



DIRO  
IFT 6150

## EXAMEN THÉORIQUE

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle  
[http: //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)  
*e-mail: mignotte@iro.umontreal.ca*

**Date:** 13/12/2023

I .....	Série de Fourier & Transformée de Fourier (30 pts)
II .....	Opérations Ponctuelles (33 pts)
III .....	Spectres et Filtrage (45 pts)
IV .....	Questions relatives aux TPs (15 pts)
Total .....	123 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

---

## I. Série de Fourier & Transformée de Fourier (30 pts)

### 1. SÉRIE DE FOURIER

- (a) En cours on a vu, sans toutefois le démontrer mathématiquement, que la Transformée de Fourier (TF) d'un peigne de Dirac, dans le domaine spatial, avec des Diracs espacés de  $T = 1$  (*i.e.*;  $\text{III}_T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nT)$ ), était un peigne de Dirac, dans le domaine fréquentiel, avec des Diracs espacées de  $T=1$ :

$$\text{III}_{T=1}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \text{III}_{\frac{1}{T}=1}(\nu) \quad (1)$$

Comment aurait-on pu prévoir qualitativement ce résultat ? *i.e.*, identifier toutes les propriétés de la TF qui auraient pu justifier qualitativement cette relation.

<5 pts>

- (b) On va maintenant démontrer l'Éq. (1).  
Pour cela, on va utiliser la Série de Fourier Complexe (SFC) pour le démontrer. Dire tout d'abord pourquoi il est intéressant ou nécessaire d'utiliser la série de Fourier complexe plutôt que la Série de Fourier (SF) ou la TF pour démontrer la relation (1) ?

<5 pts>

- (c) Soit donc la SFC (série de Fourier complexe) (cf. Chap. Transf. Fourier, slide #8 du cours):

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp(-j 2\pi n \frac{x}{T}) dx \quad \text{avec } T; \text{ période du signal et } n \in \mathbb{Z}$$

Appliquer la SFC sur le peigne de Diracs:  $\text{III}_T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nT)$  (À cette fin remarquer que l'on intègre seulement sur  $-T/2$  et  $T/2$  et utiliser ensuite la propriété de la multiplication d'un Dirac avec une fonction ( $\delta(x) \cdot f(x) = ?$ )).

<8 pts>

- (d) Par curiosité maintenant, on va utiliser la série de Fourier pour calculer qu'elle est le spectre d'un peigne de Dirac. On sait qu'elle est la restriction de ce modèle (de série de Fourier) (cf. Question b.) mais on verra si le résultat est cohérent avec ce que l'on sait.

Utiliser donc la série de Fourier pour calculer le spectre du peigne du Dirac et comment aurait-on pu prévoir le résultat obtenu avec ce que l'on sait de la SF versus la SFC ?

<6 pts>

### 2. TRANSFORMÉE DE FOURIER

Soit  $f(x)$ , une fonction (ou un signal spatial) et  $F(\nu)$  sa TF ou son spectre, *i.e.*;  $f(x) \rightleftharpoons F(\nu)$  où  $\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu)$ .

- (a) Dans les tables de Transformée de Fourier (TF), on trouve facilement:  $\mathcal{F}[\frac{1}{x}] = -j \pi \text{sgn}(\nu)$  où  $\text{sgn}(x)$  est la fonction signe ( $\text{sgn}(x) = x/|x|$ , *i.e.*, égale à 1 pour tout  $x > 0$ , et  $-1$  pour tout  $x < 0$ , et égal à 0 pour  $x = 0$ ).

Trouver à quoi est égale la dérivée de la fonction  $\ln|x|$  en vous aidant de la TF et de ses propriétés (notamment la propriété de la TF de la dérivée d'une fonction).

<6 pts>

---

## Réponse

### 1.(a)

- Déjà on sait que comme  $\text{III}_{T=1}(x)$  est réelle est paire, son spectre doit être réel et paire. De plus comme il existe beaucoup de discontinuités dans  $\text{III}_{T=1}(x)$ , son spectre doit avoir un support fréquentiel

très grand. De plus on sait que nécessairement tout ce qui est périodique dans un domaine est discrétisé dans l'autre; *i.e.*, périodique  $\iff$  discret et inversement. Donc puisque  $\text{III}_{T=1}(x)$  est périodique et discret (en fait c'est comme si on avait pris des échantillons régulièrement espacés de la fonction  $f(x) = 1_{(x)}$ ), son spectre est aussi forcément périodique et discret.

- De plus, on peut encore s'assurer que cette transformée est bonne en remarquant qu'on a bien la propriété de contraction-dilatation de la TF qui est bien validé dans les deux sens ( $T \rightarrow \infty$  et  $T \rightarrow 0$ ):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{III}_T(x) = \delta(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \lim_{T \rightarrow \infty} \text{III}_{1/T}(\nu) = 1_{(\nu)} \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow 0} \text{III}_T(x) = 1_{(x)} \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \lim_{T \rightarrow 0} \text{III}_{1/T}(\nu) = \delta(\nu)$$

- Aussi, puisqu'on a établi que le signal est identique dans les deux espaces, alors la propriété (très importante) de conservation de l'énergie de la TF dans les deux espaces est aussi ici bien vérifiée.

► Toutes ces propriétés combinés, on n'est pas étonné de retrouver la relation:  $\text{III}_{T=1}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \text{III}_{T=1}(\nu)$   
**<5 pts>**

**1.(b)**

La SF (série de Fourier) est un modèle trop simple qui ne prend pas en compte les fréquences négatives. Or dans cette relation qui établit que la TF d'un peigne de Diracs dans l'espace des  $x$  est un peigne de Diracs dans l'espace des fréquences  $\nu$ , on voit très bien la présence de fréquences négatives.

La TF est un modèle mathématique qui ne s'applique que pour les signaux à énergie finie (lesquels n'ont pas de TF au sens des fonctions); ce qui n'est pas le cas du peigne de Diracs.

L'avantage de la Série de Fourier Complexe (SFC) est qu'elle peut traiter des signaux périodique (ce qui est bien le cas du peigne de Diracs) qui ont une énergie par période finie (que l'on appelle puissance moyenne).

**<5 pts>**

**NOTA :** On pourrait dire aussi que la Série de Fourier Complexe est appropriée pour calculer la représentation fréquentielle du peigne de Diracs car on sait qu'un Dirac décalé à pour TF une exponentielle complexe comme le noyau de la Série de Fourier Complexe ou dire que la TF d'une distribution ne peut réellement se calculer qu'avec une Transformée utilisant un noyau complexe ...

**1.(c)**

Tout est indiqué ! On a donc (cf. cours) un spectre de raies (caractéristique des signaux périodiques de période  $T$ ) espacées de  $\frac{n}{T}$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ) et d'amplitude  $D_n$  pour la nième raie, avec:

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nT) \exp(-j 2\pi n \frac{x}{T})}_{f(x)} dx$$

On remarque que sur  $-T/2$  et  $T/2$ , il n'existe que le Dirac central du peigne de Dirac (celui pour lequel  $n = 0$ ); les autres n'interviennent pas et donc, on peut supprimer la somme  $\sum$  et/ou prendre  $n = 0$ . On utilise ensuite la propriété de la multiplication d'un Dirac avec une fonction  $\delta(x) \exp(-j 2\pi n \frac{x}{T}) = \delta(x) \exp(-j 2\pi n \frac{0}{T}) = \delta(x)$ :

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(x) \exp(-j 2\pi n \frac{0}{T}) dx = \frac{1}{T}$$

On utilise plus haut simplement le fait que que  $\exp(0) = 1$  et que l'intégrale d'un Dirac est égale à un. On a donc un spectre de raies espacées de  $\frac{n}{T}$  (caractéristique des signaux périodiques) (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ) dont toutes les raies sont amplitudes  $D_n = 1$ . Bref; on obtient un peigne de Diracs et;

**<8 pts>** 
$$\text{III}_{T=1}(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \text{III}_{\frac{1}{T}=1}(\nu) \tag{2}$$

**1.(d)**

On va donc trouver (cf. cours) un spectre de raies (caractéristique des signaux périodiques de période  $T$ ) espacées de  $\frac{n}{T}$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ) et d'amplitude  $D_n$  pour la nième raie, mais seulement avec des fréquences positives ! (qui est en fait la différence entre la SF et la SFC). Donc, le peigne de Diracs se décompose en une valeur moyenne et une série de fonction cosinus et sinus (qui sont des multiples de la fréquence du fondamentale). Comme le peigne de Dirac est paire, on devra se soucier seulement des coefficient  $A_n$  (ceux qui pondèrent les fonction cosinus qui sont aussi paires incluant  $A_0$  qui est la valeur moyenne du signal).

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nT) dx = \frac{2}{T} \quad \text{et:} \quad A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nT) \cos(2\pi \frac{n}{T} x) dx = \frac{2}{T}$$

en utilisant aussi les mêmes remarques que la question précédente. On s'aperçoit que l'on trouve dans ce cas; un spectre de raies espacées de  $\frac{n}{T}$  (caractéristique des signaux périodiques, avec  $n \in \mathbb{Z}^+$  cette fois ci) dont toutes les raies sont d'amplitudes  $D_n = 2$ . Ce qui est tout à fait normal puisqu'on à ici seulement des raies spectrales de fréquence positive. Lorsqu'on arrive à visualiser les raies spectrales de fréquences négatives (avec le modèle de SF), la propriété de conservation de l'énergie fait en sorte qu'une raie spectrale d'amplitude 2 à la fréquence positive  $\nu (> 0)$  distribue son énergie avec la raie spectrale de même fréquence mais avec  $\nu (< 0)$  créant ainsi deux raies spectrales d'amplitude 1.

&lt;5 pts&gt;

**3.(a)**

En utilisant la propriété:  $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu \cdot F(\nu)$  et le fait que:  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ , on trouve facilement:

$$\mathcal{F}[(\ln |x|)'] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = 2\pi j\nu \cdot \mathcal{F}[\ln |x|]$$

$$\text{donc:} \quad \mathcal{F}[\ln |x|] = \frac{-\text{sgn}(\nu)}{2\nu} = -\frac{1}{2|\nu|}$$

&lt;6 pts&gt;

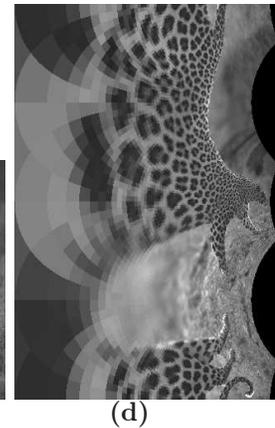
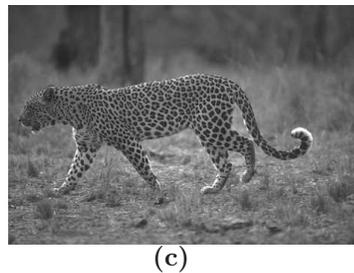
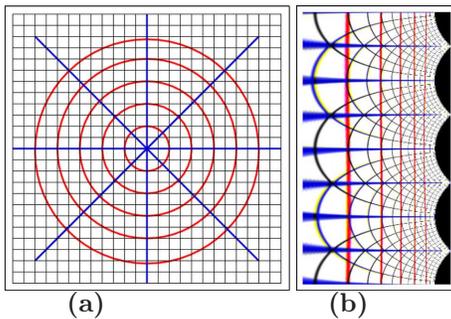
NOTA -1- : On pourrait trouver de façon équivalente, après une simplification différente que :

$$\mathcal{F}[\ln |x|] = \frac{\text{sgn}(-\nu)}{2\nu}$$

NOTA -2- : On vérifie que comme la fonction  $f(x) = \ln |x|$  est paire, sa TF est bien réelle pure et paire.

**II. Opération Ponctuelle (33 pts)**

## 1. INTERPOLATION



- (a) A partir d'une image de départ en 256 niveaux de gris de longueur/largeur (lgth, wdth) (cf. Fig. (a) & (c)). Donner l'algorithme en langage C qui permet de la transposer en une image où la scène de cette image est représentée en coordonnées log-polaire par interpolation (cf. Image (b) & (d)) (au plus proche voisin).

Dans la transformation log-polaire demandée, tout point de la scène dans le plan image ((a) & (c)) en coordonnées donc cartésiennes peut être exprimé en coordonnées LOG-POLAIRE ((b) & (d)) par  $\log(\rho), \theta$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$  par rapport au centre de l'image ( $\log(\rho)$  représente le logarithme népérien de la distance Euclidienne d'un pixel par rapport au centre de l'image).

Dans cet exemple, la transformée log-polaire est centrée au centre de l'image (l'axe  $\log(\rho)$  est horizontal et prend toute la largeur de l'image et l'axe  $\theta$  est verticale et prend toute la longueur de l'image).

Dans l'exemple [(a),(b)], nous pouvons remarquer que les cercles concentriques et les lignes de rayon dans le plan cartésien (à gauche) sont mappés respectivement par des lignes verticales et horizontales dans le plan log-polaire.

<17 pts>

- (b) Une fois implémentée et vérifiée que l'implémentation précédente est juste et code bien le résultat désiré, que doit-on ajouter ou modifier dans ce code pour que le résultat soit meilleur ? (inspirer vous de ce que vous avez fait en TP lorsque vous implémentiez un algorithme d'interpolation).

<4 pts>

## 2. INTERPRÉTATION D'ALGORITHME

Soit  $I(i, j)$  une image de départ en 256 niveaux de gris  $X$  assez lisse (ou que l'on a un peu flouté avec un filtre Gaussien) (dans laquelle  $I(i, j)$  correspond au niveau du gris du pixel de coordonnées ligne=  $i$  et colonne=  $j$ ). On réalise l'opération ponctuelle suivante (en C) qui permet de trouver l'image  $O(i, j)$ :

$$O(i, j) = \text{SEUILLAGE}_{2 \text{ classes}} \left[ \text{GRAD} \left( (I(i, j) \times nb) \% 255 \right) \right]$$

dans laquelle  $nb$  est un nombre entier positif typiquement compris entre [2 20] (par exemple), GRAD est l'opération du gradient sur cette image (par exemple une convolution avec un masque calculant la norme du gradient), SEUILLAGE est un seuillage binaire 2 classes très simple (par ex. un seuillage avec le seuil 128), et finalement  $\%255$  signifie MODULO 255 localement pour chaque valeur de niveaux de gris de chaque pixel.

On vous demande, en tant qu'expert en traitement d'images d'expliquer avec le plus de détails intéressants possibles ce que fait algorithmiquement cette procédure (pour cela imaginer que vous fassiez du *retro-engineering* de logiciels pour une compagnie [ou essayer de comprendre ce qu'a fait algorithmiquement un ancien employé qui n'est plus dans l'entreprise] et que votre chef de projet (qui n'est pas un expert en traitement d'images comme vous) vous demande d'expliquer concrètement, brièvement et clairement, ce que font ces quelques lignes de code en matière de traitement d'images (et particulièrement le paramètre interne de cet algorithme qui est  $nb$ ).

<12 pts>

---

### Réponse

#### 1.(a)

Comme toute interpolation, on doit procéder de la façon suivante: on balaye lexicographiquement l'image finale (initialement remplie de zéros) interpolée et, pour chaque pixel de cette image, on va chercher dans l'image initiale de départ (l'image non interpolée), avec la transformation **inverse**, le niveau de gris associée à cette transformation inverse, tout d'abord, au sens du plus proche voisin (tel qu'il est demandé dans l'énoncé [et pour aussi faciliter l'implémentation]). Dans notre cas, on doit faire attention que toute la largeur de l'image s'étende de 0 à  $2\pi$  et que toute la longueur de l'image s'étende de 0 à  $\ln(\text{length}/2)$ .

```

. void LogPolarMapping(float** imgIn,float** imgOut,int lgth,int wdth)
. {
.   int i, j, RowCenter=(int)((lgth/2)), ColCenter=(int)((wdth/2));
.   float row, col, Dist;
.   double WDTH_MAX=360.0,LGTH_MAX=log(sqrt(CARRE(lgth/2)+CARRE(wdth/2)));
.   double ScalWdth=WDTH_MAX/(double)wdth, ScalLgth=LGTH_MAX/(double)lgth;
.   const float RADIAN=2.0*PI/360.0;
.
.   for(i=0;i<lgth;i++) for(j=0;j<wdth;j++) imgOut[i][j]=0;
.
.   for(i=0;i<lgth;i++) for(j=0;j<wdth;j++)
.     {
.       Dist=exp(((float)i*ScalLgth));
.       row=RowCenter+(Dist*sin(j*ScalWdth*RADIAN));
.       col=ColCenter+(Dist*cos(j*ScalWdth*RADIAN));
.       if ((int)row>(lgth-1)) continue;
.       if ((int)row<0) continue;
.       if ((int)col>(wdth-1)) continue;
.       if ((int)col<0) continue;
.       imgOut[i][j]=imgIn[(int)row][(int)col];
.     }
. }

```

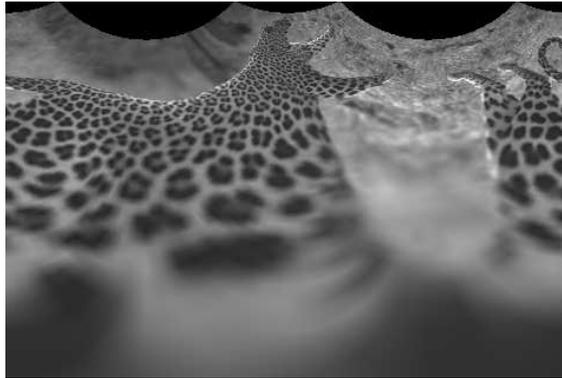
<17 pts>

1.(b)

Pour améliorer les résultats, on greffe ensuite au programme précédent; l'interpolation bilinéaire, cubique, ou d'ordre supérieure; cela évite les artefacts en bloque (*blocky artefacts*) que l'on appelle crénelage et éventuellement on prend en compte les trois canaux de couleur de l'image originale). On peut prendre en compte ensuite le modèle d'image toroidale.

<4 pts>

NOTA -1- : Avec l'interpolation bilinéaire, on obtient:



NOTA -2- : Pour tout système visuel humain (ou plus généralement pour tout mammifère), cette transformation log-polaire (avec sa résolution variable dans l'espace) est la transformation (topologique) inhérente de toute projection d'image rétinienne (*i.e.*, formée sur la rétine) sur la région corticale du cerveau où elle est ensuite interprétée. Autrement dit, dans le cerveau de tout mammifère, l'image est interprétée à partir de cette configuration ou transformation log-polaire.

2.

Pour  $nb=1$ , la procédure va faire une segmentation 2 classes (de type contour) comme celle de la question 1. du TP 5 (mais en montrant les contours de cette binarisation) à l'aide du seuillage (binaire) de seuil 128 (si on utilise, comme il est dit dans l'énoncé de cette question; un seuillage avec le seuil 128). Si on utilise

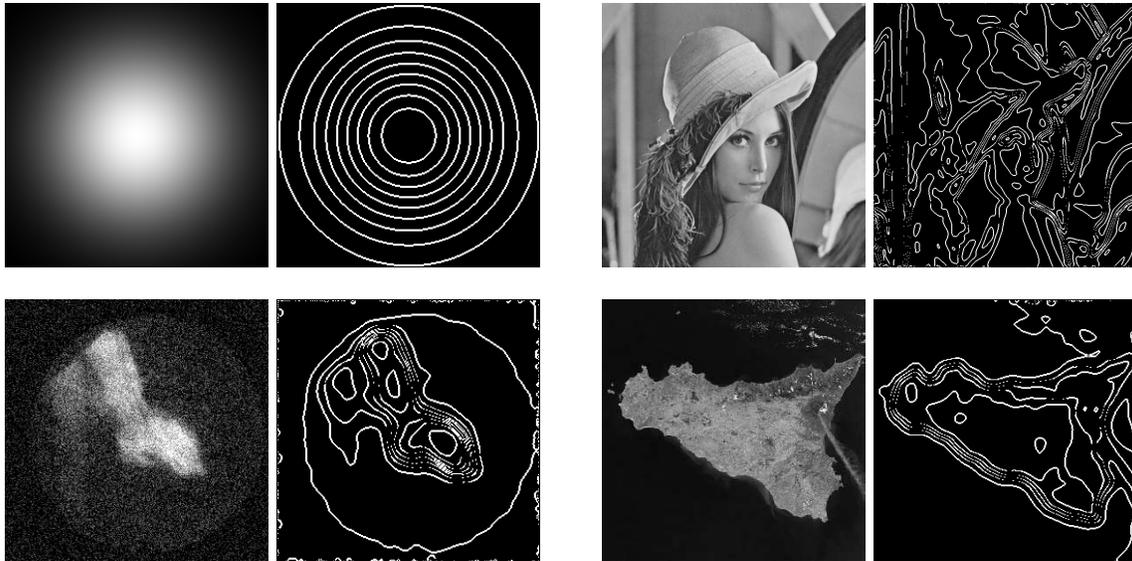
comme segmentation 2 classes par un K-moyenne, alors cela fera la segmentation 2 classes de la question 2. du TP 5 sur l'image (mais de type contour). Mais cela n'est pas la question, car on cherche a savoir ce qui se passe lorsque  $nb \geq 2$ .

- L'algorithme va créer  $nb$  courbe de niveaux. Une courbe de niveau est une ligne imaginaire qui va relier entre eux tous les points de l'image situés à un même niveau de gris. Plus précisément; pour  $nb$  courbe de niveaux, ces courbe de niveau vont relier entre eux respectivement tous les points de l'image situés à un niveau de gris égale à  $1 \times (255/nb)$ ,  $2 \times (255/nb)$ ,  $\dots$ ,  $(nb - 1) \times (255/nb)$ .

- Une autre façon d'expliquer et de comprendre le fonctionnement de cet l'algorithme est de noter que celui-ci va afficher les différentes courbes délimitant les régions préalablement segmentées d'une image qui a été requantifiée en  $nb$  niveaux de gris.

<12 pts>

**NOTA** : Pour  $nb=10$ , on obtient pour ces deux images (la première est une Gaussienne centrée d'écart type 60, la deuxième est LENA), la troisième est le COEUR et la dernière est SATELLITELES sur lesquelles sont sur-imposées les  $[nb=10]$  courbes de niveaux estimées par l'algorithme:



Dans le cas d'une image satellitaire ou le niveaux de gris est proportionnelle à sa distance par rapport au satellite (image SATELLITELES), ces courbes de niveaux représentent des courbes d'iso-altitudes ou courbes reliant des altitudes (par rapport à la mer) de même niveau d'altitude.

### III. Spectres & Filtrage (45 pts)

#### 1. Phénomène Spectral

- (a) Pouvez vous expliquer brièvement quel est le phénomène qui se passe pour cette image (cf. Fig. ci dessous) ?. Ce qui se passe de bizarre est au niveau de la porte de ce garage.

<6 pts>



(b) Comment peut-on éliminer/atténuer cet effet; d'une part avant la création de l'image numérique et d'autre part après la création de l'image numérique (par un post-traitement) sur cette image avec cette effet indésirable ?  
 <6 pts>

(c) Donner des exemples où ce phénomène se produit.  
 <3 pts>

(d) Trouver la relation entre  $T_e$  (période d'échantillonnage) et  $T_o$  la distance verticale entre deux lignes horizontales qui apparaissent sur la porte de ce garage.  
 <6 pts>

## 2. Filtrage Spatial

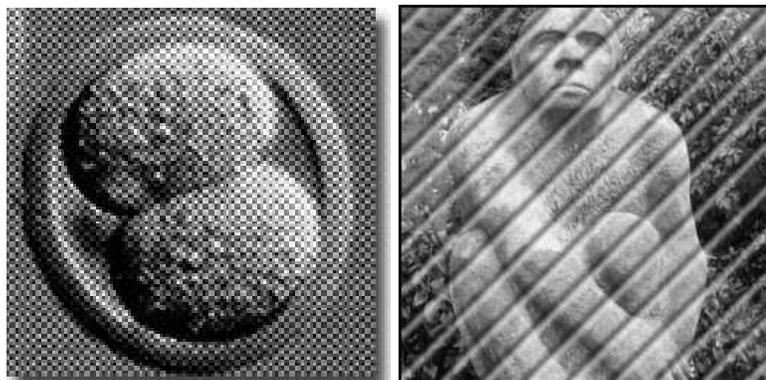
(a) Expliquer ce que va faire ce masque (3 colonne 1 ligne) de convolution 

-1	0.5	1
----	-----	---

 et brièvement pourquoi ?  
 <8 pts>

## 3. Filtrage Fréquentiel

Voici une image d'un embryon de souris, bruité par le processus de numérisation d'une photographie prise en sortie d'un microscope électronique (cf. image (a)) et une image altérée par des interférences (cf. image (b)):



(a)

(b)

(a) Expliquer de la façon la plus claire et plus convaincante à quoi ressemblera le spectre de cette image (a) par rapport au spectre d'une image classique (en niveaux de gris). En déduire une façon simple de restaurer cette image par filtrage fréquentiel.

<8 pts>.

- (b) Même chose pour l'image (b).  
<8 pts>.
- 

### Réponse

#### 1.(a)

C'est l'effet moiré, d'aliasing, de sous-échantillonnage ou encore l'effet du au repliement de spectre, qui se produit dans les appareils photo où il y a des sujets ou éléments avec des éléments répétitifs (points, lignes, etc.) dépassant la résolution globale du capteur de l'appareil photo (des motifs détaillés dans une image confondent les capteurs). Mathématiquement; l'image a été mal échantillonnée. Son échantillonnage ne respecte pas le critère de Shannon-Nyquist lui permettant de conserver toute l'information du signal de l'image analogique.

De par sa nature (des lignes horizontales (ou verticales ?) très proches constituant la porte du garage et dont la période est ici plus petite que la période d'échantillonnage de Shannon. Lorsque l'image a été prise par cette caméra, avec un nombre fixe de pixels et donc une période d'échantillonnage donnée; celle-ci n'a pas été assez petite pour capter les détails des phénomènes répétitifs hautes fréquences existants sur la porte du garage. Pour une image numérique dont on sait que le motif spectral se périodique, cela se traduit, au niveaux des hautes fréquence du motif spectral de base (centrée sur la fréquence 0), de provoquer un repliement de spectre. Du fait de ce repliement de spectre, des fréquences parasites sont créés lesquelles forme des motifs étrange ou bizarroïdes (qui n'existent physiquement pas) sur la porte de ce garage (certaines personnes décrivent le moiré comme ressemblant à l'effet de l'huile sur l'eau ou à un arc-en-ciel, bien qu'il ne soit pas toujours coloré).

<6 pts>

#### 1.(b)

Pour éliminer/atténuer cet effet avant la création de l'image numérique, il y a plusieurs possibilité.

- On peut bien sur utiliser un numériseur plus fin (meilleur capteur), c'est à dire un plus grand nombre de pixels pour l'image. C'est-à-dire échantillonner en respectant le critère de Shannon-Nyquist lui permettant de conserver toute l'information du signal que l'on veut numériser. Mais si on conserve l'appareil photo numérique physiquement tel qu'il est alors:

- Le moyen le plus simple de supprimer le moiré consiste à utiliser l'effet de flou grâce à un filtre passe-bas optique en réglant le focus (mise au point) de l'appareil ou le zoom avant durant la prise de vue de la scène. On peut aussi rapprocher de la scène du coup, on va diminuer les fréquences spatiales contenues dans l'image. De légers changements dans les angles de caméra peuvent supprimer complètement l'effet de moiré. Cela fonctionne car la modification de l'angle modifie également les motifs qui provoquent le moiré, même si cela ne convient pas dans tous les cas.

- D'autre part après la création de l'image numérique, l'élimination du moiré implique un travail de post-traitement que doit savoir faire un traiteur d'image. Un filtre passe-bas numérique, parfois appelé filtre anti-repliement, supprime (ou atténue fortement) les informations visuelles hautes fréquences et évite ainsi le repliement de spectre et donc l'effet de moiré. À noter que ce filtre anti-repliement empêche l'effet de moiré (et donc cette fausse information) mais en contrepartie crée du flou sur l'image (en éliminant certains détails de l'image).

<6 pts>

#### 1.(c)

Tout objet avec des motifs répétitifs haute fréquences peut créer un moiré Le moiré est particulièrement courant sur le tissu, où le tissage ou le grillage crée un motif de grille naturel qui peut confondre les filtres de l'appareil photo.

En musique, il existe de très hautes fréquences créés par les instruments de musique et donc inévitablement, si on utilise pas de filtre anti-repliement parfait (ce qui est impossible), de l'aliasing auditif qui sont

perçu, par les grands musiciens et chef d'orchestre (qui ont une oreille très affinée), lors de l'écoute d'un CD numérique.

<3 pts>

**NOTA** : Ce phénomène apparaissait aussi dans le TP1 dans la question de l'auto-convolution de deux carrés à cause d'un problème qui était du à la taille du support de l'objet [par rapport à la taille de l'image] que l'on désirait auto-convoluer grâce à une TFD.

1.(d)

Soit  $T_o$ , la période d'échantillonnage de l'image (de fréquence d'échantillonnage donc  $f_e = 1/T_e$ ) et  $T_o$  la distance verticale entre les deux lignes horizontales de ce garage (créant de ce fait la fréquence spatiale supposément maximale  $\nu_o$  existant dans cette image). Lorsque tout va bien (théorème de Shannon respecté), on a  $f_e > 2\nu_o$  impliquant nécessairement  $2T_e < T_o$ . Comme tout va mal dans cette image (dans laquelle il y a sans aucun doute de l'aliasing (à moins que le garagiste ait peint volontairement des motifs bizarroïdes et psychédélices sur la porte de son garage)), on a donc nécessairement la relation:

<6 pts>

$$2T_e > T_o \quad \text{ou} \quad T_e > T_o/2$$

2.(a)

Le plus simple est de voir que  $\begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}$

On pourrait dire que ce masque de convolution résulte de la somme des masques de convolution d'un opérateur du gradient (de second ordre) plus un masque de convolution (1 ligne et 1 colonne)  $\begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}$  qui aura pour effet de diminuer la moyenne de l'image par un facteur de deux.

Bref on peut voir ce masque de convolution soit comme un rehausseur de contours verticaux après une opération de RECAL de l'image ou un rehausseur de contours verticaux sur une image dont la moyenne d'intensité a été divisé par deux (sans post-opération RECAL de l'image).

**NOTA** : image originale et filtré par ce masque après une opération de RECAL de l'image et sans post-opération RECAL de l'image



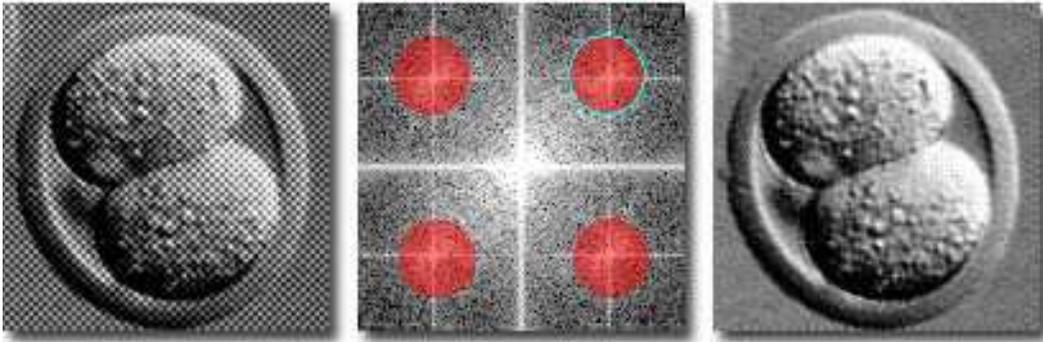
<8 pts>

3.(a)

Le bruit créé ressemble au bruit d'un rendu demi-ton (ou halftoning en anglais) qui consiste à alterner des points blancs ou des points noirs dans l'image avec une proportion qui est en rapport avec les niveaux de gris local de l'image. Cette opération ressemble beaucoup à une sorte de discrétisation de l'image avec deux niveaux de gris possible (blanc ou noir seulement) et/ou mathématiquement à une multiplication de l'image avec un peigne de Dirac dans lequel les dents du peigne (*i.e.*, les Diracs) seraient plus ou moins

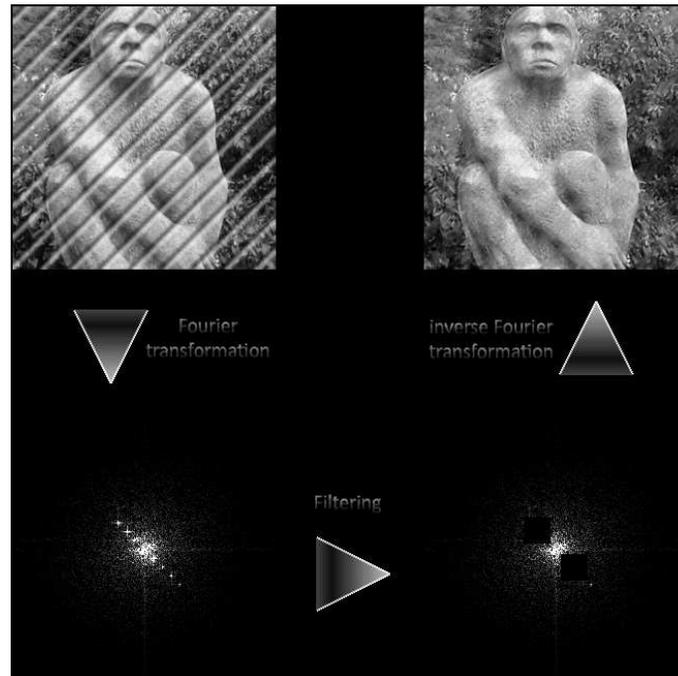
espacés et pour lesquels les Diracs prendrait une valeur blanche de l'image ou l'absence de Dirac prendrait une valeur noire de l'image. Or on sait que la discrétisation dans le domaine spatial est équivalente à une périodisation du spectre dans le domaine fréquentiel. Cette discrétisation un peu spéciale qui créera le rendu demi-ton va créer cette périodisation du motif spectral de base (celui centré sur la fréquence 0 en différents endroits hautes fréquences (et du fait que ce n'est pas une vraie discrétisation, cela va périodiser ce spectre en différent endroit en le modifiant un petit peu et en le pondérant différemment à ces différents endroits). Du coup, une fois que l'on a compris cela, il est facile de trouver un traitement dans le domaine spectral qui permette de restaurer cette image en demi-ton; il suffit de faire disparaître, avec une succession de filtre coupe bande bien placée les différentes duplications du motif spectral de base (tout en préservant le plus possible les hautes fréquences de l'image qui sont des détails de l'image et qui nous permettront de ne pas avoir une image trop floue comme cela aurait été le cas si on avait utilisé un filtre Gaussien (passe-bas).

<8 pts>



3.(b)

Bruit sous la forme de présence de discontinuités diagonale gauche (ressemblant plus à des droites que sous la forme d'une addition d'une dégradation sinusoïdale) se répétant 18 fois sur la diagonale de l'image donc présence de forts coefficients spectrale sur la diagonale gauche du spectre passant par la fréquence 0 (se répétant par période numérique 1/18) que l'on devra supprimer par filtre coupe bande locale bien placé (ou au pire par filtrage passe-bas) pour les enlever/atténuer.



<8 pts>

---

#### IV. Question Relative aux TPs (15 pts)

1. Dans le TP où l'on fait le débruitage par ondelette et seuillage flou. Préciser le rôle du paramètre  $\mathcal{N}$ , nombre de niveaux de la pyramide des ondelettes de Harr par rapport au bruit ?  
<5 pts>.
2. Dans ce même TP, pourquoi doit-on utiliser la contrainte; SI LE NIVEAU DE GRIS EST INFÉRIEUR À 0 ALORS LE NIVEAU DE GRIS ESTIMÉ EN UN PIXEL EST ÉGALE -A ZÉRO ET SI LE NIVEAU DE GRIS EST SUPÉRIEUR À 255, ALORS LE NIVEAU DE GRIS EST RAMENÉ A 255 ?  
<5 pts>.
3. Toujours dans le TP RESTAURATION où l'on fait aussi un essai de déflouage avec l'algorithme de Landweber et une image pour laquelle on a ajouté aucun bruit et pour laquelle cet algorithme permet de bien déflouer cette image. Concrètement parlant, lorsqu'on applique numériquement l'algorithme de Landweber sur une image (pour laquelle on a ajouté aucun bruit); existe-t-il réellement aucun bruit qui entache les données dans ce processus ? Si oui expliquer quel est la nature de ce bruit et comment on pourrait en estimer une borne supérieure de sa puissance ?  
<5 pts>.

---

#### Réponse

**1.**

Plus le bruit est important sur l'image plus le paramètre  $\mathcal{N}$  (qui détermine le nombre de niveau de la pyramide des ondelettes de Haar dans lequel chaque niveau correspond à une résolution spatiale différente de l'image) doit être important pour contrecarrer ce bruit. mais cela aurait aussi pour effet d'introduire des artefacts carrés sur l'image débruitée.

<5 pts>

**2.**

La procédure du calcul de changement d'espace, *i.e.* de notre espace spatial à l'espace des fréquences de Haar (c'est-à-dire le calcul des coefficients de Haar et le calcul inverse des coefficients seuillés floues) introduit du bruit numérique. Ce bruit fait en sorte que certains pixels se retrouvent avec une intensité supérieure au seuil maximal de 255 et quelquefois sont inférieurs au seuil minimal de 0. On ajoute donc cette contrainte physique pour enlever cette aberration sur ces deux classes de niveaux de gris. De plus, en format .PGM dans lequel il n'y a de 256 niveaux de gris possibles (de 0 à 255); si un niveaux de gris est supérieur à 255 (disons  $255 \triangleright 255.6$  arrondi à 256 par le format), le format .PGM visualisera le niveaux de gris *modulo* 255, c'est-à-dire  $256 \text{ modulo } 255 = 0$  et affichera un pixel qui devait être très clair (de niveaux de gris 256) comme étant noire (niveaux de gris égale à zéro) et inversement créant des points très blancs ou noirs qui devraient être inversé (très noirs ou blancs).

<5 pts>

**3.**

La procédure itérative de Landweber introduit du bruit numérique. En effet, supposons que le niveau de gris à la nième itération du premier pixel est 100.1, 100 a une représentation exacte en flottant mais pas 0.1 (pour lequel il faut un nombre infini de bits pour représenter cette valeur parfaitement). Du coup le niveaux de gris 100.1 va être approximé en flottant (créant ainsi une erreur d'affectation et plus précisément d'arrondissement propre aux nombres flottants) et cela va être le cas de la majorité des flottants codant les niveaux de gris de cette image. Ces bruits [dus aux arrondis numériques inhérent au calcul flottant] vont se propager d'itérations en itérations, en s'amplifiant quelquefois, dans les itérations de l'algorithme de Landweber. [C'est pour cela que l'on observe au fil des itérations, des pixels dont le niveaux de gris est quelquefois inférieur à zéro et quelquefois supérieur à zéro.] De plus, à la fin de cette procédure, l'image sera

converti au format .PGM qui utilise des niveaux de gris codés en entiers créant ainsi un deuxième bruit (dit de troncature) à la fin de cette procédure itérative.

- Pour estimer le bruit créé par ces deux phénomènes, on pourrait flouer l'image avec un léger flou (avec une fonction de flou ne créant pas de zéros dans le domaine fréquentiel) puis attendre un très grand nombre d'itération de la procédure de Landweber qui est censé l'enlever parfaitement (car le flou est déterministe et ne possède pas de zéros dans le domaine fréquentiel [qui détruit certaines composantes spectrales]) et calculer la différence entre l'image non flouée et l'image déflouée par cette procédure. La somme au carré de cette différence (entre l'image non flouée et l'image déflouée par cette procédure) nous donnerait une bonne estimation de sa puissance ou variance de ce bruit.

- Une autre façon serait d'identifier dans l'image déflouée par l'algorithme de Landweber (*sans utiliser la contrainte qui met à zéro tous les niveaux de gris inférieurs à zéro et mettre à 255 tous les niveaux de gris supérieurs à 255*) le pixel associé au niveau de gris le plus élevé et comparer cette valeur avec le niveau de gris de ce même pixel dans l'image floue de départ [et non bruité] (donc à déconvoluer). La différence serait de l'ordre de  $3\sigma$  avec  $\sigma^2$  qui serait une estimation de la puissance ou la variance de ce bruit numérique du à la notation flottante et à la propagation des erreurs numériques de l'algorithme de Landweber.

- Une autre façon serait de faire la procédure suivante: Pour un pixel donné (supposons que l'on prenne le pixel central de position (ligne=length/2, colonne=width/2); calculer le déflouage (ou déconvolution) d'une image entachée par seulement du flou (avec une fonction de flou ne créant pas de zéros dans le domaine fréquentiel et sans utiliser la contrainte qui met à zéro tous les niveaux de gris inférieurs à zéro et mettre à 255 tous les niveaux de gris supérieurs à 255) pour un grand nombre de balayage et pour un grand nombre de différents balayages de l'image (pas seulement lexicographique). La variance du niveaux de gris obtenu, pour ces différents balayages, en ce pixel de position (ligne=length/2, colonne=width/2) serait une assez bonne estimation de la puissance ou variance de ce bruit numérique (du à la propagation des erreurs [et erreur d'affectation] en notation flottante de notre procédure itérative de Landweber).

<5 pts>

**NOTA** : Bien sur si une image provient de la numérisation d'une image analogique ou que celle ci est prise par une caméra numérique, il existe sur cette image le bruit des capteurs (scanner ou caméra) qui est caractéristique des appareils électroniques c-a-d; additif Gaussien et blanc. Mais il ne s'agit pas de ce type de bruit dont on parle dans cette question ! On s'intéresse au bruit de la procédure numérique de Landweber qui utilise une notation flottante !