



DIRO  
IFT 6150

## EXAMEN THÉORIQUE

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle  
[http: //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)  
*e-mail: mignotte@iro.umontreal.ca*

**Date:** 15/12/2022

I .....	Série de Fourier, Convolution & Transformée de Fourier (28 pts)
II .....	Spectres et Filtrage (10 pts)
III .....	Opérations Ponctuelles (23 pts)
IV .....	Restauration (14 pts)
V .....	Misc. (36 pts)
Total .....	111 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

---

## I. Série de Fourier, Convolution et Transformée de Fourier (28 pts)

### 1. SÉRIE DE FOURIER

- (a) Lorsque les scientifiques avaient pour modèle (*imparfait*) de représentation fréquentielle; la série de Fourier, à quelles fréquences d'échantillonnage ce modèle (*imparfait*) prédisait le problème de l'aliasing sur un signal  $f(x)$ ? Justifier votre réponse.

< 5 pts >

### 2. CONVOLUTION

- (a) À quoi est égal  $\delta(x) * \delta(x) = ?$  et plus généralement:  $\delta(x) * \underbrace{\delta(x) * \delta(x) \dots * \delta(x)}_{n \text{ fois}} = ?$

< 5 pts >

- (b) Vers quel type de fonction tendrait le produit de convolution d'un grand nombre de fonctions différentes à support non réduit à un point (comme la distribution de Dirac). Pensez à ce que nous avons dit en cours d'une part 1] sur ce qui a été dit en cours sur la densité de probabilité résultante de la somme de deux variables aléatoires et d'autre part 2] sur le théorème limite central.

< 5 pts >

### 3. TRANSFORMÉE DE FOURIER

Soit  $f(x)$ , une fonction (ou un signal spatial) et  $F(\nu)$  sa TF ou son spectre, *i.e.*;  $f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$  ou  $\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu)$ .

- (a) Montrer (en utilisant une des propriétés de la TF) que:

$$\mathcal{F}[x] = \frac{\delta(\nu)}{2\pi j \nu}$$

< 5 pts >

- (b) Dans les tables de Transformée de Fourier, on trouve facilement:

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}(x)] = \frac{1}{2} \delta(\nu) + \frac{1}{2\pi j \nu}$$

où  $\mathcal{H}(x)$  est la fonction d'Heaviside que l'on peut définir tout simplement en disant que  $H(x) = 1$  si  $x > 0$  et 0 ailleurs.

Exprimer  $f(x) = |x|$  en fonction de  $x$  et de  $H(x)$  et, en utilisant la propriété  $f(-x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F^*(\nu)$ , trouver ensuite la TF de la fonction  $f(x) = |x|$ .

< 8 pts >

---

## Réponse

**1.(a)**

Dans un modèle (*imparfait*) de représentation fréquentielle de la série de Fourier, la notion de fréquences négatives du spectre n'existent pas. Le motif spectral, qui se périodise tous les  $n \times f_e$  ( $n$  entiers et  $f_e$  étant la fréquence d'échantillonnage), [à cause du fait de la discrétisation du signal  $f(x)$ ], ou tous les  $n/T_e$  ( $T_e$  étant la période d'échantillonnage) n'a pas non plus de fréquences négatives. Dans ce cas, le repliement spectral, entre par exemple le motif spectral de base (celui commençant à la fréquence 0 et le motif spectral de droite (celui commençant à la fréquence  $f_e$ ) ne commence à se replier seulement lorsque  $f_e = \nu_o$ , où  $\nu_o$  représente la fréquence maximale contenue dans le signal  $f(x)$ .

Grâce au modèle de la série de Fourier complexe ou de la TF, on sait que cet aliasing est un phénomène qui commence à se produire réellement lorsque la fréquence d'échantillonnage est plus petite que  $f_e = 2\nu_o$ .

< 5 pts >

**2.(a)**

$$\delta(x) * \underbrace{\delta(x) * \delta(x) \dots * \delta(x)}_{n \text{ fois}} \stackrel{\mathcal{F}}{=} \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \dots \cdot 1}_{n \text{ fois}} = 1$$
$$= \delta(x)$$

<5 pts>

**2.(b)**

On a appris en cours que:

1-] La densité de probabilité, résultante de la variable aléatoire définie comme étant la somme de deux variables aléatoires de densité de probabilité (DDP) respective  $ddp1$  et  $ddp2$  a pour DDP;  $ddpS$ .  
La convolution de  $ddp1$  avec  $ddp2$ , *i.e.*, on a donc mathématiquement:  $ddpS = ddp1 * ddp2$ .

2-] Le théorème limite central dit que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires, possiblement avec des DDP différentes tend inexorablement vers une DDP de forme Gaussienne.

En combinant ces deux propriétés, le produit de convolution d'un grand nombre de fonctions différentes (à support non réduit à un point [comme la distribution de Dirac]) tendra inexorablement vers une fonction/distribution Gaussienne.

<5 pts>

**NOTA** : Suivant le même raisonnement, si on fait la moyenne d'un grand nombre ( $N$ ) d'images différentes, l'image résultante aura pour histogramme normalisé une forme ou distribution Gaussienne (plus précisément; elle sera d'autant plus Gaussienne que  $N$  sera grand).

**3.(a)**

En utilisant la propriété  $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu \cdot F(\nu)$  et le fait que si  $f(x) = x$ , on a  $f'(x) = 1$ . Il s'en suit donc que:

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi j\nu \cdot F(\nu) = 2\pi j\nu \cdot \mathcal{F}[x] = \delta(\nu)$$

<5 pts>

$$\mathcal{F}[x] = \frac{\delta(\nu)}{2\pi j\nu}$$

**3.(b)**

Donc:

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}(-x)] = \frac{1}{2} \delta(\nu) - \frac{1}{2\pi j\nu}$$

et:

$$|x| = xH(x) - xH(-x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \left\{ \frac{-j\delta(\nu)}{2\pi\nu} * \left( \frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{1}{2\pi j\nu} \right) \right\} + \left\{ \frac{j\delta(\nu)}{2\pi\nu} * \left( \frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{1}{2\pi j\nu} \right) \right\}$$
$$= \left[ \frac{-j\delta(\nu)}{4\pi\nu} - \frac{1}{4\pi^2\nu^2} \right] + \left[ \frac{j\delta(\nu)}{4\pi\nu} - \frac{1}{4\pi^2\nu^2} \right]$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu^2}$$

<8 pts>

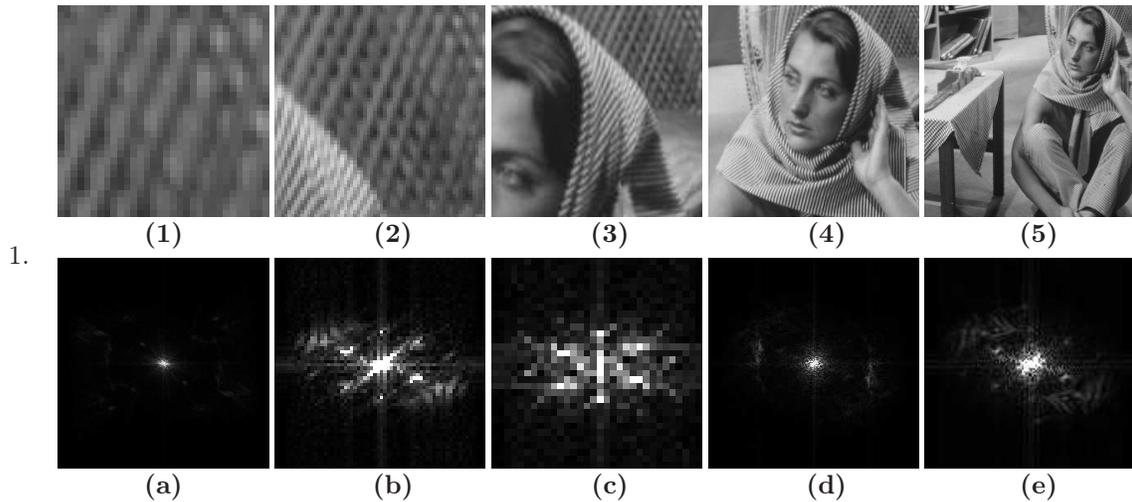
Doc:  $|x| \stackrel{\mathcal{F}}{=} -\frac{1}{2\pi^2\nu^2}$

**NOTA -1-** : Dans le final de 2017, on utilisait ce même raisonnement mais en partant cette fois-ci de la deuxième forme possible pour  $\mathcal{F}[x]$ , à savoir  $\mathcal{F}[x] = -\delta'(\nu)/(2\pi j)$ . Dans les deux cas, on arrive à démontrer identiquement, facilement, et sans trop de calcul, que  $\mathcal{F}[|x|] = -\frac{1}{2\pi^2\nu^2}$ .

**NOTA -2-** : Puisque la fonction  $f(x) = |x|$  est paire et présente une discontinuité, on s'attendait bien à une transformée qui soit réelle pure avec un grand support fréquentiel.

---

## II. Spectres et Filtrage (10 pts)



1. Les images (1) à (5) de la Figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier (calculé par la FFT puis recentré au centre de l'image et après avoir rehaussé **légèrement** les hautes fréquences comme en TP) des différentes imageries (1) à (5) prises sur l'image BARBARA de taille  $512 \times 512$  (à partir du bord supérieur gauche et avec une taille chaque fois deux fois plus grande).

Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier qualitativement chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image et dans son spectre associé. Vous pouvez aussi raisonner par élimination.

<10 pts>

---

### Réponse

1.

On pourrait facilement, tout de suite, classer [1 – c] et [2 – b] car on voit que ses images ont le même nombre de pixels que leur transformée respective. Si on a de bons yeux, puisqu'il y a le même nombre de pixels entre le signal et sa TFD on a aussi immédiatement [3 – e], [4 – d] et [5 – a]. Mais même sans cela on peut arriver au bon classement.

Le plus simple est de procéder par élimination en allant du plus évident au moins évident:

- [2 – b] :

Transition diagonale droite et gauche dans le domaine spatial créant une belle discontinuité diagonale gauche et droite dans le domaine spectral. Discontinuité horizontale (foulard et du fait de la périodisation implicite de l'image en ligne) créant une discontinuité verticale dans le domaine spectral.

- [1 – c] :

Vu la pixélisation (et taille des pixels), il n'y a aucun doute. Transition diagonale droite et gauche dans le domaine spatial créant une belle discontinuité diagonale gauche et droite dans le domaine spectral.

- [5 – a] :

L'image possède plein de textures différentes et toute cette information est résumée (avec le pouvoir compressif du calcul de la TF) par une tache au centre de l'image.

- [4 – d] :

Zones uniformes de l'image résumées, avec le pouvoir compressif du calcul de la TF, par une tache au centre

de l'image et les textures moyennes et hautes fréquences du foulard dans les deux points de part et d'autre de cette tache.

- [3 - e] :

Même chose que précédemment mais les textures moyennes et hautes fréquences du foulard dans les deux points de part et d'autre de cette tache sont plus près de la fréquence zéro, indiquant quelle sont proportionnellement plus grosses.

<10 pts>

### III. Opération Ponctuelle (23 pts)

1. Soit une image de départ en 256 niveaux de gris  $X$  (dans laquelle  $X(i, j)$  correspond au niveau du gris du pixel de coordonné ligne=  $i$  et colonne=  $j$ ). On réalise l'opération ponctuelle suivante (en C):

$$X(i, j) = (\text{int})\left( (X(i, j)/\text{NB}) + 0.5 \right) * \text{NB}$$

dans laquelle NB est un nombre entier positif inférieur à 255. On vous demande, en tant qu'expert en traitement d'images d'expliquer avec le plus de détails intéressants possibles ce que fait algorithmiquement cette procédure (pour cela imaginer que vous fassiez du *retro-engineering* de logiciels pour une compagnie [ou essayer de comprendre ce qu'a fait algorithmiquement un ancien employé qui n'est plus dans l'entreprise] et que votre chef de projet, qui n'est pas un expert en traitement d'images comme vous, vous demande d'expliquer concrètement ce que fait cette ligne de code en matière de traitement d'images.

<8 pts>

2. Soit une image de départ  $X$ , que l'on désire filtrer avec l'opération ponctuelle décrite par la suite des opérations suivantes:
  - (a) On calcule tout d'abord l'histogramme normalisé de l'image (avec 256 bins correspondant aux 256 niveaux de gris (ou de luminance) de l'image [et du fait que l'histogramme est normalisé, l'intégration de cet histogramme somme à un]).

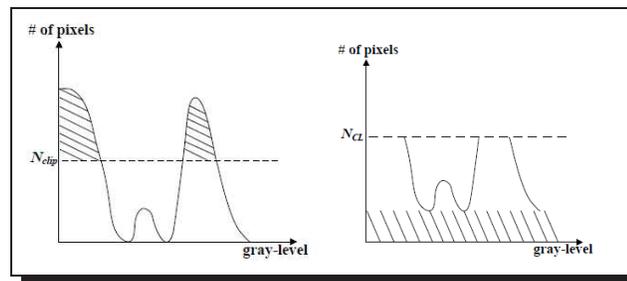


Fig. Histogramme de l'image initiale  $X$  (à gauche) et histogramme de l'image finale (à droite) transformée par une procédure de spécification d'histogramme (les deux aires hachurées [à droite] et [à gauche] sont identiques).

- (b) On se donne un paramètre  $\alpha$  ( $> 0$  et pour donner un exemple  $\alpha \in ]0.0 \ 5.0]$ ) et on calcule la proportion des pixels (à partir de cet histogramme) qui ont une occurrence (*i.e.*, une proportion dans l'image) qui est supérieur à  $N_{\text{clip}} = \alpha/256$ .
- (c) Cette proportion correspond à l'aire hachurée dans la première Figure de gauche. Cette proportion est ramenée sur le support de l'histogramme (cf. Figure de droite) avec donc une certaine hauteur.
- (d) L'image initiale  $X$  est ensuite transformée de telle façon qu'elle ait le même histogramme que celui de la figure de droite (avec une procédure de *spécification d'histogramme*).

Discuter des avantages/inconvénients/intérêts de ce que va faire cette opération ponctuelle pour les différentes valeurs de  $\alpha$  possibles et les différentes applications de pre- ou post-traitement de cette opération ponctuelle et de ces propriétés par rapport à une image dégradée par des défauts d'illumination, et/ou du bruit et/ou du flou, etc...

<15 pts>

---

## Réponse

1.

Remarquons tout d'abord que pour  $NB = 1$ , le traitement ne fait rien; c'est l'opérateur identité. Lorsque  $NB$  est grand (comme par ex.  $NB = 356$ ), l'opération transforme l'image en une seule et unique zone homogène ou classe de niveaux de gris.

Essayons maintenant avec  $NB = 10$ . Dans ce cas, les niveaux de gris de l'image  $X$  compris entre  $[0 \ 5]$  seront convertis en niveaux de gris 0, les niveaux de gris compris entre  $[6 \ 15]$  convertis en 10,  $[16 \ 25] \rightarrow 20$ ,  $[26 \ 35] \rightarrow 30, \dots$ ,  $[246 \ 255] \rightarrow 250$ . En termes de traicteur d'image, cette opération ponctuelle, pour  $NB = 10$ , va re-quantifier l'image en 26 [ou numériquement  $(int)(255/NB) + 1.5$ ] niveaux de gris différents ( $0 - 10 - 20 - 30 - \dots - 250$ ) *i.e.*, en 26 classes de niveaux de gris. Cette re-quantification en 26 classes différentes de niveaux de gris peut être vue comme une segmentation (simple) non supervisée de l'image  $X$  en 26 classes.

[-1-] Plus généralement, cette opération ponctuelle permettra de re-quantifier l'image en niveaux de gris ou de segmenter cette image (avec une re-quantification simple indépendante de l'image) une image en  $(int)(255/NB) + 1.5$  classes de niveaux de gris. Dans le cours, cette opération est la même, mais appliquée ici pour une image en niveaux de gris, de la re-quantification couleur indépendante de l'image avec un certain nombre de bins de couleurs (ici correspondant aux différentes classes de niveaux de gris). Cette opération (comme toute segmentation) permet de simplifier (la complexité d') une image et est utile pour un traitement (de plus haut-niveau) subséquent.

[-2-] On peut voir aussi cette opération comme une simplification de l'image ou comme une compression de l'image (ou decomplexification ou une sorte de réduction de dimensionalité de la palette des niveaux de gris utilisée pour représenter cette image) dans laquelle celle-ci est imagée/représentée par seulement  $(int)(255/NB) + 1.5$  niveaux de gris différents. Par exemple, pour  $NB = 40$ , L'image est représenté par une palette de 8 niveaux de gris seulement (codable sur 3 au lieu de 8 bits).

[-3-] On peut voir aussi cette opération ponctuelle comme une transformation linéaire par escaliers avec autant d'escaliers que de classes de niveaux de gris créées par cette procédure, *i.e.*,  $nbe = (int)(255/NB) + 1.5$  marches d'escalier entre 0 et 255 (avec une largeur de chaque marche d'escalier de  $255/nbe$ ). Avec ce modèle, on comprend bien qu'il y a, après ce traitement, une perte d'information, une compression de la palette de niveaux de gris utilisés et *in fine*, une segmentation/re-quantification de l'image originale initiale.

[-4-] En plus de la procédure considérée de (-1-) re-quantification de l'image ou de segmentation de l'image ou (-2-) de simplification ou compression (ou decomplexification de l'image ou réduction de dimensionalité de sa palette des niveaux de gris [l'entropie de cette nouvelle image est réduite mais pas vraiment sa variance]) ou (-3-) transformation linéaire par escaliers, cette opération ponctuelle fera augmenter la moyenne de l'image de  $NB/2$ , et on perdra d'autant plus de détails que  $NB$  est petit, #em *i.e.* que la compression par re-quantification est forte. Si on faisait l'histogramme de cette image, on se retrouverait avec  $(int)(255/NB) + 1.5$  pics de Dirac échantillonnant l'histogramme original de l'image décalé de  $NB/2$  vers la droite avec une légère sur-saturation des niveaux de gris lorsque  $NB$  et les valeurs de niveaux de gris sont très grand.

<8 pts>

**NOTA -1-** : Cette approche est utile, par exemple et entre autre, dans l'analyse et la modélisation d'une texture *via* les matrice de co-occurrences (cf. chapitre TEXTURES ET COULEUR de ce cours) où l'on devait faire préalablement une re-quantification en 4 classes (ou niveaux de gris).

**NOTA -2-** : Une de ces trois (1-2-3) explications permettait d'avoir la totalité des points de cette question. Plusieurs de ces explications permettaient d'obtenir en plus des points BONUS.

**2.**

Remarquons tout d'abord que lorsque  $\alpha \in ]0.0 \ B_s]$  est une grande valeur (*i.e.*,  $N_{\text{clip}}$  au-dessus de l'histogramme), cette opération ponctuelle ne fait rien. Par contre lorsque  $\alpha=0$ , cette opération ponctuelle revient à faire une simple égalisation d'histogramme de l'image initiale  $X$ . Donc, pour différentes valeurs positives de  $\alpha$  entre 0.0 et  $B_s$ , on fera une opération à mi-chemin entre rien du tout et une égalisation d'histogramme et/ou cette opération va donc plus ou moins aplanir l'histogramme d'une image.

On sait quelles sont les propriétés (avantages/défauts) de l'égalisation d'histogramme. Celle-ci va augmenter le contraste en utilisant d'une part toute la gamme des différents niveaux de gris possibles de l'image mais en plus, elle va le faire en redistribuant les niveaux de gris de l'image afin que ceux-ci aient une même proportion (de pixels) dans tous les gammes de variation des intensités possibles (sombre, moyen-sombre, moyen-claire, claire, etc.).

Cela va augmenter le contraste de l'image et nous permettre de voir les détails de l'image, mais cela va, en contrepartie, perdre certains détails de l'image (perdre de l'information). En effet l'histogramme perdra sa forme et pour obtenir un histogramme le plus plat possible, il est souvent possible que cette opération rassemble deux, voire même plusieurs niveaux de gris différents consécutifs pour finalement constituer un même niveau de gris (ou *bin*) final pour l'image résultante. De plus, l'image aura perdu son aspect *naturel* et elle apparaîtra comme si elle était *synthétique* (ou *non naturelle*).

Pour une valeur bien choisie de  $\alpha$ , cette opération ponctuelle essaie de prendre tous les avantages sans les inconvénients d'une simple égalisation d'histogramme. Remarquons que cette opération va conserver tout de même la forme initiale de l'histogramme et perdre ainsi moins d'information que la simple égalisation d'histogramme tout en utilisant toute la gamme possible des différents niveaux de gris de l'image avec une proportion à mi-chemin entre une valeur identique et la forme initiale de l'histogramme.

Cette opération (pre- ou post-traitement) peut être intéressante pour toutes les applications où on fait (ou doit faire) une égalisation ou spécification d'histogramme et que l'on veut une opération moins brutale que celle donnée par celle-ci (*i.e.*, une égalisation ou spécification d'histogramme). Elle est donc intéressante pour des images avec des problèmes d'illumination (trop sombre ou trop claire ou moitié trop sombre ou trop claire), redonne du contraste pour des images peu contrastées ou entachées de buées ou de brume et/ou de brouillard.

Cette opération ponctuelle, comme toute opération ponctuelle ne pourra filtrer le bruit Gaussien ou impulsif et ne pourra enlever le flou créé par une PSF mais (par contre) en atténuera les effets en augmentant le contraste de l'image. De plus, cette procédure n'est pas vraiment adaptée pour les images synthétiques ou originales qui possèdent une palette très réduite de niveaux de gris; Elle fera apparaître sur l'image transformée des dégradés de niveaux de gris qui seront de la fausse information.

<15 pts>

**NOTA** : Cette approche est une des opérations de l'algorithme appelé *Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization* (ou *CLAHE*) et issu de l'article intitulé *Fog removal from color images using Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization* de Z. Xu, X. Liu et N. Ji, 2009, publié dans *International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering* et accessible dans la sous-rubrique ARTICLES de la rubrique APPLIED PROJECT de la page Web de mon cours IFT6150.

---

#### IV. Restauration (14 pts)

1. Montrer mathématiquement que, dans le cas de l'algorithme de restauration de Landweber, si l'image n'est pas entachée de bruit, alors l'image estimée par cet algorithme à convergence (*i.e.*, après un nombre suffisant d'itérations),  $\hat{f}(x, y)$  est parfaitement déflouée, on retrouve l'image parfaite, sans

floue, si et seulement si le flou de dégradation n'a pas de zéros dans le domaine fréquentiel.

Pour cela, exprimez la relation itérative de Landweber dans le domaine spectral et aidez-vous du fait qu'à la convergence, *i.e.*, pour un nombre suffisant d'itérations  $k$ ;  $f_{k+1} = f_k$  et que  $f(-x) \hat{=} F^*(\nu)$  avec  $*$  le complexe conjugué.

<10 pts>

2. Montrer que dans l'algorithme de Tikonov-Miller, le terme d'énergie *a priori*  $\|c(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2$  revient à calculer la variance de la dérivée seconde de l'image estimée  $\hat{f}(x, y)$ .

<4 pts>

### Réponse

1.

$$\begin{aligned}\hat{f}_{k+1}(x, y) &= \hat{f}_k(x, y) + \alpha h(-x, -y) * (g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}_k(x, y)) \\ &\stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \\ \hat{F}_{k+1}(u, \nu) &= \hat{F}_k(u, \nu) + \alpha H^*(u, \nu) \cdot (G(u, \nu) - H(u, \nu) \cdot \hat{F}_k(u, \nu))\end{aligned}$$

À la convergence, *i.e.* après un nombre suffisant d'itérations  $k$ , on a  $\hat{f}_{k+1}(x, y) = \hat{f}_k(x, y)$ , donc:  $\hat{F}_{k+1}(u, \nu) = \hat{F}_k(u, \nu)$  et donc, on a:

$$\begin{aligned}H^*(u, \nu) \cdot (G(u, \nu) - H(u, \nu) \cdot \hat{F}_k(u, \nu)) &= 0 \\ G(u, \nu) - H(u, \nu) \cdot \hat{F}_k(u, \nu) &= 0 \\ \hat{F}_k(u, \nu) &= G(u, \nu) / H(u, \nu)\end{aligned}$$

En conclusion, si on a une image seulement floue; *i.e.*,  $g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} G(u, \nu) = F(u, \nu) \cdot H(u, \nu)$  alors, l'algorithme de Landweber permet de retrouver l'image non floue parfaite  $f(x, y)$  si et seulement si le flou de dégradation n'a pas de zéros dans le domaine fréquentiel. Dans le cas où la fonction de flou a des zéros dans le domaine fréquentiel, quelques composantes hautes fréquences de l'image, situées sur les zéros de la TF de la PSF, seront inexorablement détruites.

<10 pts>

2.

Qualitativement, puisque  $c(x, y) * \hat{f}(x, y)$  calcule en fait la dérivée seconde de l'image  $f(x, y)$  et puisque  $c(x, y) * \hat{f}(x, y)$  permet d'obtenir une image filtrée (par  $c(x, y)$ ) dont la moyenne des niveaux de gris est nulle (ce qui est le cas de tous les filtres passe-hauts [car la somme des coefs de ce masque de convolution est nulle]) alors le calcul de la somme au carré, sur tous les pixels, de la dérivée seconde de cette image  $f(x, y)$  représente en fait sa variance.

<4 pts>

### V. Misc. (36 pts)

1. Soit une image recueillie par le dispositif du miroir électronique d'une voiture. On désirerait faire un traitement sur cette image pour avoir/donner plus de détails au conducteur. Quels traitements pourriez-vous recommander ? Discuter d'au moins deux ou trois traitements en précisant leurs avantages et inconvénients.



<7 pts>

2. On aimerait faire un algorithme qui permette de **détecter** dans des images recueillies par le dispositif du miroir électronique que l'on a du brouillard/brume/buée.  
Quels traitements pourriez-vous recommander ? Discuter d'au moins deux ou trois traitements en précisant leurs avantages et inconvénients.



<4 pts>

3. Dans le TP 4 ▷ *“Reconstruction tomographique”* il existe un (ou deux) détail(s) algorithmique(s) (*i.e.*, un endroit dans le programme) qui montre qu'algorithmiquement, l'utilisation de l'outil discret de la TF (Transformée de Fourier) a pour effet de périodiser implicitement l'image originale. Préciser quel(s) est(sont) ces détails algorithmiques ?

<4 pts>

4. Dans le TP3 ▷ *“Restauration et débruitage”*, rappeler quel type de dégradation appliquée sur l'image originale permettrait de retrouver l'image restaurée parfaite à partir de l'algorithme de Landweber ?

<4 pts>

5. Si on considère dans le TP 4 ▷ *“Reconstruction tomographique”* que l'image est toroïdale et non plus avec des bords à zéro. Précisez les différentes étapes de l'algorithme de reconstruction où ce modèle de gestion des bords de l'image originale va modifier l'algorithme. Précisez aussi pourquoi ce modèle est plus adéquat dans le cadre de la reconstruction tomographique ?

<4 pts>

6. Voici une image du film *“28 days later”* dans laquelle on voit la voiture des acteurs de ce film rouler toute seule sur une autoroute anglaise totalement déserte. Il faut savoir que les autoroutes anglaises sont continuellement achalandées et que pour ce film, on a pas bloqué cette portion d'autoroute pour les besoins du film. Indiquer comment les réalisateurs de ce film s'y sont pris pour réaliser cette séquence d'images.

<4 pts>



7. On aimerait créer un petit logiciel de traitement d'images, qui déclencherait l'alarme d'une petite caméra de vidéosurveillance (située, par exemple, dans un des couloirs d'un métro ou d'un centre commercial, etc.) et dont le but serait de détecter une situation du style attentat, agression, etc. On a remarqué que dans ce style de problème, les gens se mettaient à courir pour fuir la scène (captée par la caméra). Indiquer qu'elle serait une technique simple qui pourrait se calculer en temps réel et qui permettrait d'indiquer qu'il y a des mouvements de fuite indiquant la présence d'éventuels problèmes.  
<5 pts>
8. Un étudiant a voulu implémenter l'algorithme ICM (2 classes) du dernier TP et obtient les résultats suivants; la fonction d'énergie diminue bien et l'ICM converge mais la segmentation obtenue à la fin des itérations de l'ICM, pour  $\alpha = 2.0$  est mauvaise. Lorsque l'étudiant fixe  $\alpha = 0.0$ , l'ICM converge au bout d'une itération et obtient la segmentation au sens du MV. Lorsqu'il fixe  $\alpha = 5.0$ , l'image segmentée obtenue est toute noire. Préciser, en le justifiant théoriquement d'où peut venir probablement le problème ?  
<4 pts>

---

### Réponse

1.

–1– Pour avoir plus de détails, on pourrait faire une **égalisation d'histogramme**. Cela serait l'opération la plus simple pour enlever ce défaut d'illumination mais cela ferait perdre à l'image son aspect naturel en lui donnant un aspect *synthétique* et certains détails de l'image seraient perdus par cette opération en plus des inconvénients cités dans l'exercice III.2.

–2– On pourrait faire l'**opération ponctuelle de l'exercice III.2**. Cela permettrait de faire une opération qui aurait les avantages de l'égalisation d'histogramme sans ces inconvénients. Il faudrait cependant faire une technique d'estimation pour estimer le paramètre  $\alpha$  pour que cette opération soit adaptative.

–3– On pourrait aussi faire une **transformation linéaire par morceau** avec une pente importante permettant de rehausser les parties et/ou valeurs de niveaux de gris sombres de l'image.

–4– Finalement, on pourrait faire un **filtrage homomorphique**. Dans cette image, il n'y a qu'un problème de défaut d'illumination. L'image n'a aucun autre problème et ce traitement serait idéal pour ce cas de figure.

**NOTA** : Un filtrage homomorphique avec toutes les précautions numériques indiquées en cours donnerait cette image, une fois traitée:



<8 pts>

2.

Par rapport à une image normale, la variance des niveaux de gris ou contraste est plus faible. La variance de la magnitude du gradient est aussi plus faible. De plus, la force (ou la magnitude/amplitude/module) du gradient moyen dans une image entachée de buée/brouillard/brume est moins forte. Tout cela peut être estimé et une décision peut être prise.

Cependant, c'est le cas d'une image avec peu de luminosité (fin de journée, début de la nuit) ou très nuageuse. Pour éviter de confondre avec ce type d'image, il faudrait calculer la luminosité moyenne et la magnitude moyenne/variance des gradients et variance des niveaux de gris. Dans le cas où cette luminosité est assez grande et l'amplitude moyenne et variance des gradients est assez basse, la variance des niveaux de gris est assez faible, on aurait une détection d'image embuée ou dégradée par de la brume ou du brouillard.

<4 pts>

3.

Dans le TP utilisant la rétroprojection filtrée, il existe un détail qui montre qu'algorithmiquement, l'utilisation de la TFD a pour effet de périodiser implicitement l'image originale: ▷ Lorsqu'on fait le sinogramme et que celui-ci est construit à partir de l'image non périodique, cela crée dans l'image reconstruite par l'algorithme, un artefact en forme de cercle autour de l'image et qui vient des niveaux de gris nuls que l'on met implicitement en dehors du cadre de l'image lorsque celle-ci n'est pas considérée comme toroidale ou périodique en ligne et colonne.

Dans le TP utilisant le théorème de la tranche centrale de Fourier, il existe le détail précédent mais aussi un autre détail montrant aussi qu'algorithmiquement, l'utilisation de la TFD a pour effet de périodiser implicitement l'image originale: ▷ Lorsqu'on fait le sinogramme et que celui-ci est construit en tournant l'image originale à partir du centre de l'image (par facilité) et non pas à partir de son centre informatique, l'image qui apparaît après interpolation du spectre par TFD inverse est décalé selon les quatre cadrans.

<4 pts>

4.

Pas de bruit et seulement du flou, dont la fonction de flou, **n'induit pas de zéro dans le domaine fréquentiel** (qui détruisent inexorablement certaines composantes fréquentielles de l'image).

<4 pts>

5.

Pour le TP utilisant la rétroprojection filtrée ou celui utilisant le théorème de la tranche centrale de Fourier, cela va modifier le sinogramme (l'image qui va tourner sera l'image périodique en ligne et colonne) et pour l'interpolation bilinéaire utilisée pour rotationner cette image. Dans les 2 TPs, ce modèle d'image **est indispensable car on utilise, par la suite, la TFD qui considère implicitement cette hypothèse**. Cela a d'ailleurs pour effet d'enlever l'artefact en cercle qui existe lorsqu'on considère des bords nuls.

<4 pts>

**6.**

Par exemple, on pourrait faire un tracking de la voiture par corrélation (possiblement dans le domaine spectral pour minimiser le nombre d'opérations) avec mise à jour du masque de corrélation (pour rendre le tracking plus robuste) pour chaque itération, avec une image croppée (pour mieux contraindre le problème mal posé de tracking) et potentiellement utilisant une prédiction de trajectoire [style *interpolation* ou *filtrage de Kalman*] (pour encore mieux contraindre le problème) et un médian temporel sur un grand nombre d'images de l'autoroute [éventuellement recalé en niveaux de gris par une procédure de spécification d'histogramme] pour tous les autres pixels de cette image pour éliminer toutes les autres voitures mobiles. Le masque de corrélation de la voiture peut être initialement donné par une différence temporelle avec une image de cette autoroute filtrée temporellement par un filtre médian ou de façon supervisée par une segmentation binaire Markovienne *mobile-immobile* comme celle vue en cours.

<5 pts>

**7.**

Calculer la distribution du module du gradient temporel et comparer cette distribution avec la distribution du module du gradient généralement obtenu lorsqu'on est dans une situation de normalité. On pourrait calculer le module du gradient temporel moyen dans cette image et estimer si celui-ci est au-delà de 3 sigmas d'écart-type d'une distribution du module du gradient moyenne que l'on a habituellement. en situation de normalité (obtenu ou estimé à partir d'une petite base d'apprentissage ou fixé ad-hoc par essai-erreur a priori).

<5 pts>

**8.**

Le fait que l'énergie diminue bien le long des itérations de l'ICM montre que l'optimiseur ICM, qui est en fait une simple descente du gradient (à pas fixe et direction alternée), optimise bien une fonction d'énergie. Le fait que la segmentation obtenue à la fin de sa convergence est mauvaise montre, par contre que le modèle n'est pas le bon, *i.e.*, que l'ICM minimise une mauvaise fonction d'énergie (*i.e.* pas la bonne fonction d'énergie). Cette fonction d'énergie, rappelons-le, comporte deux termes; le terme *d'attache aux données* et le terme *à priori*, pondéré par le paramètre  $\alpha$ .

Le fait que l'ICM converge vers une segmentation au sens du MV correcte en une itération lorsqu'on fixe  $\alpha = 0$  montre que le terme d'énergie d'attache aux données est bon (et que donc les paramètres du terme d'attache aux données ou du mélange de distribution sont correctes).

Il ne reste donc plus que le terme d'énergie a priori qui a, sans doute, été mal programmé. Cela expliquerait le fait que lorsqu'on fixe  $\alpha = 5.0$ , l'image devient toute noire alors qu'elle devrait présenter une segmentation 2 classes avec des régions homogènes.

<4 pts>