



DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 12/12/2017

I	Transformée de Fourier (34 pts)
II	Spectre (31 pts)
III	Opération Ponctuelle (7 pts)
IV	Filtrage Fréquentiel (20 pts)
V	Restauration (22 pts)
VI	Questions Relatives aux TPs (16 pts)
Total	130 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (34 pts)

Le but de cet exercice est de calculer la Transformée de Fourier (TF) de la fonction ou du signal 1D $f(x) = |x|$ (où le symbole $|\cdot|$ désigne la valeur absolue), de deux façons différentes mais en utilisant, dans ces deux cas, les propriétés de la TF et la connaissance de Transformée de fonctions déjà calculées et possiblement tabulées dans des tables. Soit donc $f(x)$ un signal et $F(\nu)$ sa TF (*i.e.* ; $f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$).

1. PRÉAMBULE

- (a) Rappeler pourquoi on n'aurait pas pu calculer la TF de cette fonction $f(x) = |x|$ en utilisant directement la définition de la TF utilisant la formule intégrale.

<4 pts>

- (b) Énumérer **toutes** les propriétés de $F(\nu)$, la TF de la fonction $f(x) = |x|$ (sans la calculer).

<4 pts>

2. PREMIÈRE FAÇON

- (a) Rappeler pourquoi : $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$
où “ $*$ ” est l’opérateur de convolution et $\delta'(x)$ est la dérivée du Dirac.

<4 pts>

- (b) Dans les tables de Transformée de Fourier, on trouve facilement :

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(x)] = \frac{1}{j\pi\nu} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[x] = -\frac{\delta'(\nu)}{2\pi j} \quad (1)$$

où $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe (égale à 1 pour tout $x > 0$ et -1 pour tout $x < 0$ et égale à 0 pour $x = 0$) et j désignant le nombre imaginaire pur.

En utilisant les relations (1), trouver la TF de la fonction $f(x) = |x|$.

<4 pts>

3. DEUXIÈME FAÇON

- (a) Rappeler pourquoi, si $f(x)$ est réelle et $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu)$: $f(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(\nu)$
où $F^*(\nu)$ représente la conjuguée de $F(\nu)$.

<4 pts>

- (b) Dans les tables de Transformée de Fourier, on trouve facilement :

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}(x)] = \frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{1}{2\pi j\nu} \quad (2)$$

où $\mathcal{H}(x)$ est la fonction d’Heaviside, que l’on peut définir à partir de la fonction signe ;
 $H(x) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(x)]$ ou bien en disant tout simplement que $H(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 ailleurs.

Exprimer donc $f(x) = |x|$ en fonction de x et de $H(x)$ et, en utilisant la propriété $f(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(\nu)$, trouver ensuite la TF de la fonction $f(x) = |x|$.

<6 pts>

4. APPLICATION EN TRAITEMENT D’IMAGES

- (a) En déduire la transformée de Fourier inverse de $F(\nu) = |\nu|$, *i.e.*, $h(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}[|\nu|]$.

<4 pts>

- (b) En déduire de (a) et de vos connaissances comment on pourrait réaliser en tomographie, la retro-projection filtrée (que vous avez implémenté en TP) sans TFD (Transformée de Fourier Discrète) ou FFT (Fast Fourier Transform) ?

<4 pts>

Réponse

1.(a)

On n'aurait pas pu calculer cette TF à partir de la définition directe de la TF utilisant la formule intégrale car la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas carré ou absolument sommable (ou intégrable) sur $\mathbf{R}$.

<4 pts>

1.(b)

La fonction $f(x)$ est réelle et paire, donc sa transformée $F(\nu)$ sera réelle et paire. On pourrait dire aussi que la fonction étant non périodique, son spectre sera continu et aussi que, comme la fonction $f(x)$ possède une discontinuité de sa dérivée au voisinage de $x = 0$ ($f'(x)$ tend vers -1 en $x = 0^-$ et vers 1 en $x = 0^+$), on s'attend à voir une TF dont le support est assez grand (nécessaire pour reconstruire cette discontinuité de la dérivée).

<4 pts>

2.(a)

En utilisant la propriété $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu \cdot F(\nu)$ et le fait que $\delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$, on trouve facilement, en remplaçant $f(x)$ par la fonction $\delta(x)$; $\mathcal{F}[\delta'(x)] = 2\pi j\nu$ et il s'en suit donc que :

$$\begin{aligned}\delta'(x) * f(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi j\nu \cdot F(\nu) \\ &= f'(x)\end{aligned}$$

<4 pts>

2.(b)

$$\begin{aligned}|x| = x \cdot \text{sgn}(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{\delta'(\nu)}{2\pi j} * \left(\frac{1}{j\pi\nu}\right) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\nu}\right)' = -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu^2} \\ \text{Donc : } \mathcal{F}[|x|] &= -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu^2}\end{aligned}$$

<4 pts>

NOTA : On vérifie, tel qu'il a été établie en question 1.(b) que la transformée $F(\nu)$ est réelle, paire, continue avec un support fréquentiel assez grand.

3.(a)

On peut se rappeler que tout ce qui est inversé est conjugué, mais pour le démontrer :

$$\begin{aligned}\text{la façon la plus simple est la suivante : } f(x) \text{ paire} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) \text{ réelle} \\ \Leftrightarrow f(x) = f(-x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) = F^*(\nu) \\ \text{donc } f(-x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(\nu)\end{aligned}$$

$$\text{ou, en utilisant la propriété de contraction dilatation : } f(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|-1|} F\left(\frac{\nu}{-1}\right) = F(-\nu)$$

Mais puisque $f(x)$ est réelle donc $F(-\nu) = R(-\nu) + jI(-\nu)$ est à symétrie hermitienne, i.e., $R(-\nu) = R(\nu)$ et $I(-\nu) = -I(\nu)$, et donc : $f(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(-\nu) = R(-\nu) + jI(-\nu) = R(\nu) - jI(\nu) = F^*(\nu)$.

On a donc bien $f(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(\nu)$.

<4 pts>

3.(b)

$$\begin{aligned}
|x| = xH(x) - xH(-x) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \left\{ \frac{-\delta'(\nu)}{2\pi j} * \left(\frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{1}{2\pi j\nu} \right) \right\} + \left\{ \frac{\delta'(\nu)}{2\pi j} * \left(\frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{1}{2\pi j\nu} \right) \right\} \\
&= -2 \cdot \left(\frac{\delta'(\nu)}{2\pi j} * \frac{1}{2\pi j\nu} \right) = -\frac{\delta'(\nu)}{2\pi j} * \left(\frac{1}{j\pi\nu} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\nu} \right)' = -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu^2}
\end{aligned}$$

<6 pts>

$$\text{Donc : } \mathcal{F}[|x|] = -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu^2}$$

4.(a)

La fonction $f(x) = |x|$ étant paire, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}$ et, si $x \rightleftharpoons \nu$, on a :

<4 pts>

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\nu|) = -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

4.(b)

• Plutôt que de calculer la TF de chaque projection pour la filtrer passe-haut (avec le filtre de MTF $H(\nu) = |\nu|$), il est donc possible de convoluer maintenant chaque projection par $\mathcal{F}^{-1}(|\nu|)$ et rester ainsi dans le domaine spatial (*i.e.* : projection filtrée = $p_\theta(t) * \mathcal{F}^{-1}(|\nu|)$) sans avoir besoin d'une FFT ou TFD !

• Plus en détails : La méthode de reconstruction de $f(x, y)$ par rétroprojection filtrée est décrit par l'équation :

$$f(x, y) = \iint p_\theta(t)_{\text{filtrée}} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta$$

où $p_\theta(t)_{\text{filtrée}}$ est l'opération nécessitant la TF de $p_\theta(t)$ (*i.e.* ; $p(t) \rightleftharpoons P(\nu)$), puis son filtrage par le filtre passe-haut $H(\nu) = |\nu|$ dans le domaine des fréquences, puis la $\mathcal{F}^{-1}$ de ce filtrage pour obtenir $p_\theta(t)_{\text{filtrée}}$. Mais on peut aussi trouver $p_\theta(t)_{\text{filtrée}}$ en restant dans le domaine spatial, sans TFD ou FFT, en posant :

$$p_\theta(t)_{\text{filtrée}} = p_\theta(t) * h(t) = p_\theta(t) * \mathcal{F}^{-1}(|\nu|) \quad (\text{avec } t \rightleftharpoons \nu)$$

avec $h(t)$ la $\mathcal{F}^{-1}$ de $H(\nu) = |\nu|$ et donc par l'opération ne nécessitant aucune TFD ou FFT :

$$f(x, y) = \iint \left(\underbrace{p_\theta(t) * \left\{ -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{t^2} \right\}}_{\text{Donc sans TFD ou FFT}} \right) \cdot \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta$$

<4 pts>

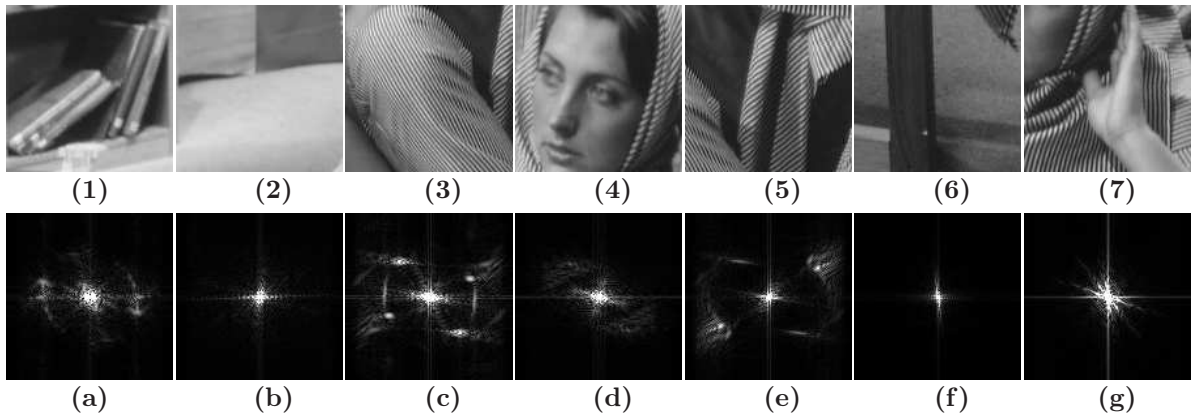
NOTA -1- : La complexité algorithmique de ce traitement spatial serait de l'ordre de $O(N^4)$ comparativement à $O(6 N^2 \log_2 N)$ pour une image de taille $N \times N$ et en considérant qu'une multiplication complexe se fasse en 6 ops.

NOTA -2- : On rappelle que si l'image $f(x, y)$ à reconstruire par tomographie par retro-projection filtrée est trop bruitée, le filtre passe-haut que l'on doit utiliser doit être une combinaison de la fonction $H(\nu) = |\nu|$ avec une fonction $R(\nu)$ modélisant le fait que le spectre de $f(x, y)$ est à largeur de bande spectrale limitée (vers les basses et moyennes fréquences).

II. Spectre (31 pts)

1. Les images (1) à (7) de la Figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier (calculé par la FFT et recentré au centre de l'image) des différentes imagerie (a) à (g) prises sur l'image (I). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.

<21 pts>



2. quelle est l'image (1 à 7) qui pourrait le mieux démontrer visuellement par son spectre, que la TFD d'une image est en fait la TF (parfaite) d'une image mais qui se périodise à l'infinie en x et y ?

<5 pts>

3. Voici une image de taille 256×256 :



Faire un schéma (ou le dire textuellement) qui indiquera à quoi ressemblera le (module du) spectre de cette image.

<5 pts>

Réponse

1.

Dans la suite, $x \stackrel{\mathcal{F}}{=} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{=} v$ avec y orientée dans le sens des colonnes (largeur de l'image) croissantes et x , orientée dans le sens des lignes (longueur de l'image).

On remarque tout d'abord que quatre images possèdent une texture quadrillée haute fréquence et que quatre spectres possèdent des taches hautes fréquences (éloignées du centre et symétrique par rapport au centre) qui représentent fréquemment cette texture donc l'image (3)-(4)-(5)-(7) seront associées aux spectres (a)-(c)-(d)-(e). Par élimination les images (1)-(2)-(6) seront associées aux spectres (b)-(g)-(f)

On va procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident :

- $[2 - f]$:

L'image est composée essentiellement de zones homogènes donc de composantes fréquentielles très basses fréquences. De plus on reconnaît une petite transition verticale dans l'image qui va se traduire par une petite transition horizontale dans son l'image de son spectre et en se périodisant, l'image nous montre aussi une petite transition horizontale qui va se modéliser par une petite transition verticale dans son spectre. On choisit donc le spectre qui est le plus "concentré basse fréquence" avec ses deux petites discontinuités horizontales et verticales.

- $[6 - b]$:

Même chose que l'image -2- mais avec un peu plus de hautes fréquences et des transitions verticales et horizontales plus marquées.

- $[1 - g]$:

On reconnaît dans l'image deux sortes de transition diagonale droite que l'on peut reconnaître dans le spectre avec une direction perpendiculaire et surtout une bonne discontinuité horizontale due à la périodisation de l'image (et une petite transition verticale) que l'on constate dans le spectre perpendiculairement.

- $[3 - e]$:

Le pantalon de la jeune femme exhibe un motif presque sinusoidal qui se reconstruit avec des imagerie de base cosinusoidale bidimensionnelle (cf. cours) qui est matérialisées par les deux taches diagonales droites que l'on reconnaît sur le spectre (e).

- $[4 - d]$:

L'image (4) exhibe deux groupes de discontinuités (le premier groupe est celle du nez et du contour parallèle du visage et la deuxième est celui des sourcils, yeux, et bouche de cette jeune femme. On reconnaît dans le spectre ses deux discontinuités perpendiculaires dans le spectre (D). Pour le reste, l'image nous montre majoritairement le visage qui est composé de basses fréquences.

- $[5 - c]$:

On reconnaît grâce au foulard et pantalon, 4 sortes de motifs ressemblant aux 4 imagerie de base cosinusoidales bidimensionnelle (cf. cours) dans quatre directions différentes.

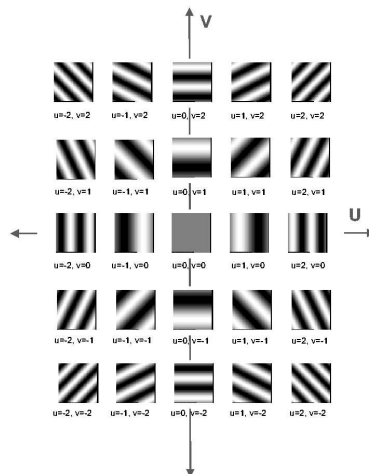
- $[7 - a]$:

Essentiellement un motif en rayure verticale et verticale légèrement droite dans l'image créant ainsi le spectre associé avec ces 4 taches associées à ces 4 type d'imagerie de base.

Remarque : puisque le spectre (b) et (f) se ressemble beaucoup, je compte aussi pour bon toute les combinaisons (b,f)(2,6)

<21 pts>

NOTA : Je mets ci-dessous l'image du cours qui était bien utile pour associer facilement ces images à son spectre.



2.

La première image qui présente une belle discontinuité horizontale lorsque celle-ci devient toroidale et dont le calcul du spectre par la TFD sera donc biaisé par cette propriété de la TFD en présentant une discontinuité spectrale verticale qui, en fait, ne correspond à aucune discontinuité horizontale présente dans l'image.

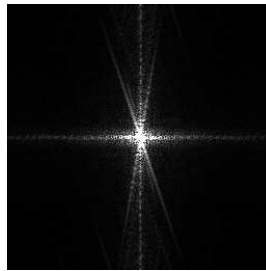
<5 pts>

3.

Mis à part des zones très homogènes, on voit qu'il existe exactement 4 groupes de discontinuités respectivement dans la direction verticale, horizontale et deux autres types de transition dont l'une est orientée de quelques degrés par rapport à l'axe des abscisses (colonnes de l'image) et l'autre type fait presque un angle π avec ce même axe des abscisses. Pour modéliser ces discontinuités le spectre de cette image présentera donc quatre discontinuités très marquées dans les quatre directions perpendiculaires à ces quatre directions.

<5 pts>

NOTA : Voici le spectre de cette image :



III. Opération Ponctuelle (7 pts)

Soit le filtre suivant qui transforme une image en niveaux de gris I en une nouvelle image en niveau de gris J définit comme suit.

Pour tout pixel p , on associe une fenêtre $W(p)$ de taille impaire et centrée sur ce pixel (par exemple une fenêtre de taille 5×5). Pour tout pixel p , on pose :

$$\begin{aligned}\min_p &= \min(I(q) \mid q \text{ dans } W(p)) \\ \max_p &= \max(I(q) \mid q \text{ dans } W(p))\end{aligned}$$

Pour tout pixel p de l'image J (que l'on appelle $J(p)$) est donné par :

$$J(p) = \begin{cases} \max_p & \text{si } I(p) \geq (\max_p + \min_p)/2 \\ \min_p & \text{si } I(p) < (\max_p + \min_p)/2 \end{cases}$$

et on répète plusieurs fois ce filtre (par exemple une centaine de fois).

1. Préciser qualitativement ce que va donner ce filtre dans le cas où la fenêtre $W(p)$ est par exemple de taille 3×3 pixels et dans le cas -1- d'une zone de l'image où le niveau de gris est constant, -2- d'une image où la zone supérieure verticale à un niveau de gris et la zone inférieure à un autre niveau de gris, -3- une image binaire, -4- une image avec une variation ou dégradé de niveaux de gris (par exemple un dégradé horizontal de niveaux de gris entre 0 (à gauche de l'image) et 255 à droite de l'image), -5- une image où le niveau de gris est constant mais avec du bruit Gaussien, -6- une image où le niveau de gris est constant mais avec du bruit impulsif, et enfin -7- une image en niveaux de gris (vues en TP) comme MONA ou le PHOTOGRAPHE.
-

Réponse

1.

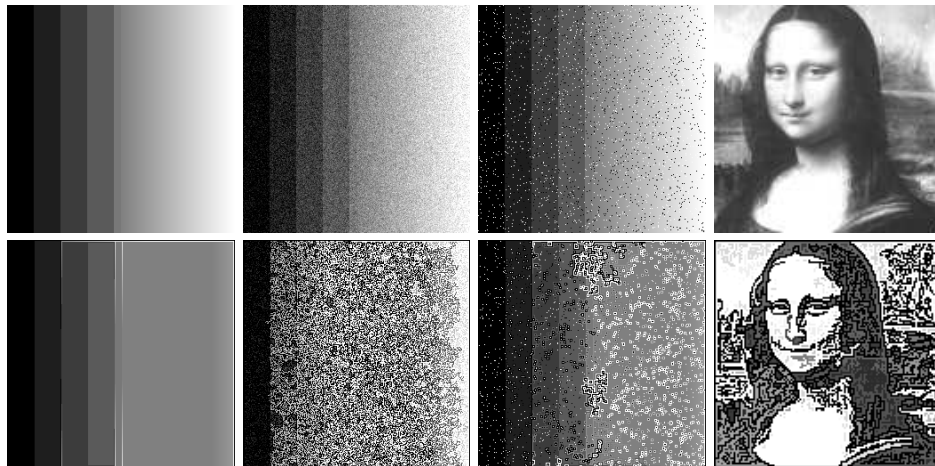
- 1-2- Rien ou presque rien avec les contours légèrement modifiés.
- 3- L'image résultat sera toujours binaire avec les contours des objets binaires légèrement modifiés.
- 4- Le filtre réduira l'étendue des variations ou des dégradés. Plus précisément, le dégradé va être interrompue par des paliers, un peu comme une segmentation, en donnant des zones constantes séparées par des marches abruptes.
- 5-6- Ce filtre va amplifier le bruit tout en réduisant l'étendue des variations ou des dégradés. Le bruit Gaussien sera quelque peu transformé en un bruit poivre et sel prenant les valeurs minimal et maximal locales dans l'image.
- 7- En prenant en considération tout ce qui a été dit précédemment, ce filtre donnera sur une image comme photographie, une image créée par un nombre limité de niveau de gris, avec des zones constantes séparées par des marches abruptes, un peu comme une segmentation.

<7 pts>

NOTA : Ce filtre est le filtre de Kramer et Bruckner, introduit en 1975. Il est le premier d'une famille de filtres non-linéaires qu'on appelle des *filtres de choc*. Leur effet est le contraire de celui du lissage. Il réduisent l'étendue des dégradés et donne une sorte d'image simplifiée avec des zones constantes en réduisant les variations dans chaque zone et donc en produisant des sortes d'images segmentées.

En conclusion, une application de ce filtre une fois permettra de rehausser une image et l'application de ce filtre plusieurs fois produira une simplification de l'image, un peu comme une segmentation en plusieurs classes, où les classes seront les différents dégradés (considérablement moins nombreux) que l'image de départ. L'effet de ce filtre est donc un peu le contraire du lissage ou du filtre moyenneur vu en cours.

NOTA : Quelques résultats de l'application de 50 fois ce filtre sur une image du type -5-6-7.



IV. Filtrage Fréquentiel (20 pts)

1. Trouver la réponse fréquentielle (ou MTF) d'un filtre qui dans le domaine fréquentiel réalise une dérivée première (dans le domaine spatial) suivant l'axe des x et une dérivée seconde suivant l'axe des y . C'est-à-dire qui réalise l'équation (3) :

$$\frac{\partial^3 I(x, y)}{\partial x \partial y^2} \quad (3)$$

<6 pts>

2. Trouver la réponse fréquentielle (ou MTF) d'un filtre qui réalise l'équation (4) :
<6 pts>.

$$\Upsilon(I(x, y)) = \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \quad (4)$$

3. Supposons que l'on ait une image (de taille $N \times N$ et que l'on fasse sur celle-ci les opérations suivantes :
-1- On calcule sa TF. -2- Sur sa TF (partie réelle et imaginaire) on met à zéro une colonne sur deux de sa TF. La colonne associée à la fréquence 0 (valeur moyenne de l'image n'est pas mise à zéro). -3- On fait une TF inverse.

Qu'obtiendra-t-on si on part de l'image suivante (le cadre noir ne fait pas partie de l'image) ? Justifiez le mieux possible votre réponse.



<8 pts>.

Réponse

1.

Avec $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$, on sait que : $f'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu)F(\nu)$ et $f''(y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi jv)^2 F(v)$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}; f(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu) \cdot (2\pi jv)^2 \cdot F(u, v) = -8\pi^3 j \nu v^2 \cdot F(u, v) \propto \nu v^2 \cdot F(u, v)$$

Donc une réponse fréquentielle du type : $H(u, \nu) \propto \nu v^2$.

<6 pts>

2.

Avec $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} v$, $f'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu)F(\nu)$, $f''(y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi jv)^2 F(v)$, on trouve immédiatement :

$$\frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{(2\pi j\nu) + (2\pi jv)^2\} \cdot F(u, v)$$

Donc une réponse fréquentielle du type : $H(u, \nu) \propto j\nu - v^2$.

<6 pts>

3.

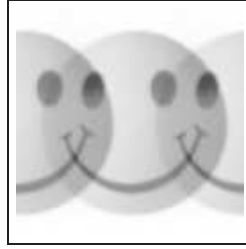
▷ Qualitativement, l'opération faite dans le domaine fréquentiel est une discrétisation d'un échantillon sur deux sur les lignes du spectre. Donc, puisque la discrétisation dans un espace entraîne la périodisation dans l'autre espace, on aura une périodisation du motif suivant les lignes (toutes les moitiés d'images).

▷ Mathématiquement supprimer une colonne sur deux, correspond sur la TF de l'image $f(x, y)$ à l'opération suivante (en considérant x (la colonne) et y (la ligne) et la correspondance $x \rightleftharpoons u$, et $y \rightleftharpoons \nu$

$$F(u, \nu) \cdot \left\{ \text{III}_{T=2\Delta u}(u) \cdot \text{Cst}(\nu) \right\} \stackrel{\text{TFD}^{-1}}{\rightleftharpoons} f(x, y) * \left\{ \text{III}_{\frac{1}{T}}(x) * \delta(y) = f(x, y) * \text{III}_{\frac{1}{T}}(x) \right\}$$

Le motif spatial va donc se répéter tout les $1/T = 1/2\Delta u = N/2$, c'est-à-dire toutes les moitiés de l'image en x (colonne) et on obtiendra :

<8 pts>



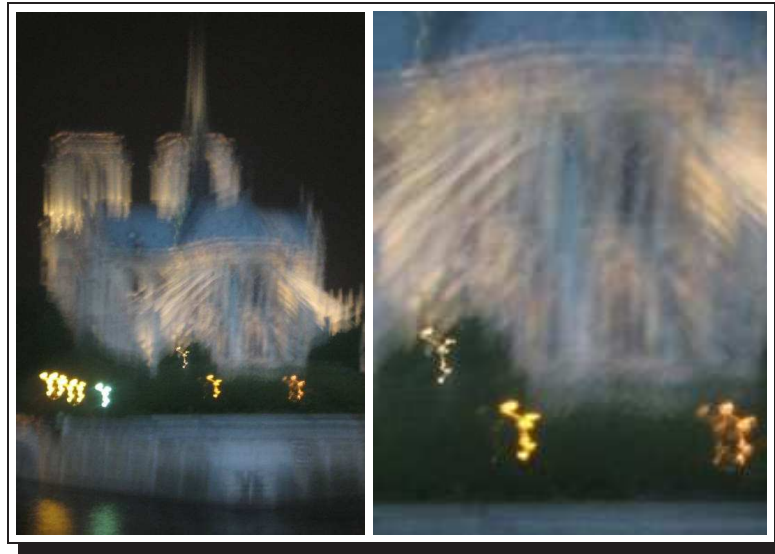
V. Restauration (22 pts)

1. Quels sont les trois ou quatre types de flou les plus connus d'une caméra (appareil photo numérique). Expliquer brièvement à quoi est dû chacun d'entre eux.

<6 pts>

2. Soit l'image ci-dessous (cathédrale Notre-dame) prise par une caméra numérique (et un agrandissement à droite). Expliquez précisément à quoi est dû la dégradation de cette image. Si on voulait restaurer cette image en utilisant efficacement un maximum du code du TP *déconvolution & restauration* que vous avez implémenté, expliquer ce qu'il faudrait d'une part estimer et comment l'estimer **précisément** puis comment utiliser ce code (*i.e.*, en changeant quelle structure de données?) pour ensuite restaurer cette image.

<8 pts>



3. Le télescope spatial Hubble (en anglais Hubble Space Telescope ou HST) fut lancé par la NASA en 1990 sur une orbite terrestre basse à 600 km d'altitude en 1990. On s'aperçut rapidement d'une aberration optique particulièrement grave due à un mauvais polissage de son miroir principal qui le rendait "myope", c'est-à-dire qui faisait en sorte que le télescope produisait en fait des images floues. Dans un premier temps, avant l'année 1993, où une mission spatiale corrigea physiquement l'anomalie de sa partie optique (en lui ajoutant une sorte de lunette corrigeant son problème optique), les ingénieurs ont utilisé les images floues produites par ce télescope avec des procédures de déconvolution numérique comme celles vues en TPs. Mais ces derniers ont dus estimer la PSF (Point Spread Function) ou fonction de flou du télescope. On vous demande de trouver deux manières de le faire.

<4 pts>

4. Imaginons un télescope dont les images $f(x, y)$ sont dégradées par un flou de mise au point ou hors foyer $h_2(x, y)$ carré uniforme (de taille 5×5) créé par le télescope. De plus, la lumière (donc l'image)

qui entre dans le télescope est dégradée par un flou de turbulence atmosphérique (du au fait que l'atmosphère est composée de multiples bulles de température et d'humidité différentes avec un indice optique différent créant des réfractions différentes et aléatoires en fonction de la zone d'atmosphère traversée) $h_1(x, y)$ de type Gaussien avec σ comme écart type.

Écrire le modèle de dégradation de l'image $f(x, y)$ dégradée composée de ces deux flous.

Si on voulait modéliser le flou de ce télescope théoriquement par **une seule** PSF $h(x, y)$, que devrait-on considérer théoriquement ?

<4 pts>

Réponse

1.

- Le flou créé par le déplacement du sujet photographié. Si le sujet bouge pendant que l'obturateur enregistre l'image ("motion blur").
- Le flou créé par le mouvement de la caméra. Souvent, c'est la main qui fait bouger la caméra d'où le nom "hand-shaking blur".
- Le flou créé par une mauvaise mise au point. "out-of focus blur" soit rond ou carré.

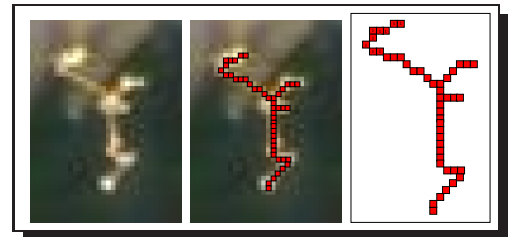
<6 pts>

NOTA : On pourrait ajouter aussi un flou de compression (ex. jpg) mais celui-ci n'est pas directement lié à la caméra mais à son système de stockage de données. Le flou de turbulence atmosphérique peut intervenir mais celui-ci n'est pas intrinsèque à la caméra.

2.

Il s'agit d'un flou créé par le mouvement de la caméra, lequel est certainement dû au mouvement de la main qui tenait la caméra pendant que l'obturateur enregistrerait l'image. Mathématiquement, si $g(x, y)$ est l'image floue, nous avons $g(x, y) * h(x, y)$ avec $h(x, y)$, la psf et $*$ l'opérateur de convolution.

On reconnaît ce flou facilement car l'objet visualisé (la cathédrale Notre-Dame) est statique et pourtant, on a l'impression, dans cette image, qu'elle bouge. Un deuxième indice nous est donné par la lumière, tel un point fixe, d'un lampadaire (au milieu de l'image, légèrement en bas) qui trace un certain chemin de lumière (ou fonction) pendant que la main était en train de bouger et pendant que l'obturateur enregistrerait l'image *via* les capteurs de la caméra.



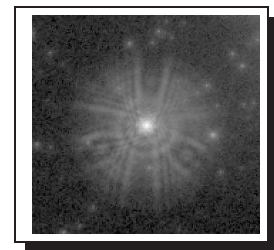
Ce chemin peut être utilisé pour estimer l'étalement d'un point fixe (de largeur un pixel) communément appelé *point spread function* ou fonction de flou ou PSF de la dégradation ; pour cela, on doit isoler ce tracé de lumière et trouver celui qui aurait été créé par une lumière de lampadaire de largeur un pixel. Ce motif 2D est notre fonction de flou ou psf et doit être enregistré dans $h(x, y)$, un tableau 2D dans lequel on recrée ce motif au centre informatique de ce tableau par un ensemble de coefficients identiques (on suppose que la main a bougé à la même vitesse durant le temps où l'obturateur enregistrerait l'image, cf. image ci-dessous) dont la somme intègre à un (le flou est un filtre passe-bas qui ne doit pas modifier la moyenne de l'image).

On peut ensuite utiliser le reste du code du TP pour déconvoluer cette image par l'algorithme implémenté en TP après avoir estimé la variance du bruit qui entache cette image.

<8 pts>

3.

En récupérant la tache (ou fonction de floue) créée en faisant fixer le télescope HST sur une étoile fixe simple isolée dans une région sombre de l'univers (entourée de vides interstellaires) ou en faisant pointer le HST sur une zone localement sombre sur terre au milieu de laquelle un



PSF du HST

laser émettrait une source de lumière ponctuelle puissante. Un moyennage de plusieurs estimations pour débruiter cette PSF serait peut-être aussi nécessaire.

<4 pts>

NOTA : On pourrait aussi l'estimer en faisant la TF^{-1} de la division du spectre de l'image obtenue en une scène donnée par le HST et le spectre obtenu par un autre télescope sans problème de flou avec le me agrandissement et pour la même scène.

4.

Soit $g(x, y)$, l'image dégradée composée de ces deux flous :

$$g(x, y) = \left(\underbrace{[f(x, y) * h_1(x, y)]}_{\text{turbulence}} * \underbrace{h_2(x, y)}_{\text{hors foyer}} \right)$$

Mais comme le produit de convolution est commutative, alors $g(x, y) = f(x, y) * (h_1(x, y) * h_2(x, y))$ et on pourrait considérer une seule PSF $h(x, y) = h_1(x, y) * h_2(x, y)$, c'est-à-dire un carré uniforme 5×5 convolué par une Gaussienne d'écart type σ .

<4 pts>

VI. Questions Relatives aux TPs (16 pts)

1. Dans le TP numéro 3 **DÉCONVOLUTION & RESTAURATION** (question C), on s'intéressait au processus de restauration ou de dégradation inverse (qui consiste à retrouver une image originale avant que celle-ci ne soit altérée par cette dégradation) en considérant que l'on savait d'avance que le flou était uniforme (rectangulaire) et de taille identique en ligne et colonne (*i.e.*, carré) et de taille $p = 5$ pixels et la variance $\sigma^2 = 20.0$ du bruit Gaussien.

Normalement, il aurait fallu estimer, dans un premier temps, la variance du bruit additif qui entache cette image dégradée puis dans un deuxième temps, la nature du flou qui dégrade cette image puis dans un troisième temps les paramètres de ce flou (ou paramètre de la psf).

- (a) Donner une méthode pour estimer la variance du bruit additif Gaussien qui entachait cette image. Si votre méthode dépend d'un paramètre discuter la sensibilité de ce paramètre sur le résultat de l'estimation.

<5 pts>

- (b) Supposons maintenant que nous avons fait l'étape précédente ; nous avons donc une estimation de l'écart-type σ du bruit additive dégradant l'image et nous savons aussi que le flou de cette image est majoritairement donnée par une psf carrée mais de taille inconnue p . Donner la méthode qui permettrait d'estimer ce paramètre en étant le plus précis possible (sur comment ce paramètre serait estimé) et dans le cas où $p = 5$ quelle spectre s'attendrait-on à voir (faire un schéma) et comment sur celui-ci le paramètre p pourrait-il être estimé ?

<7 pts>

2. Dans le TP numéro 1 **TRANSFORMÉE DE FOURIER**, Donner trois endroits du TP, qui explique que l'image est implicitement toroidale (cyclique, circulaire ou repliée sur elle-même) lorsqu'on utilise la TFD pour faire un traitement.

<4 pts>

Réponse

1.(a)

Une méthode possible consisterait, pour chaque pixel, à estimer dans une petite fenêtre W (par exemple de dimension $N \times N$) et centrée sur ce pixel), la variance empirique. La variance minimale obtenue sur l'ensemble de ces estimations serait une borne supérieure et une assez bonne estimation de la variance de ce bruit.

En effet l'image comporte obligatoirement quelques zones homogènes et lorsque W se fixera sur l'une d'entre elles, la variance obtenue sur cette zone sera une assez bonne estimation de la variance du bruit.

Le seul paramètre de cette méthode est la taille de la fenêtre W (la valeur de N). Il faut que cette taille soit assez grande pour inclure assez d'échantillons pour que l'estimation de la variance soit bonne mais cette taille doit être assez petite pour que l'imagette puisse se fixer sur une zone homogène de l'image.



NOTA -1- : Avec une taille $N = 21$, on obtient, par cette méthode simple, une estimation de la variance de $\hat{\sigma}^2 \approx 17$ et l'image ci-dessous nous montre la zone homogène, de variance minimale, où l'imagette s'est fixée sur l'image.

NOTA -2- : Une autre méthode consisterait à calculer la DSP de l'image bruitée ($|Y(u, \nu)|^2$) et essayer d'estimer la constante de cette DSP aux niveaux des très hautes fréquences de cette image bruitée où il n'y aurait que du bruit (puisque on sait que le bruit additif gaussien blanc a une DSP constante égale à σ^2).

NOTA -3- : Une réponse valable aurait consisté à dire que l'on sélectionne ou estime d'abord une petite zone de région homogène (au sens des niveaux de gris) dans l'image et on calcule la variance sur celle-ci.

1.(b)

Dans notre cas spécifique de flou uniforme carré, si on calcule le module du spectre de l'image dégradée après avoir rehaussé grandement les hautes fréquences, on devrait observer nécessairement une enveloppe sinus cardinal bidimensionnel de même taille en fréquence ligne ou colonne car la TF inverse de celle-ci est une fonction carrée.

Puisque ce sinus cardinal engendre des zéros dans le domaine fréquentiel, on peut estimer le paramètre p par la méthode des zéros fréquentiels. Raisonnons en une dimension puisque le flou est uniforme en ligne et colonne.

$$h(x) = \Pi\left(\frac{x}{d_x}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin(\pi \nu d_x)}{(\pi \nu d_x)} = H(\nu) \quad (\text{à une cst de proportion près})$$

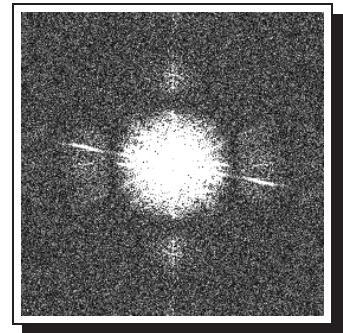
Avec le sinc qui s'annule tous les $\nu = 1/d_x$ Sachant que $H(\nu)$ est représenté pour $\nu \in [-1/2 : 1/2]$ (fréquences numériques), on en déduit immédiatement $\nu = 1/d_x = 1/5$. Si on calcule le module du spectre de notre image dégradée après avoir rehaussé grandement les hautes fréquences, c'est bien ce que l'on observe très précisément !

<7 pts>

NOTA : La méthode qui consiste à déconvoluer l'image avec une fonction de flou uniforme carré de paramètre d , variant dans un intervalle, et qui consiste à retenir le paramètre d qui aboutit à la meilleure image restaurée, n'est pas très intéressante car cette méthode est longue et surtout très supervisée !

2.

(1) le calcul du spectre de la texture (d) qui présente une discontinuité sur les trois premières ligne de l'image lorsqu'on considère que celle-ci est toroidale et qui va biaiser le calcul du spectre lorsque celui-ci



sera fait avec la TFD (ou FFT) en présentant un spectre avec de forts coefficients spectraux sur une ligne horizontale passant par l'origine.

(2) Dans la question C.(a).2. , lorsqu'on utilise la TFD pour faire une auto-convolution d'un carré dont le support a une taille plus grande que la demi-largeur de l'image.

(3) Dans la question C.(b), lorsqu'on fait la convolution de l'image avec un carré dans le domaine spectral. Si le carré n'est pas centré, l'image convoluée sera décalée cycliquement ou circulairement.

(4) Dans la question C.(b), lorsqu'on fait la convolution de l'image avec un carré de grande taille dans le domaine spectral. Au bord supérieur de l'image, on s'aperçoit que la convolution est due au moyennage des pixels situé dans les premières lignes et les dernières lignes de l'image.

<4 pts>