quad \mathcal{F}(h(x)) = H(\nu) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j\nu x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j\nu x) \\ &= \frac{1}{2} [\exp(2\pi j\nu) + \exp(-2\pi j\nu)] = \frac{1}{2} [2 \cos(2\pi\nu)] = \cos(2\pi\nu) \end{aligned}$$

<4 pts>

Le spectre est périodique puisque le signal dans le domaine spatial est discret et il se répète tous les $1/T_e = 1/\Delta x = 1$ (fréquence numérique puisque à aucun moment, on ne connaît la période d'échantillonnage). Donc un support de 1 dans le domaine spectral est suffisant. Comme on est intéressé à voir (mathématiquement) l'allure spectrale de cette MTF centré en 0, une réponse fréquentielle sur $[-0.5, 0.5]$ est satisfaisante. Le tracé de $|H(\nu)|$ nous donne :

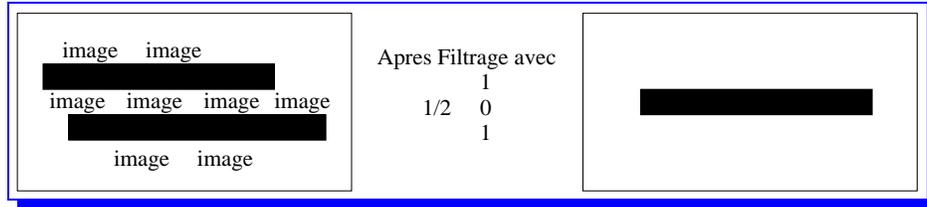


Le filtre obtenu est un filtre passe-bas jusqu'à la fréquence numérique $\nu = 0.25$ (pour laquelle $\cos(2\pi\nu = 1/4)$ s'annule. Après, on peut constater que le filtre comporte un très gros lobe secondaire qui fera en sorte de ne pas atténuer beaucoup les fréquences numériques très élevées voire même pas du tout filtrer (i.e., atténuer) les fréquences numériques $\nu = 0.5$ ($|H(\nu = 0.5)| = 1$).

Pour une image naturelle (non synthétique), on sait que le spectre est concentré dans les basses ou moyennes fréquences (< 0.25 ou spectre concentré dans la première moitié du support fréquentiel de longueur totale 0.5). Le filtre se comportera donc comme un filtre Passe-Bas éliminant les hautes fréquences en lignes (c'est-à-dire les discontinuités comme des lignes horizontales noires d'épaisseur 1 pixel créées par un défaut de transmission par ligne).

<3.5 pts>

Nota : Comme cela a été précédemment dit, ce filtre va laisser passer les hautes fréquences $\nu = 0.5$ sans les atténuer. Une fréquence numérique de $\nu = 0.5$ correspond concrètement à une période numérique de $T = 2$ pixels (une fréquence physique de $\nu = 0.5 f_e$ correspondant à une période physique de $T = 2 T_e$ et ici $T_e = \Delta x = 1$). Donc le filtre va laisser passer toutes les dégradations, sans les atténuer, de fréquence $\nu = 0.5$ ou de période $T = 2$ pixels en y . Une telle dégradation de période $T = 2$ pixels en y pourrait être donnée par deux lignes noires horizontales espacées de un pixel :



et dans ce cas, on voit bien que notre filtrage laisserait passer une telle dégradation. On voit donc (et on comprend aussi), dans ce cas, les limites de notre filtre $h(x)$ qui ne doit pas être confronté à des défauts de ligne séparés d'un seul pixel.

2.(a)

Le filtrage médian, qui a la propriété d'éliminer les valeurs aberrantes aurait bien fonctionné pour ce type de dégradation.

Considérant la dégradation de l'image, la taille idéale de ce filtre médian serait de 3×1 , i.e., 3 lignes et 1 colonne puisque la demi-taille (verticale) de ce filtre est supérieure à la moitié de la taille (verticale) de la dégradation considérée dans notre cas.

Après avoir éliminé la valeur aberrantes de la dégradation, le filtre médian aurait choisi la valeur médiane sur trois valeurs de niveaux de gris dont une est la valeur aberrante noire donc aurait pris entre les deux niveaux de gris non aberrants, celui qui aurait été le plus petit, contrairement au filtrage de la question 1.(a) qui aurait fait un moyennage de ces deux valeurs.

Un filtrage passe-bas aurait été désastreux car il aurait rendu floue les contours de cette image tout en lui donnant une valeur (moyenne) plus sombre à proximité des dégradations de cette image.

<5 pts>

2.(b)

On pourrait-on améliorer le résultat du filtrage médian et prendre en compte intelligemment le fait que dans le cas d'une image dégradée par un défaut de ligne, les pixels affectés par cette dégradation ont un niveau de gris nul en ne filtrant (c'est-à-dire en prenant la valeur médiane) que pour les pixels dont le niveau de gris nul (i.e., la dégradation). Cette technique qui utilise un a priori intelligent sur le type de dégradation peut être utilisé aussi avec le filtre optimal trouvé à la question 1.(a).

<5 pts>

IV. Restauration & Tomographie (18 pts)

1. Une image satellitaire ASTER (Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer) est une technique d'imagerie permettant d'obtenir les températures de la surface de la terre à partir d'un satellite. Ces images sont dégradées par la présence de nuages dont la présence peut se modéliser (en première approximation) comme un problème de dégradation multiplicative de la forme :

$$I(x, y) \cdot \text{Nuages}(x, y)$$



FIG. 1 – Image ASTER avec nuage et sans nuage

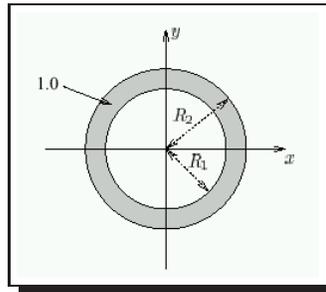
où $Nuages(x, y)$ est l'image des nuages et $I(x, y)$, l'image ASTER non altéré par les nuages.

On aimerait d'une part trouver une procédure (supervisée) qui nous permet d'enlever ces nuages mais on aimerait aussi récupérer cette image de nuage. Proposer une technique permettant de le faire et justifier votre stratégie.

<7 pts>

2. TOMOGRAPHIE

On désire réaliser le contrôle industriel d'un pipeline (i.e., un tuyau en acier d'une certaine épaisseur) servant aux transports du pétrole. Pour cela, on réalise l'imagerie d'une coupe transversale 2D de ce tuyau par un procédé de tomographie par rayons X pour différents angles de projection.



- (a) Esquissez grossièrement une des projections obtenues et expliquer comment on pourrait deviner la présence d'une bulle d'air dans le tuyau métallique (l'intervalle supposé métallique entre $> R_1$ et $< R_2$) à partir d'une seule projection. Est-ce-que une seule projection permettrait de deviner la forme de la bulle et sa position précise dans le tuyau ?

<5 pts>

- (b) Montrez, sans calcul, que si le tuyau ne présente aucun défaut, une seule projection permet la reconstruction exacte de $f(x, y)$.

<3 pts>

- (c) À partir de votre connaissance du théorème de la tranche centrale de Fourier, que peut-on dire de la TF d'un objet qui à une symétrie de révolution comme ce tuyau ?

<3 pts>

Réponse

1.

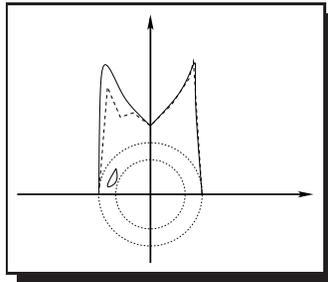
On peut utiliser le principe du filtrage homomorphique qui nous permettra d'une part de séparer l'information des nuages, de l'image des températures de la surface de la terre à partir de sa transformée LOG puis, par un filtre passe-haut avec le seuillage approprié (que l'on peut trouver manuellement), pour se débarrasser de ceux-ci en remarquant qu'il correspond à une image très basse fréquence, beaucoup plus basse fréquence en moyenne que l'image. Une transformée de Fourier inverse puis une transformée en espace EXP, permettrait de se débarrasser de ses nuages qui sont donc vues, dans cette stratégie, comme une dégradation multiplicative très basse-fréquence (comme l'était un défaut d'illumination, cf. cours). Ne pas oublier, que l'espace LOG devrait se faire algorithmiquement par l'opération $\log(1 + \text{Niveau de gris})$ pour éviter de se retrouver avec le logarithme d'un zéro, et que, en dernière opération, on devra recalibrer l'image entre 0 et 255, car l'opération du filtre passe-haut aura nécessairement fait disparaître à l'image sa composante d'intensité moyenne.

Pour trouver ensuite l'image des nuages, une différence entre l'image obtenue précédemment et l'image dégradée avec nuage permettraient de trouver la forme des nuages. Pour rendre plus robuste cette opération, une spécification d'histogramme entre les deux images pourrait être réalisé.

< 7 pts >

Nota : Si on avait eu une séquence d'images ASTER, un filtre médian temporel aurait été une stratégie pour trouver l'image $I(x, y)$ et ensuite par une simple opération ponctuelle, l'image des nuages. Mais seulement dans le cas d'une séquence d'images !

2.(a)



Si le tuyau était sans défaut de bulle d'air, toutes les projections devraient avoir la forme de la courbe noire et on pourrait deviner la présence d'une bulle d'air en faisant la différence de cette projection avec celle obtenue sur un autre tuyau (de même épaisseur), la présence d'une différence indiquerait la présence d'une bulle d'air et ceci pourrait se faire à partir d'une seule projection.

Néanmoins, une seule projection ne permettrait pas de deviner la présence d'autre bulle d'air dans l'épaisseur du tuyau ou si il n'y a qu'une bulle de sa forme ni de sa position précise (on peut néanmoins avoir une idée de sa taille en une dimension). Pour avoir ses deux informations une reconstruction tomographique est nécessaire.

< 5 pts >

2.(b)

Oui parce que l'objet étant à symétrie radiale, toutes les projections seraient identiques.

< 3 pts >

2.(c)

La TF possèdera aussi cette même propriété (symétrie radiale, i.e., invariance par rotation passant par l'origine).

< 3 pts >

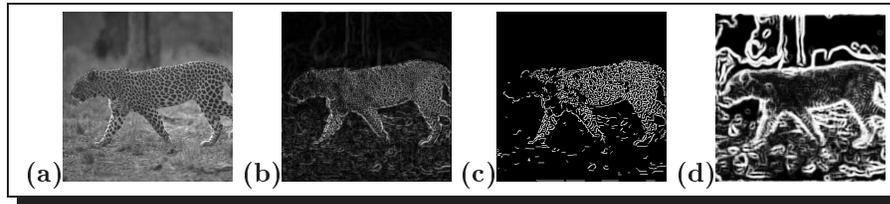
V. Misc. (14 pts)

1. L'application du TP n°2 sur l'image du léopard de la Fig. (a) donne l'image de potentiel (b) puis l'image des contours (c) (pour un seuil de $\tau = 0.90$).

On aimerait définir une stratégie ou un gradient qui nous permette, non plus, de définir une carte de potentielle permettant de visualiser la séparation entre deux régions de niveaux de gris différents mais qui permet de visualiser la séparation entre deux régions texturales différentes et qui produise une carte de potentielle comme celle donnée en (d).

Quelle stratégie proposez-vous ? et donnez les limites de votre stratégie (dans sa capacité à distinguer deux textures différentes).

<7 pts>



2. Considérons la stratégie permettant de caractériser des pixels appartenant à différentes zones texturées dans une image et basée sur le calcul d'attributs caractéristiques (features) calculés à partir des niveaux de gris (ou de niveaux de couleurs) contenus dans une petite fenêtre centrée autour du pixel.

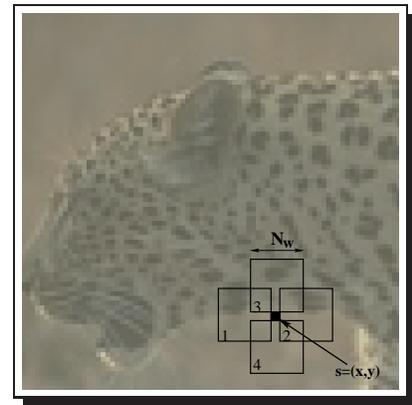
Expliquer pourquoi, on n'utilise pas les niveaux de gris (ou les niveaux de couleurs) contenus dans cette petite fenêtre pour caractériser la texture et expliquer ensuite que serait, dans le cadre de cette stratégie, les problèmes si la fenêtre prise était trop grande ou bien trop petite ?

<7 pts>

Réponse

1

Une stratégie possible serait de calculer, pour chaque pixel s de coordonnée $s = (x, y)$, un gradient de texture, c'est-à-dire une mesure impliquant une différence dans la direction des colonnes x et une différence dans la direction des y (lignes) qui serait calculé, puisqu'on peut calculer des attributs de textures seulement dans une petite fenêtre (à partir de quelques niveaux de gris, i.e., un minimum de quelques 16 niveaux de gris) sur une fenêtre carrée de taille $N_w \times N_w$ ($N_w = 7$ par exemple), localisé aux coordonnées $(x - (N_w/2), y)$, $(x + (N_w/2), y)$, $(x, y - (N_w/2))$, $(x, y + (N_w/2))$ (i.e., respectivement, dans la fenêtre numéro 1, 2, 3 et 4) et par une formule de différence entre ces vecteurs d'attributs de textures utilisant n'importe quelle norme, par exemple, du type : $[|\mathbf{h}_3 - \mathbf{h}_4|_1 + |\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2|_1]$ (norme 1, dans cet exemple). On peut utiliser n'importe quel vecteur d'attributs de texture regroupant n'importe quel attributs de texture vue en cours. Dans notre exemple, nous avons utilisé, pour \mathbf{h} , l'histogramme requantifié de couleur/niveaux de gris (sur 5^3 bins en RVB ou 5 bins en niveaux de gris) obtenu sur chacune des fenêtres numéro 1, 2, 3 et 4. On considère donc dans cet exemple, qu'une texture est bien définie (et est bien discriminante) par un vecteur d'attributs quantifiant le mélange de couleurs ou le mélange de niveaux de gris existant dans celle-ci. On pourrait cependant avoir deux textures différentes adjacentes possédant le même vecteur



d'attributs regroupant le même histogramme requantifié de niveaux de gris sur 5^3 bins. Dans ce cas, on ne pourrait, dans cet exemple, distinguer ces deux textures. Cela constitue la limite de cette méthode dans sa capacité à produire un potentiel fort en $s = (x, y)$ lorsque le pixel s se trouve à l'intersection de ces deux types de textures.

<7 pts>

Nota : En résumé, il fallait dire “estimer un vecteur d'attributs de texture sur des petites fenêtrées de taille raisonnable centrées sur chaque pixel, et calculer la différence entre ces vecteurs pour des fenêtrées adjacentes (au sens d'une norme) pour avoir en chaque pixel un gradient de texture”.

2

Les niveaux de gris (ou les niveaux de couleurs) pris dans une petite fenêtrée centrée autour du pixel à caractériser en terme de texture ne sont pas des attributs assez invariants (en terme de rotation, facteur d'échelle, défaut d'illumination, bruit, etc.).

La fenêtrée devra être; d'une part, assez grande; pour permettre d'avoir une estimation robuste de ces attributs caractéristiques et invariants mais tout de même assez petite pour ne pas multiplier les chances que celle-ci chevauche trop souvent deux régions texturales différentes pour chaque pixel à caractériser.

<7 pts>

Nota : Dans le cadre de notre problème, on pourrait ajouter que la taille de la fenêtrée ne doit pas être plus petite que la taille du texton de la texture à caractériser. Dans l'exemple du léopard, cette fenêtrée ne devrait pas être plus petite que la grosseur de la tache noire du léopard car le texton caractérisant la texture “peau de léopard” inclut une tache noire et un bout de pelage plus clair.