



DIRO  
IFT 6150

## EXAMEN THÉORIQUE

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle  
[http: //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)  
*e-mail: mignotte@iro.umontreal.ca*

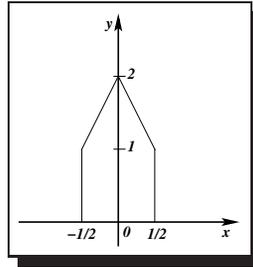
**Date:** 09/12/2021

I .....	Transformée de Fourier (40 pts)
II .....	Spectres et Filtrage (20 pts)
III .....	Filtrage (37 pts)
IV .....	Restauration (10 pts)
V .....	Misc. (14 pts)
Total .....	121 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

### I. Série de Fourier et Transformée de Fourier (40 pts)

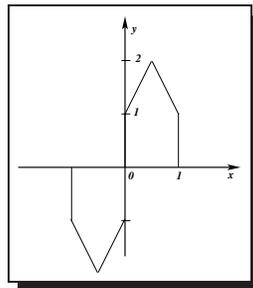
Soit  $f(x)$  le signal suivant:



et  $F(\nu)$  sa TF ou son spectre (*i.e.*;  $f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$ ).

1. Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés intéressantes de  $F(\nu)$  que l'on pourrait déduire des propriétés de  $f(x)$  et des propriétés de la TF.  
<5 pts>
2. En vous aidant du fait que  $f(x)$  peut se voir comme la somme de deux fonctions connues (quelquefois dilatées ou contractées), trouver  $F(\nu)$  (en énonçant aussi la propriété de la TF que vous utilisez pour la calculer).  
<5 pts>
3. Si on discrétisait  $f(x)$ , en prenant un échantillon tous les  $T_e = 1/40$  (en  $0, 1/40, 2/40, 3/40, \dots$ , et en  $-1/40, -2/40, -3/40, \dots$ ; qu'advierait-il du spectre de cette fonction discrétisée comparativement au spectre  $F(\nu)$  ?  
<5 pts>
4. Dans le cas de la question précédente, aurait-on de l'aliasing ? (On pourra prendre la critère vu en cours qui, je le rappelle, considère que l'on a une amplitude ou/en module des fréquences repliées inférieures à 1% du maximum du spectre, alors on n'a pas d'aliasing). Si il y a de l'aliasing alors quelle période d'échantillonnage maximale devrait-on prendre ?  
<5 pts>
5. Si on périodisait  $f(x)$ , en la dupliquant (ou périodisant) tous les  $T = 4$ , *i.e.*, en  $T = 0, 4, 8, 12, \dots$ , et en  $T = -4, -8, -12, -16, \dots$ ; qu'advierait-il du spectre de cette fonction périodisée comparativement au spectre  $F(\nu)$  ?  
<5 pts>

6. Soit la fonction  $g(x)$  suivante:



Écrire  $g(x)$  comme une fonction de  $f(x)$  modifiée. Soit  $G(\nu)$  la TF de  $g(x)$  ( $g(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} G(\nu)$ ).

Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés intéressantes de  $G(\nu)$  que l'on pourrait déduire des propriétés de  $g(x)$  et des propriétés de la TF. Dire aussi quelle serait le module de  $G(\nu)$  par rapport au module de  $F(\nu)$ . En déduire quelle serait la différence entre  $F(\nu)$  et  $G(\nu)$  que l'on pourrait déduire de tout cela. Calculez ensuite le spectre  $G(\nu)$ .

<15 pts>

---

## Réponse

1.

La fonction  $f(x)$  est réelle et paire donc sa transformée  $F(\nu)$  sera réelle pure et paire. On pourrait dire aussi que la fonction étant non périodique, son spectre sera continu. De plus, comme  $f(x)$  est une fonction avec des discontinuités, la reconstruction de cette fonction se fera avec beaucoup d'harmoniques, *i.e.*, mathématiquement on s'attend à voir une TF dont le support fréquentiel est assez grand.

<5 pts>

2.

$f(x)$  peut se voir comme la somme de la fonction porte  $\Pi(x)$  avec la fonction triangle  $\Delta(x)$  contracté d'un facteur deux (la fonction triangle s'étend entre  $-1$  et  $1$  normalement et pas entre  $-1/2$  et  $1/2$  comme dans cet exemple. Par contre la fonction triangle est bien de hauteur 1 comme dans cet exemple. Du coup, puisque la TF est linéaire,  $F(\nu)$  est la somme du spectre de la fonction porte et du spectre de la fonction triangle dilaté d'un facteur deux (propriété de linéarité de la TF).

On a puisque,  $f(ax) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$  ( $a=2$  dans notre cas):

<5 pts> 
$$f(x) = \Pi(x) + \Delta(2x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} + 2 \left( \frac{\sin(\pi\nu/2)}{\pi\nu} \right)^2$$

**NOTA :** On retrouve bien le fait que  $F(\nu)$  est continue, réelle pure et paire avec support fréquentiel assez grand.

3.

Qualitativement, si on discrétisait  $f(x)$  dans le domaine spatial en prenant un échantillon tous les  $T_e$  (période d'échantillonnage) alors le spectre  $F(\nu)$  qui en résulterait se périodiserait, dans le domaine spectral, pour toute les fréquences (spatiales)  $\nu_e$  multiples de  $1/T_e$  (à un facteur d'échelle  $T_e$  près).

Quantitativement, on aurait pour  $f(x)$  discrétisé, c'est-à-dire:  $f(x) \cdot \text{III}_{T_e}(x)$ .

$$f(x) \cdot \text{III}_{T_e}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu) * \text{III}_{1/T_e}(\nu)$$

On aurait donc, dans le domaine fréquentiel, le spectre:  $F_{f_{T_e}}(\nu) \propto \left[ \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} + 2 \left( \frac{\sin(\pi\nu/2)}{\pi\nu} \right)^2 \right] * \text{III}_{1/T_e}(\nu)$

<5 pts>

4.

As-t-on de l'aliasing ? Rappelons que  $F_{f_{T_e}}(\nu)$  est composée de deux spectres. Considérons seulement le premier spectre (le deuxième tend considérablement plus vite que le premier vers 0). Le premier spectre est un sinus cardinal dont l'amplitude des bosses (ou des lobes) de ce sinus en amplitude ou/en module sont respectivement 1 pour la fréquence  $\nu = 0$ , une amplitude de  $1/(1.5\pi)$  pour  $\nu = 1.5$ , une amplitude de  $1/(2.5\pi)$  pour  $\nu = 2.5$ , ..., une amplitude de  $1/(0.5 + k\pi)$  pour  $\nu = 0.5 + k$ , etc.

Du à la périodisation du spectre (toutes les fréquences physiques spatiales  $\nu_e = 40$ , on doit regarder ce qui se passe à la fréquence spatiales  $\nu_e/2 = 20$ . A cette fréquence, on aura le spectre du motif centré à la fréquence 0 dont la bosse ou lobe du sinus cardinal le plus proche aura une amplitude de  $1/19.5\pi$  soit une amplitude  $\approx 0.0163$  auquel s'ajoute l'amplitude des fréquences négatives soit  $\approx 2 \times 0.0163 = 0.033$  ou plus de 3% de la hauteur maximale du spectre. Selon notre critère il y aura donc de l'aliasing.

Pour qu'il n'y en ait pas, il faut avoir une amplitude des lobes à mi fréquence de moins de 0.005, soit puisque  $0.005 \approx 1/(64.5\pi)$ , après le 65-ième lobe donc pour une fréquence d'échantillonnage de  $65 \times 2 =$

130 correspondant à une période d'échantillonnage minimale de  $Te = 1/130$  (donc environ trois fois plus d'échantillons par unité d'espace considérée ici).

<5 pts>

**NOTA** : On pourrait raisonner en ne négligeant pas le deuxième terme (qui dans notre raisonnement ci-dessus tend considérablement plus vite vers 0 et est supposé négligeable). Le maximum du spectre est  $F(0) = 1 + 0.5 = 1.5$ . En  $\nu = 19.5$ , on a donc une amplitude de  $F(0) = (1/[19.5\pi] + 2 \times (1/[19.5\pi/2])^2) \approx 0.0163 + 0.00106 \approx 0.0174$  qui est supérieur de 1% du maximum 1.5. Pour ne pas avoir d'aliasing, il faut une amplitude inférieure à 0.0075 qui existera, avec ces deux termes, des  $\nu = 45$  (amplitude de  $F(45) \approx 0.00707 + 0.000200 = 0.00727 < 0.0075$ ).

**5.**

Si on périodisait  $f(x)$ , en la dupliquant ou périodisant tous les  $T = 4$ , on aurait mathématiquement:  $f_p = f(x) * \text{III}_T(x)$ .

$$f_p(x) \propto f(x) * \text{III}_T(x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} F(\nu) \cdot \text{III}_{1/T}(\nu)$$

On aurait donc, dans le domaine fréquentielle (à un facteur d'échelle près), le spectre:

$$F_{f_p}(\nu) = \underbrace{\left[ \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} + 2 \left( \frac{\sin(\pi\nu/2)}{\pi\nu} \right)^2 \right]}_{\text{motif spectral}} \cdot \underbrace{\text{III}_{1/T}(\nu)}_{\text{discrétisation}}$$

L'opérateur de discrétisation prendrait un échantillon toutes les fréquences spatiales (1/4) du spectre et on se retrouverait ainsi avec un spectre discrétisé. Ce qui est compréhensible, puisque l'on sait (depuis la série de Fourier) que si on calcule le spectre d'une fonction périodique (de période  $T$ ), on a dans le domaine fréquentiel un spectre de raies ou spectre discrétisé (ou échantillonné) toutes les fréquences  $1/T$ .

<5 pts>

**6.**

Pour construire  $g(x)$  à partir de  $f(x)$ , il suffit de prendre la fonction  $f(x)$ , la décaler (ou la translater) de 1/2 vers la droite et lui ajouter ensuite le motif de gauche que l'on peut construire à partir de la fonction  $f(x)$ , que l'on décalera vers la gauche de 1/2 puis pour lequel on multipliera l'amplitude par  $-1$ . Mathématiquement, cela correspond à:

$$g(x) = \left[ f(x) * \delta(x - (1/2)) \right] - \left[ f(x) * \delta(x + (1/2)) \right]$$

La fonction  $g(x)$  est réelle et impaire donc sa transformée de Fourier  $G(\nu)$  sera imaginaire pure et impaire en plus d'être continue (puisque  $g(x)$  n'est pas périodique) et avec un assez grand support fréquentiel (à cause des discontinuités de  $g(x)$ ).

Le module de  $G(\nu)$  sera le même que celui de  $F(\nu)$  à un facteur d'échelle deux près. En effet rappelez vous que le module est la généralisation de la valeur absolue pour une fonction et que le motif de gauche et de droite sont tous les deux identiques à  $f(x)$ .

Du coup,  $G(\nu)$  a le même module que  $F(\nu)$  mais  $G(\nu)$  aura un spectre imaginaire pure et impaire (d'amplitude ou module deux fois plus important de celui de  $F(\nu)$  mais avec même support fréquentiel). Mathématiquement:

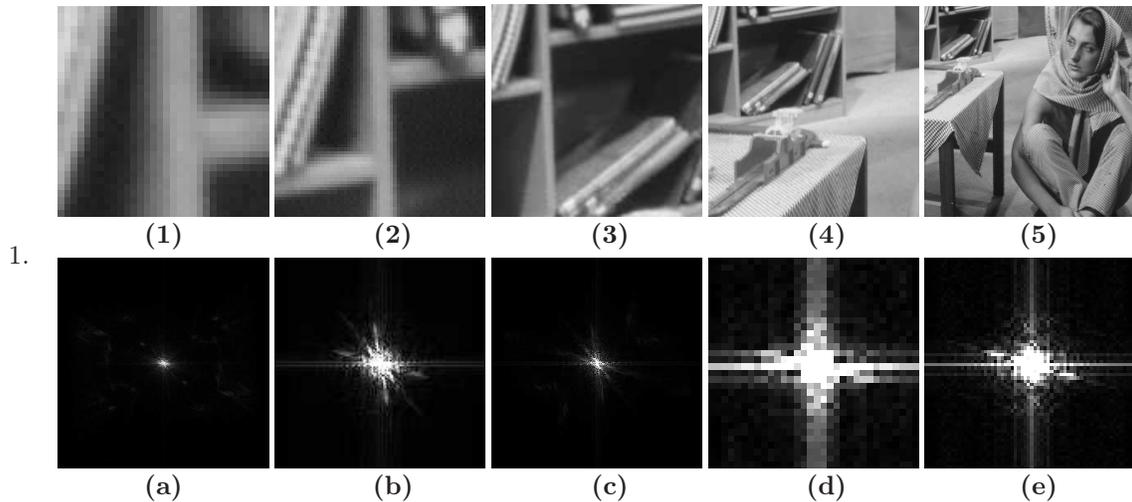
$$\begin{aligned} g(x) &= \left[ f(x) * \delta(x - (1/2)) \right] - \left[ f(x) * \delta(x + (1/2)) \right] \\ &= f(x) * \left[ \delta(x - (1/2)) - \delta(x + (1/2)) \right] \\ &\stackrel{\mathcal{F}}{=} F(\nu) \cdot \left[ \exp(-\pi j \nu) - \exp(-\pi j \nu) \right] = -2j F(\nu) \cdot \sin(\pi\nu) \end{aligned}$$

<15 pts>

NOTA : On retrouve bien le fait que  $G(\nu)$  a le même module (même forme à un facteur d'échelle deux près) que  $F(\nu)$  et que l'on a un spectre  $G(\nu)$  imaginaire pure et impaire.

---

## II. Spectres et Filtrage (20 pts)



Les images (1) à (5) de la Figure ci-dessus représentent le module du spectre de Fourier (calculé par la FFT puis recentré au centre de l'image et après avoir rehaussé **légèrement** les hautes fréquences comme en TP) des différentes imageries (1) à (5) prises sur l'image BARBARA de taille  $512 \times 512$  (à partir du bord supérieur gauche et avec une taille chaque fois deux fois plus grande).

Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.

<20 pts>

---

### Réponse

1.

On pourrait facilement, tout de suite, classer [1 - d] et [2 - e] car on voit que ses images ont le même nombre de pixels que leur transformée respective. Si on a de bons yeux, puisqu'il y a le même nombre de pixels entre le signal et sa TFD on a aussi immédiatement [3 - b], [4 - c] et [5 - 1]. Mais même sans cela on peut arriver au bon classement.

Le plus simple est de procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident:

- [1 - d] :

Belle transition verticale dans le domaine spatial créant une belle discontinuité horizontale dans le domaine spectral. Plusieurs transitions horizontales (tiroir et du fait de la périodisation implicite de l'image en colonne) d'angle légèrement différent créent une discontinuité verticale assez floue dans le domaine spectral. La seule possibilité est l'association [1-e] car en plus ses deux images ont le même nombre de pixels.

- [2 - e] :

Pixel deux fois plus nombreux et plus gros que précédemment dans les deux images. Une transition assez

marquée dans la direction 7h05 dans le domaine spatial crée une discontinuité dans le sens inverse dans le domaine spectral.

- [3 - b] :

Trois types de transition diagonale d'angles différents (livres) créent trois types de discontinuité dans le sens inverse dans le domaine spectral.

- [4 - c] :

Une transition diagonale due à la table crée une discontinuité dans le sens inverse dans le domaine spectral.

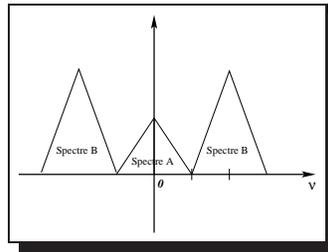
- [5 - a] :

L'image possède plein de textures différentes et toute cette information est résumée avec le pouvoir compressif du calcul de la TF par une tache au centre de l'image sans direction de transition réellement dominante.

<20 pts>

### III. Filtrage (37 pts)

#### 1. Filtrage Spatial



- (a) Soit deux images (que l'on va considérer mathématiquement en une dimension pour plus de facilité)  $a(x)$  et  $b(x)$  qui ont respectivement le spectre  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  ( $a(x) \Leftrightarrow A(\nu)$  et  $b(x) \Leftrightarrow B(\nu)$ ). Quelle est l'opération dans le domaine spatial qui permettrait d'avoir une image pour laquelle son spectre serait le spectre de l'image  $a(x)$  ( $A(\nu)$ ) avec le spectre de l'image  $b(x)$   $B(\nu)$  à côté comme dans la Figure ci-dessus (où  $A(\nu)$  est symbolisé par une fonction triangle de support fréquentiel  $\nu_0 = 0.3$  (fréquence numérique) et  $B(\nu)$  est symbolisé aussi par une fonction triangle (de même support fréquentiel mais un peu plus haute).

<12 pts>

- (b) Prouver qu'une image  $i_i$  que l'on convolue avec un filtre  $g$  gaussien  $1/4 [1 :: 2 :: 1]$  puis Laplacien  $l, [-1 :: 2 :: -1]$  donne une image  $i_o$  dont la moyenne des niveaux de gris est nulle.

<5 pts>

- (c) Soit le filtre suivant donnant l'image  $Y$  et appliquée sur une image  $X$ :

$$Y_{i,j} = \text{mediane}(\text{voisinage}(X_{i,j}), w_c @ X_{i,j})$$

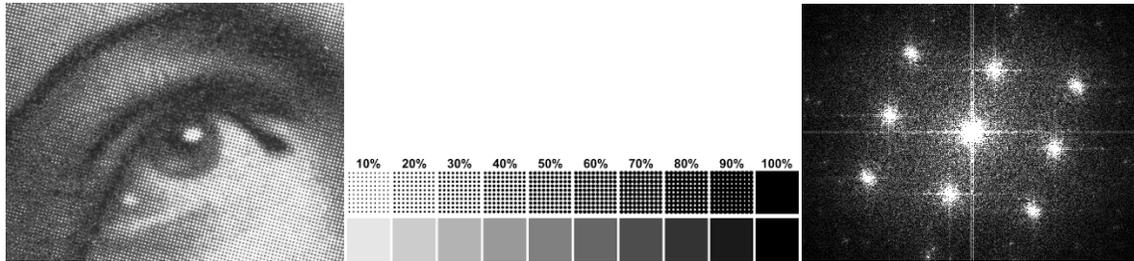
où voisinage ( $X_{i,j}$ ) représente un voisinage du pixel aux coordonnées (ligne,colonne)=( $i, j$ ) et où l'opérateur @ signifie que l'on ajoute à ce voisinage,  $w_c$  copies de  $X_{i,j}$ . Commenter ce filtre et décrire ses avantages et inconvénients sur des images entachées de bruit Gaussien ou poivre et sel et indiquer ce que devient ce filtre lorsque  $w_c$  varie dans l'intervalle  $[0, \dots, \text{taille du voisinage}]$ .

<5 pts>

#### 2. Filtrage Fréquentiel

Voici une image en demi-ton, utile lorsqu'on a seulement à sa disposition un appareil d'impression

capable d'imprimer qu'en mode tout ou rien. Malgré cette limitation, ces dispositifs sont capables de reproduire des images comportant des nuances de gris. La méthode utilisée consiste à produire l'illusion de niveaux de gris, alors qu'on imprime côte à côte des points noirs et blancs. L'illusion de niveaux de gris est obtenue par des éléments de trame regroupant un nombre fixe de points imprimables noirs ou blancs. Le pourcentage de points imprimables noirs dans un élément de trame donne son niveau d'intensité moyen. Voici une image en demi-ton (à gauche) et son spectre (à droite).



- (a) Discuter de l'effet d'un filtre médian pour améliorer la résolution de cette image ou d'un filtre Gaussien.  
<5 pts>
- (b) Expliquer de la façon la plus claire et la plus convaincante à quoi ressemble le spectre d'une image créée en demi-ton par rapport au spectre de la même image qui est en niveaux de gris. En déduire une façon de restaurer cette image en demi-ton (pour quelle ressemble le plus possible à une image sans demi-ton, *i.e.*, en niveaux de gris).  
<10 pts>

### Réponse

#### 1.(a)

On aimerait décaler le spectre  $B(\nu)$  d'une fréquence numérique  $\nu_0 = 0.3$  vers la droite (fréquences positives) et lui ajouter le spectre  $B(\nu)$  décalé vers la gauche d'une fréquence numérique  $\nu_0 = 0.3$  (fréquences négatives). L'opérateur de décalage qui nous permet de faire cela est l'opérateur de convolution par un dirac décalé. Plus formellement, on aimerait faire mathématiquement, l'opération suivante dans le domaine spectral:

$$B(\nu) * \delta(\nu - \nu_0) + B(\nu) * \delta(\nu + \nu_0)$$

qui dans le domaine spatial nous donne:  $\stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} b(x) \cdot 2 \cos(2\pi\nu_0 x)$  avec  $\nu_0 = 0.3$

Une fois réalisé cette opération dans le domaine spatial (*i.e.*,  $b(x) \cdot 2 \cos(2\pi\nu_0 x)$ ), il suffit de se rappeler que la TF est linéaire (la TF d'une somme de deux signaux a pour spectre la somme des deux spectres de ces signaux) pour finalement ajouter à cette image filtrée spatialement l'image  $a(x)$  (dont le spectre est  $A(\nu)$ ) pour obtenir une image dont le spectre présente côte à côte le spectre désiré (cf. Figure).

<12 pts>

**NOTA** : J'ai remplacé ici la fréquence numérique que j'avais donné dans l'énoncé par  $\nu_0 = 0.3$ . En effet, avec  $\nu_0 = 0.4$  et le schéma de la Fig. 1, on avait un spectre qui s'étendait sur une étendue spectrale entre les fréquences numériques  $-0.6$  et  $+0.6$ , ce qui n'était pas possible. Avec  $\nu_0 = 0.3$ , le spectre de la Fig. de la question I.(1) s'étend correctement (physiquement parlant) entre les fréquences numériques  $-0.45$  et  $+0.45$  (inférieur en valeur absolue à  $0.5$  comme il se doit).

#### 1.(b)

On pourrait dire très rapidement que comme la somme des coefficients du filtre Gaussien est 1, ce filtrage ne changera pas la moyenne de l'image mais comme la somme des coefficients du filtre Laplacien est nulle, l'image filtrée par ce deuxième filtre aura ensuite forcément une moyenne des niveaux de gris nulle.

Plus formellement, on peut le montrer aussi de la façon suivante: sans perte de généralité, on raisonne en une dimension, et le filtrage spatial ou fréquentiel nous permet d'écrire:

$$i_o(x) = i_i(x) * g(x) * l(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \quad I_o(\nu) = I_i(\nu).G(\nu).L(\nu)$$

Sachant que la valeur moyenne (ou quelquefois la somme totale des niveaux de gris de l'image [cela dépend du facteur de normalisation utilisé dans la TF]) du signal (image)  $i_o$ ,  $i_i$ ,  $g$  et  $l$  sont respectivement  $I_o(\nu=0)$ ,  $I_i(\nu=0)$ ,  $G(\nu=0)$  et  $F(\nu=0)$  et  $L(\nu=0)$ . Si  $L(\nu=0) = 0$  et  $L(\nu=0) = 1$  alors  $I_o(\nu=0) = 0$ . Donc, la moyenne [ou quelquefois la somme totale des niveaux de gris] de l'image filtrée par le filtre Laplacien est nulle.

<5 pts>

NOTA : On pourrait aussi le démontrer en calculant  $g(x) * l(x)$  soit  $h(k) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  et puisque  $H(\nu=0) = \sum_k h(k) \cdot \exp(-2\pi j(\nu=0)k) = \sum_k h(k) = 0$ , la moyenne de l'image sera de zéro.

**1.(c)**

Ce filtre fait un compromis entre le filtre médian standard et le filtre identité ou *rien du tout*. Plus précisément, il permet en fait de réaliser un filtre qui, pondéré par  $w_c$ , permet lorsque  $w_c = 1$  de faire un filtre median standard et pour  $w_c =$  taille du voisinage (en nombre de pixels) de ne rien faire du tout sur l'image et de réaliser un compromis entre ces deux opérations pour différentes valeurs de  $w_c$  comprise entre [1, ..., taille du voisinage]. Pour  $w_c = 0$ , on obtient un filtre médian pour lequel la valeur centrale n'est pas considérée.

On sait que le filtre médian permet la suppression du bruit impulsionnel, mais efface les détails fins et arrondit les angles. En utilisant par exemple  $w_c = 0.5 \times$  taille du voisinage, on aura un effet de filtrage du bruit poivre et sel deux fois moins grand mais aussi une atténuation des détails fins deux fois moins grande. C'est en fait la version *soft* du filtre médian. Si  $w_c$  est égale à la taille de la fenêtre, on obtient le filtre identité. Conclusion: plus le poids  $w_c$  est important, plus le filtre préserve les détails, mais réduit moins le bruit impulsionnel.

Ce filtre n'a donc aucune utilité pour du bruit Gaussien car le bruit Gaussien ne crée pas de valeurs marginales aberrantes comme le filtre médian mais une continuité de dégradations additives de niveaux de gris comprises entre  $-3\sigma$  et  $3\sigma$  pour chaque pixel.

<5 pts>

NOTA : Ce filtre s'appelle CWM (Center Weight Median).

**2.(a)**

Le filtre médian ne peut pas restaurer une image en demi-ton, au contraire il accentuera l'effet de binarisation.

Le filtre Gaussien sera un peu meilleur que le filtre median grace à son effet de moyennage local (qui est en fait, plus ou moins, l'opération inverse simplifiée du processus de rendu demi-ton) mais cette opération fera disparaître aussi les détails de l'image et introduira un peu trop de flou; Il permettra d'atténuer les répliquations du spectre (au delà du motif spectral centré à l'origine) et donc de retrouver un peu le spectre de l'image en niveaux de gris.

<5 pts>

**2.(b)**

En fait si on regarde de près ce que fait le rendu demi-ton (ou halftoning en anglais); il consiste à alterner des points blancs ou des points noirs dans l'image avec une proportion qui est en rapport avec le niveau de gris local de l'image. Cette opération ressemble un peu à une sorte de discrétisation de l'image avec deux niveaux de gris possibles (blanc ou noir seulement) et/ou mathématiquement à une multiplication de l'image avec un peigne de Dirac dans lequel les dents du peigne (*i.e.*, les diracs) seraient plus ou moins espacés et pour lesquels les diracs prendraient une valeur blanche de l'image et l'absence de Dirac prendrait une valeur noire de l'image. On peut aussi voir l'image en demi-ton comme un échantillonnage de l'image représentée par deux niveaux de gris (ou comme un échantillonnage *adaptatif spatialement* de l'image et contraint par deux niveaux de gris).

Or on sait que la discrétisation dans le domaine spatial est équivalente à une périodisation du spectre dans le domaine fréquentiel. Cette discrétisation un peu spéciale qui créera le de rendu demi-ton va créer cette périodisation du motif spectral de base (celui centré sur la fréquence 0 en différents endroits hautes fréquences (et du fait que ce n'est pas une vraie discrétisation, cela va périodiser ce spectre en différents endroits *en le modifiant un petit peu et en le pondérant différemment* à ces différents endroits).

Cette précédente hypothèse (le spectre de l'image réelle est la tache centrale) est compatible avec le fait que toute image a la propriété d'être à bande spectrale limitée avec un spectre concentré dans les basses et moyennes fréquences et décroissant.

Du coup, une fois que l'on a compris cela, il est facile de trouver un traitement dans le domaine spectral qui permette de restaurer cette image en demi-ton; il suffit de faire disparaître, avec une succession de filtres coupe-bandes bien placées, les différentes duplications du motif spectral de base (tout en préservant le plus possible les hautes fréquences de l'image qui sont des détails de l'image (entre les taches représentant les spectres dupliqués) et qui nous permettront de ne pas avoir une image trop floue comme cela aurait été le cas si on avait utilisé un simple filtre Gaussien (qui aurait atténué aussi les hautes fréquences entre les taches représentant les spectres dupliqués).

<10 pts>

**NOTA** : Un exemple de restauration avec une série de filtres coupe-bandes bien placées.



---

#### IV. Restoration (10 pts)

1. Rappeler la formule mathématique qui permet de rehausser les contours d'une image  $f(x)$  (on utilisera ici une seule dimension pour faciliter la suite de ce problème) avec la propriété de recréer les bandes de Mach. Trouver ensuite mathématiquement à quoi correspond la PSF (Point Spread Function) de ce rehausseur de contour permettant de simuler ou recréer les bandes de Mach.

<5 pts>

2. Soit  $f(x, y)$  une image naturelle en niveaux de gris dégradée par du bruit. On ne sait pas si ce bruit est de nature Gaussienne ou impulsif. Trouvez et expliquez qualitativement une méthode qui vous permettrait d'estimer efficacement si on se trouve plutôt en présence de bruit impulsif ou de bruit Gaussien.

<5 pts>

### Réponse

1.

Raisonnons en une dimension, sans perte de généralité, avec l'image  $f(x)$  et son spectre  $F(\nu)$ . Le rehaussement des contours de l'image avec la propriété de recréer les bandes de Mach s'écrit:

$$f(x) - kf''(x) = f(x) * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k \cdot f(x) * \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = f(x) * \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{PSF}}$$

Mais aussi:

$$f(x) - kf''(x) = f(x) * \underbrace{[\delta(x) - k\delta''(x)]}_{\text{PSF}}$$

Mais on peut bien sur aussi projeter le tout dans le domaine fréquentiel !

$$\begin{aligned} f(x) - kf''(x) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} F(\nu) - k(2\pi j\nu)^2 F(\nu) = F(\nu) \cdot (1 + 4k\pi^2\nu^2) \\ f(x) * \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(1 + 4k\pi^2\nu^2)}_{\text{PSF}} &\stackrel{\mathcal{F}}{=} F(\nu) \cdot (1 + 4k\pi^2\nu^2) \end{aligned}$$

<5 pts>

NOTA :

- Le premier est donc le modèle numérique ou discrétisé de cette PSF.
- Dans  $\text{PSF} = (\delta(x) - k\delta''(x))$ , on a ici l'exemple d'une PSF qui n'a pas de forme analytique dans le domaine des fonctions, seulement une représentation analytique dans le domaine des distributions et que l'on peut tout de même utiliser mathématiquement dans un modèle mathématique.
- Dans  $\text{PSF} = \mathcal{F}^{-1}(1 + 4k\pi^2\nu^2)$ , on a une forme qui pourrait être calculé numériquement et qui pourrait donner un masque de convolution plus précis que celui numériquement donné en [-1-] ou tout au moins des valeurs continues de cette PSF si cela était nécessaire dans pour un modèle mathématique non discret.

2.

• Il faut se rappeler que le bruit impulsif est caractérisé par des petits pixels (ou petit agrégats de pixels) qui sont soit très proches du noir (pas nécessairement complètement noir mais très proche du noir et associés aux capteurs CCD ou pixels morts) ou très proches du blanc (pas nécessairement complètement blanc mais très proche du blanc et associés aux capteurs CCD ou pixels en saturation).

-1- Puisque le filtre moyenneur atténue beaucoup le bruit Gaussien et peu le bruit impulsif, une possibilité serait de calculer la moyenne de l'erreur de l'image différence entre l'image originale bruitée et sa version moyennée par un filtre moyenneur. Cette erreur serait plus élevée dans le cas du bruit impulsif.

-2- Si on fait un histogramme de l'image, on s'apercevra de deux pics désignant une proportion importante de pixels très proche du noir et très proche du blanc. Après avoir isolé ces deux pics (admettons qu'ils correspondent à une variation de niveaux de gris dans l'intervalle  $[0, \dots, 20] \cup [240, \dots, 255]$  et que ces

pixels avec ces niveaux de gris se retrouvent assez uniformément dans l'image alors on se trouve avec un bruit impulsif. Pour montrer que ces pixels très blancs ou très noirs sont dispersés assez uniformément dans l'image on pourrait trouver la distance moyenne séparant un pixel très blancs ou très noirs avec son voisins non connexe le plus proche et une fois ce calcul fait, vérifier qu'aucun des pixels très blancs ou très noirs ne soit séparé de son voisin le plus proche de trois ou quatre fois cette distance moyenne.

–3– On peut essayer aussi de reconnaître le bruit impulsif par le fait qu'il va créer des plus forts gradients dans l'image bruitée que va faire le bruit Gaussien et pour des agrégats poivre et sel (P&S) supérieurs à 1 pixel. Il y aura aussi des gradients nuls bref une variances des gradients très élevée dans le cas d'une image altérée par du bruit P&S.

–4– On peut aussi reconnaître le bruit impulsif par le fait qu'il va créer des plus forts gradients dans l'image bruitée que ne va faire le bruit Gaussien et pour des agrégats supérieurs a un, il va y avoir aussi des gradients nuls, bref une variance des gradients très élevée dans le cas d'une image altérée par du bruit P&S.

–5– On calcule la variance sur chaque petite fenêtre (de taille par exemple 8x8 pixels) de l'image bruitée. La plus faible de ces variances sera calculée sur une zone homogène de l'image et celle-ci sera beaucoup plus élevée dans le cas du bruit impulsif que dans le cas du bruit gaussien.

<5 pts>

---

#### V. Misc. (14 pts)

1. Soit une image en niveaux de gris au format PGM (i.e., avec 256 niveaux de gris codé sur 8 bits). Lors de la transmission de cette image, un système numérique défectueux a forcé à zéro les 4 bits les moins significatifs de tous les octets codant les niveaux de gris de cette image.
  - (a) Nommer le type de bruit (vu en cours) que l'on aura sur cette image après la transmission et expliquer le type de dégradation (ou d'artefacts ou de bruit) qui existera sur cette image. Expliquer entre autres si ce bruit est corrélé, additif ou multiplicatif, et quelle est sa moyenne et sa variance en niveaux de gris, sa ddp, etc.  
<7 pts>
  - (b) Quel type de traitement spatial (non adaptatif [i.e., le même sur toute l'image]) permettrait de restaurer un peu cette image transmise. Quel type de traitement adaptatif pourrait-on utiliser pour rendre ce traitement plus intelligent ?  
<7 pts>

---

#### Réponse

1.(a)

L'image transmise est quantifiée sur seulement 16 niveaux de gris différents \*équiréparti entre 0 et 240), elle est sous quantifiée. Le bruit créé par cette dégradation est un **bruit de quantification** qui est **additif** et **corrélé** créant sur l'image transmise des **effets d'escaliers** (ou **crénelage**) et engendrant des **faux contours** (le passage normalement progressif dans l'image originale du niveau de gris 0 au niveau de gris 128 se traduira dans l'image transmise par une transition en escalier du niveau de gris 0 au niveau de gris 16 puis du niveaux de gris 32 puis au niveaux de gris 48 ... par pas de 16 jusqu'au niveaux de gris 240.

De plus, ce bruit créant des faux contours, sera amplifié par le système visuel humain (SVH) et donc assez difficile à restorer.

On peut voir ce bruit de quantification comme un bruit **additif**. Sa moyenne est facile à calculer pour un niveau de gris codé sur 8 bits dont on a mis à zéro les quatre derniers bits. Par exemple dans

l'image transmise, le niveaux de gris 0100 xxxx ou 64 a dans l'image originale les valeurs de niveaux de gris équiprobable comprise entre 0100 0000 *i.e.*, 64 et 0100 1111 *i.e.*, 79. Donc un bruit additif de **moyenne**  $\text{moy} = (64 - 79)/2 = -7.5$  (abaissant donc la luminosité de l'image). Pour le calcul de sa **variance**  $\sigma^2$ , il faut reprendre la formule vu en cours; C'est un bruit additif qui peut prendre, équiprobablement, toutes les valeurs de niveaux de gris possible entre  $-15$  et  $0$  ou entre  $(-q + 1)$  et  $0$  (pas de quantification  $q = 16$ ) et une probabilité de  $1/16$  ou  $1/q$  et donc de variance  $q^2/12 \approx 21.3$  (comme toute erreur de quantification) que l'on peut facilement vérifier:

$$\sigma^2 \approx \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{q} \left(i + \frac{(q-1)}{2}\right)^2$$

Avec  $q = 16$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=0}^{-15} \frac{1}{16} (i + 7.5)^2 = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} (i + 7.5)^2 = \frac{2}{16} (56.25 + 42.25 + 30.25 + 20.25 + 12.25 + 6.25 + 2.25 + 0.25) \\ &= \frac{170}{8} = 21.25 \approx 4.6^2 \end{aligned}$$

En résumé; Il s'agit d'un **bruit de quantification, additif et corrélé** (donc **non blanc**) créant sur l'image des **effets d'escaliers** (ou **crénelage**) et engendrant des **faux contours** (ou **blocky artefacts**) dû au fait que l'image est **codée sur seulement 16 niveaux de gris** (équirépartis entre  $[0 : 240]$ ) et qui sera particulièrement **amplifié par le SVH** (sensible à ce type d'artefacts). Ce bruit de quantification est **additif, de ddp uniforme, de moyenne**  $\text{moy} = -7.5$  et de **variance**  $\sigma^2 = q^2/12 \approx 21.3$  et de **pas de quantification**  $q = 16$ .

<7 pts>

**1.(b)**

Puisque ce bruit a une moyenne de  $\text{moy} = -7.5$ , on pourrait déjà ajouter 7 ou 8 a tous les niveaux de gris de cette image pour recalculer sa luminosité sur sa valeur originale.

Un filtrage linéaire par convolution avec un masque Gaussien symétrique (par exemple) permettrait de réduire ces artefacts en carré. Par contre ce traitement introduirait un flou sur les *vrais contours* de cette image (imaginons un contour naturel dans l'image originale représentée par une progression brutale et raisonnable de 16 niveaux de gris de l'image).

Afin de rendre *adaptatif* ce traitement de filtrage linéaire, on pourrait donc le faire (i) seulement dans les zones où les variations de niveaux de gris sont supérieures à 16 par exemple ou (ii) seulement sur les bords ou contours des régions (*i.e.*, sur les bord des composantes connexes à niveau de gris constant ou presque constant) dont les gradients sont supérieurs à 16.

On pourrait finalement le faire aussi localement autour des contours assez long qui ont des gradients sont supérieurs à 16 et qui localement (dans la fenêtre de voisinage carrée considérée) délimitent deux régions de niveaux de gris constant ou presque constant ou de variance très faibles.

<7 pts>