



DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 14/12/2016

I	Transformée de Fourier (30 pts)
II	Spectre (18 pts)
III	Opération Ponctuelle (12 pts)
IV	Filtrage (30 pts)
V	Restauration (18 pts)
VI	Misc. (20 pts)
Total	128 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (30 pts)

Soit $g(x)$ un signal et $G(\nu)$ sa Transformée de Fourier (TF) et soit le traitement fréquentiel suivant $\hat{G}(\nu) = G(\nu) \cdot [-j \operatorname{sgn}(\nu)]$ dans lequel j est le nombre imaginaire unité et $\operatorname{sgn}(\nu)$ est la fonction signe ($\operatorname{sgn}(\nu) = \nu/|\nu|$, i.e., égale à 1 pour tout $\nu > 0$ et -1 pour tout $\nu < 0$ et égal à 0 pour $\nu = 0$).

1. En écrivant $\hat{G}(\nu) = \hat{R}(\nu) + j \hat{I}(\nu)$ et $G(\nu) = R(\nu) + j I(\nu)$, exprimer $\hat{R}(\nu)$ et $\hat{I}(\nu)$ en fonction de $R(\nu)$ et $I(\nu)$. Que devient cette expression lorsqu'on considère des fréquences positives.
<5 pts>
2. Donner les propriétés de $\hat{G}(\nu)$ respectivement lorsque $g(x)$ (qui est un signal réel) est paire et lorsque $g(x)$ est impaire.
<5 pts>
3. Calculer le module (ou la magnitude) puis la phase (ou argument) de $\hat{G}(\nu)$ en fonction du module et phase de $G(\nu)$ et en fonction des fréquences ν .
<5 pts>
4. Supposons que $g(x)$ est réel, et posons $\hat{g}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \hat{G}(\nu)$. En vous aidant de la propriété de symétrie hermitienne, on vous demande de calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu) \hat{G}^*(\nu) d\nu$$

où $\hat{G}^*(\nu)$ est la conjuguée de $\hat{G}(\nu)$.

<5 pts>

5. Dans les tables de Transformée de Fourier (TF), on trouve facilement :

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] = \frac{1}{j \pi \nu}$$

En déduire le traitement spatial équivalent au traitement fréquentiel $[-j \operatorname{sgn}(\nu)]$, c'est-à-dire la TF inverse de $(G(\nu) \cdot [-j \operatorname{sgn}(\nu)])$.

<5 pts>

6. Avec toujours $\hat{g}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \hat{G}(\nu)$, on construit maintenant les signaux $g_+(x)$ et $g_-(x)$ de la façon suivante :

$$g_+(x) = \frac{1}{2}[g(x) + j \hat{g}(x)] \quad \text{et} \quad g_-(x) = \frac{1}{2}[g(x) - j \hat{g}(x)]$$

Quelle particularité caractéristique aura les spectres du signal $g_+(x)$ et $g_-(x)$ (i.e., $G_+(\nu)$ et $G_-(\nu)$) ? avec $g_+(x) \rightleftharpoons G_+(\nu)$ et $g_-(x) \rightleftharpoons G_-(\nu)$.

<5 pts>

Réponse

1.

$$\begin{aligned} \hat{G}(\nu) = \hat{R}(\nu) + j \hat{I}(\nu) &= [-j \cdot \operatorname{sgn}(\nu)] \cdot [R(\nu) + j I(\nu)] \\ &= -j R(\nu) \operatorname{sgn}(\nu) + I(\nu) \operatorname{sgn}(\nu) \\ &= I(\nu) \operatorname{sgn}(\nu) - j R(\nu) \operatorname{sgn}(\nu) \end{aligned}$$

$$\text{Pour des fréquences } (\nu > 0) \quad \hat{G}(\nu) = I(\nu) - j R(\nu)$$

<5 pts>

Nota : Cette opération fréquentielle va inverser la partie imaginaire et réelle du spectre de $g(x)$ à un signe près.

2.

Si on utilise ce que l'on a fait précédemment, en 1.(a), alors si $g(x)$ est réel et paire alors $G(\nu)$ a une partie réelle $R(\nu)$ paire et aucune partie imaginaire ($I(\nu) = 0$) donc, puisque $\hat{G}(\nu) = I(\nu) \operatorname{sgn}(\nu) - j R(\nu) \operatorname{sgn}(\nu)$, $\hat{G}(\nu)$ est imaginaire pur et impair.

Inversement, si $g(x)$ est réel et impaire alors $G(\nu)$ a une partie imaginaire $I(\nu)$ impaire et aucune partie réelle ($R(\nu) = 0$) donc, puisque $\hat{G}(\nu) = I(\nu) \operatorname{sgn}(\nu) - j R(\nu) \operatorname{sgn}(\nu)$, $\hat{G}(\nu)$ est réel et paire.

<5 pts>

Nota : Cette opération fréquentielle va inverser les propriétés hermitiennes de parité et d'imparité d'un signal!

3.

On va se servir du fait que le module d'un produit est le produit des modules et que le module de la fonction signe est 1 sauf en $\nu = 0$ où il est égal à zéro :

$$|\hat{G}(\nu)| = |-j \cdot \operatorname{sgn}(\nu) \cdot G(\nu)| = |-j| \cdot |\operatorname{sgn}(\nu)| \cdot |G(\nu)| = |G(\nu)| \quad (\text{sauf en } \nu = 0 \text{ où } |\hat{G}(\nu = 0)| = 0)$$

On va se servir du fait que l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments (car on rappelle que $\exp(ja) \cdot \exp(jb) = \exp[j(a + b)]$) :

$$\arg(\hat{G}(\nu)) = \arg(-j \cdot \operatorname{sgn}(\nu)) + \arg(G(\nu))$$

Donc si ($\nu > 0$), la phase (ou argument) de $\hat{G}(\nu)$ sera décalée (retardée) de $[-\pi/2]$ par rapport à cette de $G(\nu)$ et pour ($\nu < 0$), celle-ci sera avancée de $[\pi/2]$.

<5 pts>

Nota : Cette opération a pour effet de tourner de $+90$ degré la composante de fréquence négative de $g(x)$ et de -90 degré la composante de fréquence positive. Autrement dit, cette opération se comportera comme un déphaseur pur de $\pm\pi/2$. u cette opération a pour effet de tourner de 90 degré le plan de projection du signal analytique.

4.

En se servant du fait que puisque $g(x)$ est réel, $|G(\nu)|$ est paire (symétrie hermitienne), on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu) \hat{G}^*(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu) [-j \operatorname{sgn}(\nu) G(\nu)]^* d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\nu)|^2 \cdot j \operatorname{sgn}(\nu) d\nu = 0$$

puisque si $|G(\nu)|$ est paire, $|G(\nu)| \operatorname{sgn}(\nu)$ est impaire et l'intégrale d'une fonction impaire de $-\infty$ à $+\infty$ est nulle.

<5 pts>

Nota : Cette opération fréquentielle est dite orthogonal ou les deux signaux $g(x)$ et $\hat{g}(x)$ sont dit orthogonaux.

5.

$$\text{En utilisant la propriété duale, on a : } \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sgn}(\nu)] = \frac{1}{-j \pi x}$$

$$\text{Puis, en multipliant par } -j \text{ des deux cotés : } \mathcal{F}^{-1}[-j \operatorname{sgn}(\nu)] = \frac{1}{\pi x}$$

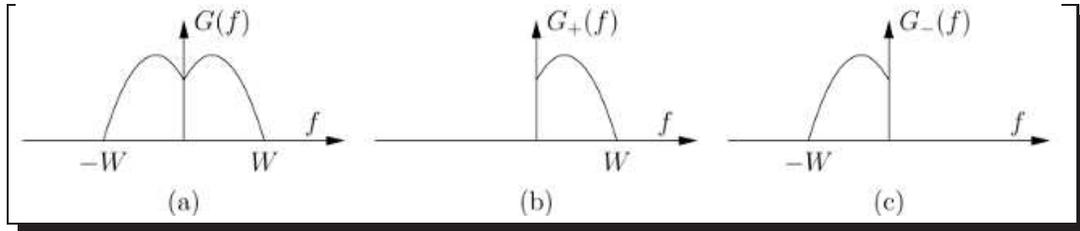
$$g(x) * \underbrace{\frac{1}{\pi x}}_{\text{Traitement spatial}} \stackrel{\mathcal{F}}{=} G(\nu) \cdot \underbrace{[-j \operatorname{sgn}(\nu)]}_{\text{Traitement fréquentiel}}$$

<5 pts>

$$\boxed{6.} \quad g_+(x) = \frac{1}{2}[g(x) + j\hat{g}(x)] \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} G_+(\nu) = \frac{1}{2}[G(\nu) + j\hat{G}(\nu)] = \frac{1}{2}[G(\nu) + j(-j \operatorname{sgn}(\nu) G(\nu))] \\ \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}G(\nu)(1 + \operatorname{sgn}(\nu))$$

$$\text{De même, on trouve :} \quad g_-(x) = \frac{1}{2}[g(x) - j\hat{g}(x)] \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}G(\nu)(1 - \operatorname{sgn}(\nu))$$

Comme résultat, $g_+(x)$ est un signal qui ne va comporter que les fréquences positives de $g(x)$ et inversement $g_-(x)$ est un signal qui ne va comporter que les fréquences négatives de $g(x)$.



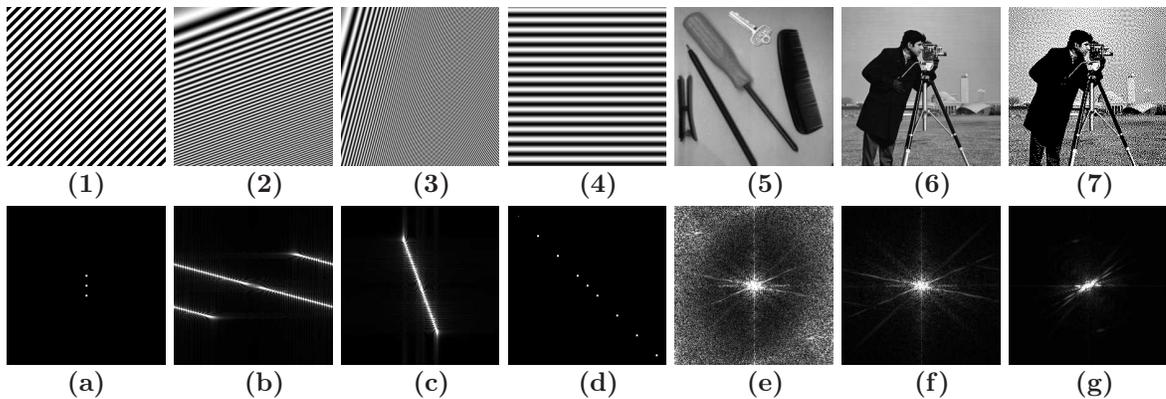
<5 pts>

Nota : Cette opération est appelée la Transformée de Hilbert (TH).

II. TFD et Spectre (18 pts)

1. Les images (1) à (7) de la Figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier (centré au centre de l'image) des différentes images (a) à (g). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.

<18 pts>



Réponse

1.

Dans la suite, $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image). On va donc procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident :

- [6 - f] & [7 - e]

Dans toutes les images de départ il existe deux images qui se ressemblent beaucoup, il s'agit de l'image (6) et (7) qui auront donc deux spectres qui se ressembleront beaucoup. Parmi les spectres existant, on voit que le spectre (e) et (f) se ressemblent beaucoup. L'un des deux, en l'occurrence le spectre (e), comporte cependant plus de hautes fréquences et ce dernier spectre devrait donc correspondre à l'image (7) qui est caractéristique d'une image que l'on a essayé d'imprimer dans un journal en essayant de reproduire les différents niveaux de gris de celle-ci à partir d'une succession de points blanc et noir, présentant ainsi beaucoup de transitions et donc de hautes fréquences dans le spectre. (En plus rappelons que le spectre de l'image (6) à déjà été calculé en TP).

En fait, il s'agit de ce qu'on appelle le demi-ton ou halftone, en reprographie. C'est en fait une technique utilisée par les journaux qui permet de rendre plusieurs niveaux de gris d'une couleur à partir d'une impression monochrome. Les journaux qui ne peuvent imprimer que des points d'encre, les arrangent de telle sorte que l'œil humain ne discerne plus ces points mais les intègre pour donner une illusion de plusieurs niveaux de gris.

- [5 - g]

À ce niveau, il existe une association facile à faire qui consiste à associer le spectre (g) avec l'image (5). On reconnaît dans l'image des transitions diagonales droites dues au crayon et au tournevis qui se retrouvent dans le spectre avec une orientation de +90 degré de celle du tournevis et du crayon. On retrouve aussi la transition qui est verticale de l'objet à gauche (dans l'image) avec la transition horizontale présente dans le spectre.

- [4 - a]

Le spectre (a) doit être rattaché à l'image (4) puisque, sans ambiguïté, on peut reconstruire l'image (4) à partir d'une composante continue ou valeur moyenne et une imagerie de base (le spectre est pair) présentant un cosinus bidimensionnel ne présentant que des oscillations horizontales, i.e., dans le sens des lignes.

- [1 - d]

Si on regarde l'image (1) de près, on s'aperçoit que l'image semble être à mi-chemin entre une succession de lignes blanches et noires orientées dans le sens diagonal droit et un cosinus bidimensionnel ne présentant que des oscillations diagonales droites. L'image semble être construite qu'à partir de cosinus bidimensionnels orientés dans le sens diagonal droit comme le précise le spectre (d).

En plus comme les oscillations de l'image (1) sont contractées par rapport aux oscillations de l'image (4), ses harmoniques sont bien dilatées par rapport aux harmoniques du spectre (a).

- [2 - c]

Toutes les transitions de l'image (2) sont perpendiculaires à l'image (c) qui est visiblement une somme de basse et haute fréquence orientée dans une seule et même direction.

- [3 - b]

Par élimination, il ne reste que l'association [3 - b]. On peut néanmoins reconnaître cette association par la présence dans l'image d'un peu d'aliasing qui est caractéristique d'un spectre qui ne s'annule pas pour la fréquence numérique 0.5 (i.e., extrémité de l'image). Les transitions dans le domaine spatial sont aussi perpendiculaires aux transitions du spectre associées aux forts coefficients spectraux de cette image.

<18 pts>

III. Opérations Ponctuelles (16 pts)

Soit l'opération ponctuelle suivante :

$$I_{new}(x, y) = \frac{I(x, y)}{I(x, y) + [\rho \hat{I}(x, y)]} \cdot I_{max}$$

$$\text{avec : } \hat{I}(x, y) = \alpha \cdot \text{Moy}_{\text{locale}}(I(x, y)) + (1 - \alpha) \cdot \bar{I}(x, y)$$

Et à la fin, l'image I_{new} est recalée entre : $[0, 255]$

Dans laquelle, $I(x, y)$ représente le niveau d'intensité de l'image de départ en (x, y) et $I_{new}(x, y)$, le niveau d'intensité de l'image traitée. De plus $I_{max} = 255$ représente l'intensité maximale pour une image codée en 256 niveaux de gris. α est un paramètre compris entre $[0, 1]$, $\bar{I}(x, y)$ représente l'intensité moyenne de l'image de départ et la fonction $\text{Moy}_{\text{locale}}(.)$ calcule l'intensité moyenne locale, dans un voisinage de l'image de départ, par exemple, dans une petite fenêtre de taille (en pixels) 21×21 , centré autour du pixel de coordonné (x, y) . ρ est un paramètre.

1. Dans un premier temps, pour simplifier la compréhension de cette expression, on prendra $\alpha = 0.5$ et $\rho = 1$. Expliquer en le justifiant du mieux possible ce que va faire cette opération ponctuelle.
<10 pts>
2. Expliquer, en le justifiant) dans l'expression modélisée par l'équation 1, le rôle des paramètres α et ρ .
<6 pts>

Réponse

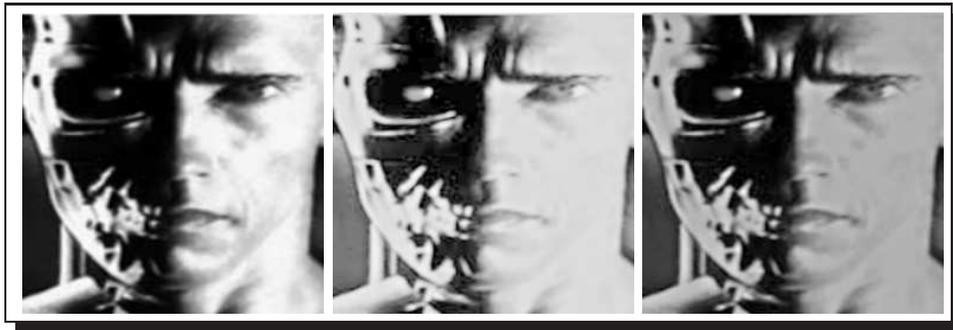
1.

Pour $\alpha = 0.5$, \hat{I} correspond à la moyenne entre l'illumination ou brillance moyenne de l'image et la brillance locale de l'image calculée sur une petite fenêtre centrée en un pixel. Bref, pour $\rho = 1$, une brillance moyenne locale sombre de l'image, ce nombre sera petit et grand pour une moyenne locale associée à une zone plus claire de l'image. Donc cette opération ponctuelle augmentera la luminance dans les zones locales sombres de l'image et l'atténuera dans les zones locales trop claires de l'image.

<10 pts>

2.

L'opération ponctuelle augmentera la luminance dans les zones locales sombres de l'image et l'atténuera dans les zones locales trop claires de l'image d'autant plus que α tendra vers 1. Lorsque $\alpha = 0$, cette adaptation locale ne se fera pas. α est donc un paramètre qui contrôle le degré d'adaptation locale à cette opération de correction de luminosité. ρ est un paramètre qui va accroître le contraste final (cf. les Figs ci-dessous pour une image originale et avec $\rho = 0.5$ et $\rho = 2.0$).



<6 pts>

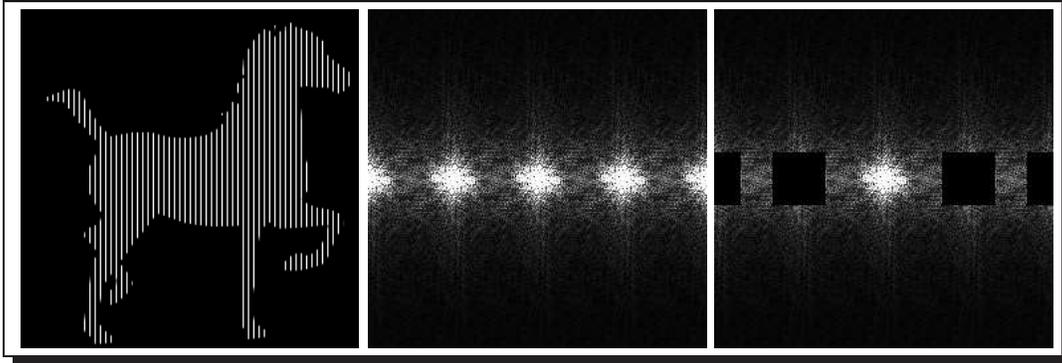
IV. Filtrage (30 pts)

1. Filtrage Spatial

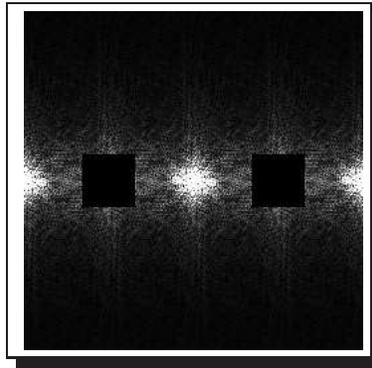
- (a) Faire un masque de convolution de taille 3×3 qui réalise une dérivée première suivant l'axe des x et une dérivée seconde suivant l'axe des y .
<6 pts>

2. Filtrage Fréquentiel

- (a) Trouver la réponse fréquentielle (ou MTF) d'un filtre qui dans le domaine spatial réalise une dérivée première suivant l'axe des x et une dérivée seconde suivant l'axe des y .
 <6 pts>



- (b) Soit l'image du cheval à rayure ci-dessus en haut à gauche et son spectre (image du centre). On réalise le filtrage fréquentiel qui conduit au spectre, une fois filtré, donnée à la figure de droite. Expliquer de préférence **avec le plus de détails mathématiques ou qualitatives possibles que vous pourrez apporter** pourquoi le spectre du cheval à rayure ressemble à l'image du centre et utiliser cette explication pour expliquer aussi mathématiquement ce que l'on va obtenir si on fait la Transformée de Fourier inverse de l'image de droite associée au spectre (de l'image du centre) filtrée. Si vous n'arrivez pas à l'expliquer mathématiquement, utiliser un raisonnement qualitatif.
 <12 pts>
- (c) On réalise cette fois-ci, le filtrage suivant ; que va t-on obtenir dans le domaine spatial ?



Utiliser toujours le raisonnement le plus explicatif prioritairement à un raisonnement qualitatif.
 <6 pts>

Réponse

1.(a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

<6 pts>

Nota : Le filtre précédent mais rotationé de 90 degré est aussi valable (dépendamment d'où on place les axes x et y dans l'image par rapport aux lignes et a ces colonnes).

On aurait pu proposer aussi $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ qui aurait été valable mais plus bruité que le masque de convolution proposé initialement.

2.(a)

Avec $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$, on sait que : $f'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu)F(\nu)$ et $f''(y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi jv)^2 F(v)$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}; f(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu) \cdot (2\pi jv)^2 \cdot F(u, v) = -8\pi^3 j\nu v^2 \cdot F(u, v) \propto j\nu v^2 \cdot F(u, v)$$

Donc une réponse fréquentielle du type : $H(u, \nu) \propto j\nu v^2$.

<6 pts>

2.(b)

Dans la suite, $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image).

Le raisonnement le plus qualitatif et le moins explicatif serait de dire que le filtrage effectué élimine les hautes fréquences de l'image notamment les variations rapides (hautes fréquences) verticales (puisque les éléments du spectre qui sont éliminés se trouvent sur la droite des ν) et qu'il aura pour effet de supprimer donc la rayure (verticale) du cheval. Cependant on peut détailler et fournir un raisonnement beaucoup plus précis et explicatif.

Posons la forme (en fait l'enveloppe) du cheval blanc non rayé par la fonction ChevalBlanc(x,y) et la forme du cheval rayé verticalement par une ligne noire (sur 4 lignes blanches) par ChevalRayé(x,y). En fait on passe mathématiquement de ChevalBlanc(x,y) à ChevalRayé(x,y) par l'opération mathématique :

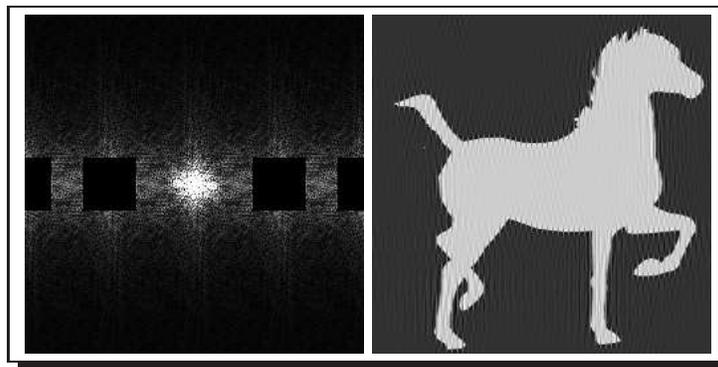
$$\text{CHEVALRAYÉ}(x, y) = \text{CHEVALBLANC}(x, y) \cdot \text{III}_{T=4}(x)$$

avec $\text{III}_{T=4}$ un peigne de Dirac ou les Diracs sont espacés de $T = 4$ pixels (il semblerait que l'on prenne un pixel blanc sur quatre, ce qui sera confirmé plus tard). Du coup, on a :

$$\text{CHEVALBLANC}(x, y) \cdot \text{III}_{T=4}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \text{SPECTRECHEVALBLANC}(u, \nu) * \text{III}_{1/T=4}(u)$$

avec $*$, l'opérateur de convolution et $* \text{III}_{1/T}(u)$, l'opérateur de périodisation qui va périodiser le motif spectral $\text{SPECTRECHEVALBLANC}(u, \nu)$ toute les fréquences multiples de $1/4$. Comme le support fréquentiel du spectre est 1 (de la fréquence numérique -0.5 à 0.5), ce motif spectral se répétera 4 fois (ce qui est confirmé et qui justifie que $T = 4$).

Le filtrage effectué élimine cette périodisation, donc permettra de récupérer uniquement le motif spectral $\text{SPECTRECHEVALBLANC}$ dans le domaine fréquence et donc par TF inverse de retrouver l'image du cheval blanc non rayé. En fait par TF inverse du spectre filtré et après recalage de l'image obtenu entre $[0 - 255]$, on obtient :



Ce qui est normal et peut s'expliquer puisque, en filtrant le spectre, on a éliminé en fait, approximativement, trois quarts de l'énergie spectrale existant dans le domaine fréquentiel. Par conservation de l'énergie qui indique que l'énergie de l'image dans le domaine spatial est la même que l'énergie dans le domaine spectral, on aura donc le cheval blanc non rayé avec une énergie (ou variance) de l'image 4 fois plus faible, c'est-à-dire une amplitude 2 fois plus faible. Au lieu d'avoir un cheval blanc de niveaux de gris 255 sur fond noir de niveaux de gris 0, on aura une amplitude, approximativement deux fois moins grande entre le niveau de gris du cheval et le fond de l'image.

<12 pts>

2.(c)

En utilisant un raisonnement similaire à la question précédente sur :

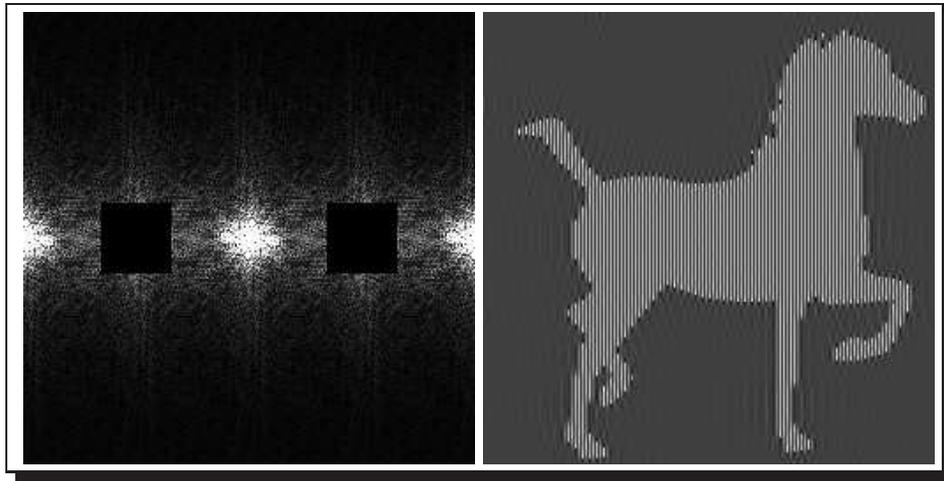
$$\text{CHEVALBLANC}(x, y) \cdot \text{III}_{T=4}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{SPECTRECHEVALBLANC}(u, \nu) * \text{III}_{1/(T=4)}(u)$$

Mais cette fois le filtrage fréquentiel réalise :

$$\text{SPECTRECHEVALBLANC}(u, \nu) * \text{III}_{1/T=4}(u) \xrightarrow{\text{Filtrage Fréquentiel}} \text{SPECTRECHEVALBLANC}(u, \nu) * \text{III}_{1/(T=2)}(u)$$

$$\text{DONC : } \text{SPECTRECHEVALBLANC}(u, \nu) * \text{III}_{1/(T=2)}(u) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \text{CHEVALBLANC}(x, y) \cdot \text{III}_{T=2}(x)$$

Ce qui est l'image du cheval blanc avec deux fois plus de rayures blanches (cad, une alternance de ligne blanche et noire ou une ligne blanche sur deux) :

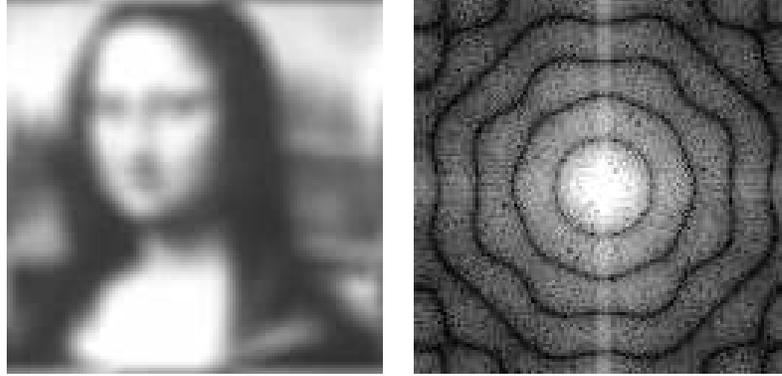


<6 pts>

Nota : Comme raisonnement qualitative très approximé, on peut dire que d'une certaine façon, on dilate le spectre d'un facteur deux (pas le spectre en tant que tel mais sa répétition) et donc puisqu'une dilatation dans le domaine spectral entraîne une contraction dans le domaine spatial, non pas le cheval mais les lignes blanches qui le composent sont contractées par un facteur deux (dans la direction opposée de celle du spectre) laissant voir ainsi deux fois plus de lignes blanches verticales.

V. Restauration (8 pts)

1. Soit l'image $g(x, y)$ ci-dessous dégradée, pour laquelle on a 1) calculé le module de sa TF (Transformée de Fourier) $|G(u, \nu)|$ puis 2) fait un recalage cyclique pour que le centre apparaisse au centre de l'image et 3) réalisé un rehaussement des hautes fréquences avec une transformation du type $\log[1 + |G(u, \nu)|]$ (comme celle vue en Travaux Pratiques 1).



En vous aidant du cours, identifier le type de dégradation de cette image et le ou les paramètres de ce type de dégradation.

<8 pts>

Réponse

1.

En regardant l'image $g(x, y)$, on peut remarquer que la principale dégradation de cette image semble être un flou uniforme. En regardant maintenant, le spectre (rehaussé dans les hautes fréquences de cette image), on remarque des cercles concentriques centrés à l'origine et périodique caractéristique d'un flou optique provenant d'une erreur de mise au point de lentille circulaire donnée par une PSF $h(x, y)$ du type :

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > r \\ \frac{1}{\pi r^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à estimer l'unique paramètre de cette PSF, à savoir r en utilisant les zéros du spectre qui sont localisés sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodique de période $\approx 0.61/r$.

Le premier zéro se trouve approximativement à la fréquence numérique $\nu \approx 1/8 = 0.125$ (en fait légèrement plus petit que $1/8$) donc puisque dans ce cas, les zéros du spectre qui sont localisés sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodique de période $\approx 0.61/r$, cela correspond à un rayon $r \approx 0.61/0.125 = 4.88$ et sachant qu'on avait trouvé une fréquence numérique légèrement plus petite que $1/8$ et que l'on doit prendre l'entier le plus proche, on dira donc que le flou est circulaire est de rayon 5 pixels.

<8 pts>

VI. Misc. (20 pts)

1. Expliquez ce qu'est la propriété d'ergodicité pour une image et donner un exemple de ce que cette propriété a permis de montrer en traitement d'images.

<5 pts>

2. Donner trois exemples où le phénomène de discrétisation apporte un biais comparativement à son modèle associé en continu et décrire brièvement quel est ce biais.

<5 pts>

3. Donner deux exemples de "filtres (considéré comme) passe-bas" qui n'ont pas de représentation fréquentielle.

<3 pts>

4. Soit l'image ci-dessous pour laquelle on peut voir le *plan focusé* (*i.e.*, le vase et les fleurs au premier plan) et le plan *non focusé* (*i.e.*, l'arrière plan plus flou).



On aimerait faire une segmentation en deux classes de cette image ; soit la classe d'étiquette *noire* pour le plan *non focusé* et l'étiquette *blanche* pour le plan *focusé*.

On aimerait aussi utiliser l'algorithme utilisé et programmé au dernier TP. Dans cette optique, où on désire changer le moins de chose possible comment et/ou quelle partie et de quelle façon devrait-on changer cet algorithme pour réaliser cette opération de segmentation ?

<7 pts>

Réponse

1.

La moyenne d'ensemble est égale à moyenne spatiale. Cette propriété nous a permis de montrer que puisque le moyennage d'images prises par un appareil électronique avait la propriété de réduire le bruit gaussien caractéristique des appareils électroniques alors le moyennage spatial fait par un filtre spatial dans une zone de région homogène dans l'image avait aussi cette même propriété.

<5 pts>

2.

-- Aliasing.

-- La TFD face à la TF continue. Le fait d'utiliser la TF discrète sur une image introduit un biais sur l'image traitée qui est sa périodicité.

-- Le recouvrement spatial lorsqu'on veut faire une convolution de deux fonctions en utilisant la TF discrète sur ces deux fonctions

-- L'égalisation d'histogramme discret par rapport à toute opération ponctuelle sur des variables aléatoires continues. Le biais considéré dans cet exemple montre qu'on ne peut obtenir un histogramme parfaitement plat par égalisation d'histogramme.

-- Le support de convolution de deux fonctions discrètes qui est de $N_1 + N_2 - 1$ et non pas de $N_1 + N_2$ en continue.

-- Biais dans la discrétisation d'un filtre Gaussien ou autre.

-- Le biais obtenu dans la reconstruction tomographique numérique ...

-- etc.

<5 pts>

3.

Filtre médian, tous les opérateurs morphologiques appliqués sur une image en niveaux de gris et le filtre adaptatif étudié en cours par exemple.

<3 pts>

4.

En fait dans le dernier TP, on avait une segmentation deux classes qui était faite de telle façon que les pixels les plus sombres (ou plus précisément dont la répartition ou distribution avait la moyenne la plus faible) appartenait à la classe 0 et les pixels les plus clairs (distribution dont la moyenne était la plus grande) devaient appartenir à la classe 1. Ici, on aimerait que les pixels appartenant à la région la plus floue appartiennent à la classe 0. On va donc définir une transformation qui va transformer l'image originale en une image en niveaux de gris dans laquelle des zones claires correspondraient aux zones non floues et inversement où des zones de niveaux de gris sombres correspondraient aux zone floues. Ensuite, tout le reste de l'algorithme pourrait être identique.

Dans notre cas, un descripteur calculé sur une petite fenêtre centré sur le pixel considéré de taille par exemple 31×31 et pour lequel on aurait calculé la valeur maximale du gradient de premier ordre ferait l'affaire par exemple (cf. images ci dessous où l'on voit l'image defocusée, la conversion en valeurs de gradient max sur une fenêtre 31×31 , la segmentation binaire obtenue et l'image de la segmentation super-imposée sur l'image de départ).

<7 pts>

