

Institut National Polytechnique de Grenoble (I.N.P.G)

**Approche multiéchelle statistique
pour la reconstruction 3D
biplanaire et non supervisée
du bassin scoliotique**

par
Isabelle Renaud

Stage de Recherche
Master EEATS,
spécialité Signal - Image - Parole - Télécoms (S.I.P.T)

juin 2004

© Isabelle Renaud, 2004.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Max Mignotte, Professeur du Département d'Informatique et Recherche Opérationnelle (DIRO) de l'Université de Montréal, pour m'avoir proposé le sujet de ce stage, pour sa gentillesse et sa disponibilité.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Jacques A. De Guise, Professeur du département de Génie de la production automatisée de l'École de Technologie Supérieure de Montréal, et Directeur du Laboratoire de recherche d'Imagerie et d'Orthopédie (LIO) pour m'avoir donné l'occasion de travailler sur ce sujet passionnant et m'avoir gentiment accueillie au sein de son laboratoire.

Je remercie profondément Monsieur Said Benameur pour sa supervision, sa disponibilité, sa gentillesse, ses conseils et sa bonne humeur au cours de ce travail.

Je remercie également Madame Geneviève Jourdain, Enseignante et Chercheur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), pour avoir autorisé ce stage à l'étranger et répondu à mes questions.

Je souhaite remercier Monsieur David Mitton, et à travers lui, le laboratoire biomécanique de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) de Paris pour m'avoir fourni les images Charpak et les bases d'apprentissage qui ont servi à mon travail.

Je remercie les membres du LIO, et tout particulièrement Benoît Godbout, Sylvain Deschênes, Matthieu Villand, Pierre Gravel pour leur accueil et leur aide.

RÉSUMÉ

Nous présentons dans ce rapport une méthode de reconstruction 3D non supervisée du bassin scoliotique à partir de deux plans radiographiques conventionnels (postéro-antérieur et latéral) calibrés, obtenus sur un nouveau système de radiologie EOS, et d'une connaissance *a priori* de la structure géométrique du bassin. Cette connaissance géométrique repose sur un modèle statistique créé à partir d'une analyse en composantes principales appliquée à une base d'apprentissage. Une série de déformations globales linéaires et non-linéaires est définie sur ce modèle afin de tenir compte des variabilités anatomiques et pathologiques du bassin. La méthode proposée consiste à déformer le modèle jusqu'à ce que les contours projetés du modèle 3D se superposent aux contours du bassin préalablement segmentés sur les radiographies. Ce problème de reconstruction 3D est défini comme une minimisation d'une fonction d'énergie et résolu par un algorithme stochastique d'Exploration/Sélection et une approche multirésolution. Cette méthode de reconstruction 3D du bassin a été testée sur trois paires de radiographies biplanaires et donnent des résultats encourageants.

Mots-clés : reconstruction 3D, recalage 3D/2D, modélisation statistique multiéchelle, radiographies biplanaires, scoliose, minimisation d'une fonction d'énergie, algorithme d'optimisation stochastique.

ABSTRACT

In this report we present an unsupervised 3D reconstruction method of the scoliotic pelvis from two conventional (postero-anterior and lateral) calibrated radiographic images, and a global prior knowledge on the geometric structure of pelvis. This geometric knowledge is efficiently captured by a 3D statistical template with a set of global linear and non-linear admissible deformations, via a principal component analysis, to take into account the anatomic and scoliotic shape variability. This 3D reconstruction technique consists in fitting the projections of this deformable template with the preliminary segmented outlines of the corresponding pelvis on the two radiographic views. The 3D reconstruction problem is stated as the minimization of an energy function and efficiently solved with a recent stochastic “Exploration/Selection” optimization technique. To speed up the minimization, we use a multiscale approach. This reconstruction method has been successfully tested on three couples of biplanar radiographic images, yielding very promising results.

Keywords : 3D reconstruction method, 3D/2D registration, statistical modeling, biplanar radiographies, scoliotic pelvis, energy function minimization, stochastic optimization, multiscale approach.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	ii
RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	viii
LISTE DES ANNEXES	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : ETAT DE L'ART	4
1.1 Méthodes de reconstruction 3D	4
1.1.1 Méthodes de reconstruction 3D directes	4
1.1.2 Méthodes de reconstruction 3D indirectes	5
1.1.2.1 Méthodes de reconstruction 3D sans connaissance a priori	5
1.1.2.2 Méthodes de reconstruction 3D avec connaissance géométrique a priori	6
1.1.2.3 Méthodes de reconstruction 3D avec connaissance statistique a priori	7
1.2 Objectifs du projet	8
CHAPITRE 2 : MÉTHODOLOGIE	9
2.1 Le modèle statistique	9
2.2 La reconstruction 3D	12
2.2.1 La fonction d'énergie	13

2.2.2	L'énergie de vraisemblance	13
2.2.3	L'énergie <i>a priori</i>	15
2.3	Optimisation de la fonction d'énergie	15
2.3.1	Algorithme Exploration/Sélection	15
2.3.2	Multirésolution	17
CHAPITRE 3 : RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX		19
3.1	La base de données des bassins	19
3.2	Les images radiographiques	20
3.3	La calibration	20
3.4	Les résultats expérimentaux	20
DISCUSSION ET CONCLUSION		27
BIBLIOGRAPHIE		29

LISTE DES FIGURES

1	<i>Squelette scoliotique (cf. Moe et al., 1978)</i>	1
1.1	<i>Repères anatomiques numérisés par Gauvin et al.</i>	6
2.1	<i>Forme 3D du bassin.</i>	10
2.2	<i>Visualisation de la forme moyenne (colonne du milieu) en vues frontale (ligne du dessus) et latérale (ligne du dessous) et des formes déformées obtenues par des variations de ± 3 des premier et deuxième modes de variations.</i>	11
2.3	<i>Contours externes du modèle 3D : (a) et (b) modèle filaire, (c) et (d) contours externes.</i>	14
2.4	<i>Contours du modèle 3D projetés sur les vues frontale et latérale.</i>	15
2.5	<i>Pyramide quaternaire.</i>	18
3.1	<i>Modèles des 3 bases d'apprentissage : (a) et (b) modèle à 185 points, (c) et (d) modèle à 1270 points, (e) et (f) modèle à 9274 points.</i>	19
3.2	<i>Contours segmentés du bassin radiographié.</i>	21
3.3	<i>Prétraitement : (a) vue postéro-antérieure, (b) vue latérale, (c) et (d) détection de contours avec Canny, (e) et (f) champ de potentiel.</i>	22
3.4	<i>Recalages 3D/2D obtenus suivant la base d'apprentissage utilisée : (a)-(b) base à 185 points : $E = -0.60$, 500 itérations, (c)-(d) base à 1270 points : $E = -0.55$, 200 itérations, (e)-(f) base à 9274 points : $E = -0.84$, 200 itérations.</i>	25
3.5	<i>Bassin reconstruit avec la base de 9274 points.</i>	26
3.6	<i>Recalages 3D/2D successifs obtenus avec l'approche d'optimisation multirésolution.</i>	26

LISTE DES TABLEAUX

3.1	<i>Valeurs propres normalisées calculées sur les bases d'apprentissage.</i>	23
3.2	<i>Temps d'exécution et minimum obtenus avec monorésolution et multirésolution pour deux paires de radiographies différentes et 200 itérations.</i>	24

LISTE DES ANNEXES

**Annexe I : ACP d'une base avec moins d'échantillons que de
dimensions 32**

INTRODUCTION

La scoliose est une déformation tridimensionnelle de la courbe naturelle de la colonne vertébrale, incluant des rotations et des déformations vertébrales. Cette déformation s'accompagne, lorsqu'elle se manifeste au niveau du thorax, d'une déformation de la cage thoracique et, lorsqu'elle se manifeste au niveau des lombaires, d'une déformation du bassin (cf. Fig. 1).

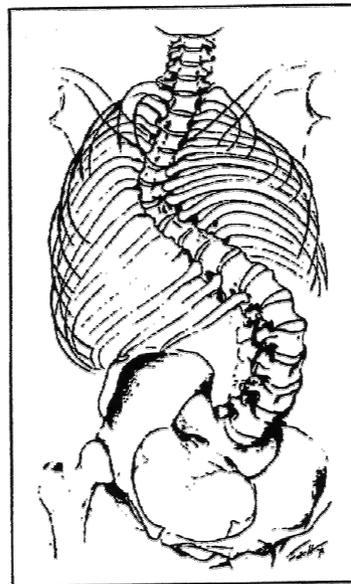


FIG. 1 – *Squelette scoliotique (cf. Moe et al., 1978)*

Cette pathologie touche 2 à 4% de la population. Les scolioses idiopathiques adolescentes sont les plus communes (à 80%) et touchent 9 fois plus de filles que de garçons. Si les scolioses légères ont des conséquences principalement esthétiques, d'autres peuvent nuire gravement à la santé des malades.

Afin de visualiser et d'analyser les caractéristiques des déformations des vertèbres scoliotiques, différentes méthodes de reconstruction 3D de la colonne vertébrale ont été développées. Ces caractéristiques peuvent être utilisées pour concevoir, évaluer et améliorer les méthodes de correction orthopédique ou chirurgicale de la colonne vertébrale scoliotique.

Parmi les techniques de reconstruction 3D existantes, les méthodes associées à la modalité d'imagerie médicale CT-Scan permettent d'obtenir une reconstruction 3D précise des structures osseuses du patient. Cependant, les fortes doses de radiation reçues par le patient, la grande quantité d'informations à acquérir et le coût de ces méthodes les rendent peu fonctionnelles. Les méthodes multiplanaires sont très intéressantes car l'utilisation d'un nombre limité de vues radiographiques réduit la quantité d'irradiation.

Le problème de reconstruction 3D biplanaire est un problème dit mal-posé au sens de Hadamard ^[17]. En effet, l'acquisition de deux images radiographiques biplanaires ne permet pas d'assurer l'unicité d'une solution de reconstruction. La résolution d'un tel problème passe nécessairement par la réduction du nombre de solutions possibles en introduisant une connaissance *a priori* sur l'objet à reconstruire. Des modèles géométriques simples ont été proposés mais leur grande rigidité ne tient pas compte des variabilités anatomiques et pathologiques des structures osseuses à reconstruire. Les méthodes de reconstruction 3D biplanaires par modélisation statistique permettent de résoudre ce problème.

La plupart des méthodes multiplanaires reposent sur la numérisation de quelques repères anatomiques sur les différentes vues : elles sont supervisées et les résultats dépendent alors de l'opérateur. De plus, peu de ces méthodes incluent une reconstruction 3D du bassin. Or, dans l'étude de la scoliose, le bassin a un rôle non négligeable. Il constitue la base de la colonne vertébrale ou plutôt la dernière vertèbre de la colonne : de ce fait, il joue certainement un rôle dans l'étiologie des scolioses idiopathiques ^[5], dans leur progression ^[14], et leur traitement orthopédique ^[20].

Ainsi, le but de ce projet est de développer une méthode statistique non supervisée de reconstruction 3D du bassin, à partir de deux plans radiographiques conventionnels calibrés (postéro-antérieur et latéral) obtenus simultanément sur un

nouveau système de radiologie EOS ¹. Un modèle statistique est créé à partir d'une analyse en composantes principales appliquée à une base d'apprentissage. Ce modèle est ensuite déformé jusqu'à la superposition des contours projetés du modèle 3D aux contours des bassins sur les radiographies. Le problème de reconstruction 3D est vu comme un problème d'estimation des paramètres de déformation du modèle ou comme un problème de minimisation d'une fonction d'énergie. L'optimisation de la fonction d'énergie se fera par un algorithme stochastique d'Exploration/Selection ^[12] et une approche multirésolution.

La suite de ce rapport dresse dans un premier temps un état de l'art des méthodes de reconstruction 3D de structures osseuses. Une deuxième partie présente la nouvelle méthode de reconstruction. Les résultats obtenus et leur validation, suivis d'une discussion et d'une conclusion terminent ce rapport.

¹ Ce système, basé sur les travaux de Charpak, prix Nobel français de physique en 1992, permet de réduire les doses de radiation des rayons X tout en augmentant la qualité des images.

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART

Nous présentons une revue de littérature des méthodes de reconstruction de structures osseuses (colonne vertébrale, bassin). Cette revue n'est pas exhaustive, mais elle démontre clairement que peu de travaux ont été réalisés sur la reconstruction 3D du bassin.

1.1 Méthodes de reconstruction 3D

De Guise *et al.* ^[18] classe les méthodes de reconstruction 3D en deux catégories suivant la technique d'inférence de la géométrie obtenue. Il distingue les méthodes directes dans lesquelles la géométrie 3D est directement reconstruite à partir des acquisitions des imageurs 3D tels que CT-scan et les méthodes indirectes ou multiplanaires où la géométrie reconstruite est obtenue à partir des acquisitions de plusieurs images radiographiques.

1.1.1 Méthodes de reconstruction 3D directes

Une acquisition tranche par tranche, réalisée par tomographie (CT-scan ou Scanner), permet de reconstruire le modèle 3D d'une structure osseuse. Cette technique est basée sur une segmentation des structures à reconstruire dans les images radiographiques et sur des techniques de rendu surfacique qui permettent de relier les différentes coupes segmentées représentant une même structure.

La reconstruction 3D par CT-scan est une technique très précise. Cependant, elle présente plusieurs inconvénients :

- le patient reçoit une dose importante d'irradiation,
- la position allongée requise modifie la posture naturelle du patient,
- la quantité d'informations à acquérir et à traiter est importante, d'où un temps de calcul relativement long,
- le coût de cette modalité d'imagerie est élevé.

Pour surmonter ces problèmes, de nombreuses méthodes de reconstruction 3D multiplanaires ont été développées. Ces méthodes permettent de reconstruire un modèle 3D en utilisant un nombre limité de vues radiographiques, ce qui réduit considérablement la dose de radiation. En effet, pour un même modèle 3D reconstruit par une méthode multiplanaire, la méthode CT-scan nécessite entre 300 et 500 images.

1.1.2 Méthodes de reconstruction 3D indirectes

Parmi les méthodes de reconstruction indirectes ou multiplanaires, on distingue trois types de méthode de reconstruction 3D.

1.1.2.1 Méthodes de reconstruction 3D sans connaissance a priori

De nombreuses méthodes de reconstruction 3D à partir de seulement deux vues radiographiques conventionnelles (une vue postéro-antérieure avec une incidence de 0° (I_{PA}) et une vue latérale (I_{LAT})) ont été développées ^{[16][24][25][26]}. Ces différentes techniques reposent sur l'identification de repères anatomiques sur I_{PA} et I_{LAT} . Elles consistent à numériser différents repères anatomiques stéréo-correspondants sur les deux vues radiographiques. Ces différents points 2D sont ensuite reconstruits en 3D par l'algorithme DLT (Direct Linear Transformation) développé par Marzan ^[19].

Le principal inconvénient de ces méthodes est d'être supervisées : la précision de la numérisation des points dépend de l'habileté de l'opérateur. En effet, une erreur d'identification des repères anatomiques de l'ordre de 2 mm sur les radiographies peut engendrer des erreurs de reconstruction de l'ordre de 5 mm ^[2]. Ces erreurs de reconstruction sont fréquentes et sont dues essentiellement à la visibilité des repères anatomiques sur les vues radiographiques.

Le problème de reconstruction 3D est un problème inverse mal-posé. Il ne peut être résolu efficacement qu'après addition de contraintes : on introduit alors une information *a priori* sur l'objet à reconstruire (géométrie).

1.1.2.2 Méthodes de reconstruction 3D avec connaissance géométrique a priori

Des méthodes de reconstruction 3D utilisant une connaissance *a priori* sur la structure géométrique de l'objet à reconstruire ont été proposées dans la littérature.

Une méthode de reconstruction 3D stéréoradiographique des vertèbres est présentée par Dansereau et Stokes dans [10]. Une première étape de reconstruction stéréoradiographique, basée, là encore, sur la numérisation et la reconstruction par DLT de différents repères anatomiques, permet une reconstruction personnalisée des vertèbres. Une deuxième étape consiste en une modélisation géométrique qui permet de donner une visualisation plus réaliste de la géométrie des vertèbres. Pour se faire, des spécimens cadavériques de la structure osseuse à reconstruire sont scannés afin d'obtenir d'autres primitives anatomiques en 3D. Le modèle 3D obtenu est ensuite interpolé par krigeage dual [28]. Cette méthode est présentement utilisée à l'hôpital Ste-Justine de Montréal.

Gauvin présente dans [15] une méthode de reconstruction 3D stéréoradiographique du bassin, inspirée de la méthode de reconstruction de Dansereau : 21 repères anatomiques sont numérisés puis reconstruits par DLT (cf. Fig. 1.1).

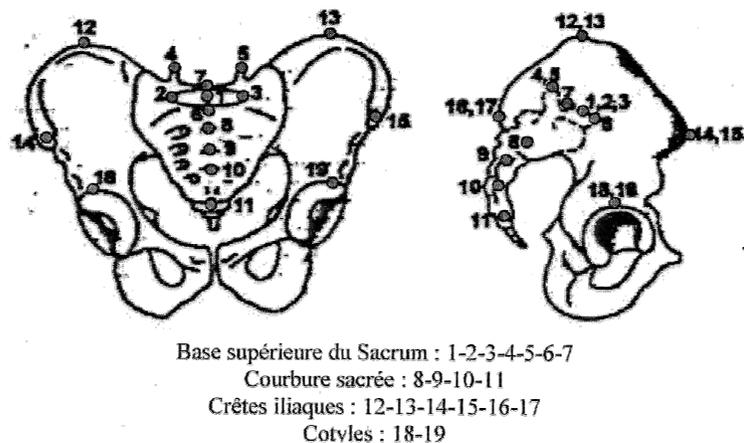


FIG. 1.1 – Repères anatomiques numérisés par Gauvin et al.

Afin d'améliorer la précision de la reconstruction 3D, Mitton *et al.* ^[21] ajoute aux points stéréocorrespondants numérisés certains repères anatomiques qui ne peuvent être identifiés que sur une des vues radiographiques. Ces nouveaux points numérisés sont dits non stéréocorrespondants. Leurs coordonnées 3D peuvent être calculées à l'aide d'une connaissance *a priori* géométrique qui contraint le problème : les points du modèle 3D obtenu, reliés entre eux par des ressorts linéaires de même constante d'élasticité, se déplacent seulement le long de droites de contrainte. Le modèle est alors déformé jusqu'à ce que le système (points et ressorts) atteigne l'état stable.

Ces nouvelles méthodes possèdent quelques inconvénients. D'abord, elles restent supervisées et sont donc sujettes à des erreurs d'identification des repères. D'autre part, elles n'exploitent pas tout le potentiel d'information contenu dans les deux images radiographiques (niveaux de gris, contours, etc.). Une modélisation statistique, par contre, permet de prendre en compte les variabilités anatomiques et pathologiques des déformations de la structure osseuse dans une base d'apprentissage.

1.1.2.3 Méthodes de reconstruction 3D avec connaissance statistique *a priori*

Une connaissance *a priori* statistique tient compte des variabilités de la géométrie de l'objet à reconstruire, et apporte ainsi une certaine robustesse à la méthode de reconstruction. La forme 3D reconstruite ressemble davantage à la réalité.

Cootes ^{[9][27]} est à l'origine de la modélisation statistique linéaire. Il crée, à partir d'une base d'apprentissage, un modèle statistique linéaire en 2D qui tient compte des déformations globales statistiquement admissibles.

Par la suite, les travaux de Cootes ont été adaptés aux problèmes d'imagerie médicale en 3D. Fleute et Lavallée ^[13] ont proposé une méthode de reconstruction 3D à partir de vues radiographiques multiplanaires basée, d'une part, sur l'identification des contours sur les radiographies et, d'autre part, sur une modélisation statistique. Un modèle statistique est créé à partir d'une base d'apprentissage de plusieurs modèles 3D, reconstruits par CT-Scan manuellement, et d'une analyse en

composantes principales (ACP ou transformé de Karhunen-Loeve) sur cette base. La reconstruction 3D est alors obtenue par déformation du modèle statistique jusqu'à ce que les contours projetés du modèle déformé se superposent au mieux aux contours préalablement segmentés sur les radiographies. Cependant, la méthode n'est valide que pour la reconstruction 3D de vertèbres saines et n'est donc pas adaptée à la reconstruction de structures osseuses pathologiques.

Dans le même temps, Benameur *et al.* [4] propose une méthode de reconstruction 3D biplanaire, similaire à celle de Fleute et Lavallée, mais adaptée à la reconstruction de vertèbres scoliotiques. Ici, la base d'apprentissage est déjà existante et inclut des modèles de vertèbres saines et scoliotiques [23]. Cependant, la méthode de reconstruction 3D des vertèbres nécessite le positionnement initial du modèle déformable de la première vertèbre dans l'environnement radiographique par la numérisation de quelques points. Cette méthode est donc supervisée.

1.2 Objectifs du projet

Dans ce rapport, la technique proposée pour reconstruire le bassin s'inspire des travaux de Benameur *et al.* sur les vertèbres [4]. Nous proposons une méthode de reconstruction 3D non supervisée du bassin scoliotique à partir de deux vues radiographiques conventionnelles calibrées et par modélisation statistique. Cette méthode consiste à positionner tout d'abord le bassin dans l'environnement radiographique de façon non supervisée. Le modèle statistique est basé sur une ACP appliquée à une base d'apprentissage de bassins. Ce modèle est déformé de sorte que les contours projetés du modèle se superposent aux contours segmentés sur les deux vues. Le bassin reconstruit est obtenu par minimisation d'une fonction d'énergie résolue par l'algorithme stochastique d'Exploration-Sélection développé par O. François [22].

Les principales contributions de cette méthode sont l'utilisation d'une modélisation statistique pour la reconstruction 3D du bassin scoliotique combinée à une approche multirésolution.

CHAPITRE 2

MÉTHODOLOGIE

Notre méthode de reconstruction 3D du bassin repose sur l'acquisition de deux images radiographiques conventionnelles (une vue postéro-antérieure avec incidence de 0° (I_{PA}) et une vue latérale (I_{LAT})) et calibrées, auxquelles on applique au préalable une étape de segmentation pour extraire les contours du bassin à reconstruire. Auparavant, un modèle statistique déformable a été défini à partir d'une base d'apprentissage. La méthode de reconstruction 3D consiste à superposer la projection du contour externe du modèle 3D avec les contours segmentés sur les deux vues radiographiques. Cette méthode de reconstruction 3D est définie comme un problème de minimisation d'une fonction d'énergie, résolu par un algorithme d'optimisation stochastique et une approche multirésolution.

2.1 Le modèle statistique

Nous disposons d'une base d'apprentissage de N bassins. Chaque bassin de la base est un nuage de n points 3D (cf. Fig. 2.1). La forme 3D de chaque bassin est ainsi représentée par le vecteur de dimension $3n$ suivant :

$$s = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_i \ \dots \ p_n)^T$$

où $p_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$ représentent les coordonnées cartésiennes de chacun des n points du modèle 3D.

Par la suite, nous supposons que s est une instance d'un vecteur aléatoire S qui suit une loi normale de moyenne \bar{s} et de matrice de covariance C . Après avoir aligné les N modèles 3D de la base d'apprentissage, \bar{s} et C sont définis par :

$$\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i, \quad C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - \bar{s})(s_i - \bar{s})^T.$$

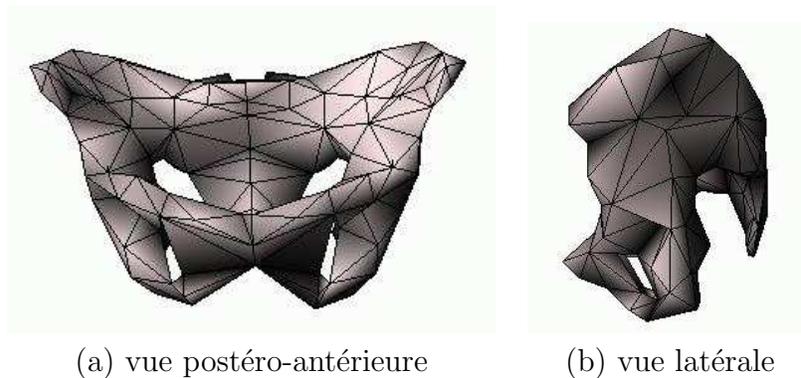


FIG. 2.1 – *Forme 3D du bassin.*

La base orthogonale ajustant au mieux, au sens des moindres carrés, le nuage de n points dans l'espace des formes \mathcal{R}^N est définie par la forme moyenne du bassin et par les vecteurs propres de la matrice de covariance ordonnés par valeur décroissante des valeurs propres associées. Les vecteurs propres de la matrice de covariance C décrivent les modes de variation de l'espace des déformations. En d'autres termes, ils contiennent l'information sur la variabilité des déformations dans la base d'apprentissage de bassins. Les valeurs propres associées contiennent l'information sur l'amplitude de ces déformations (cf. Fig. 2.2).

Une instance s de la variable aléatoire S peut s'écrire :

$$s = \bar{s} + \phi b \tag{2.1}$$

où la matrice $\phi = (\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_m)$ contient les m vecteurs propres associés aux m plus grandes valeurs propres, et le vecteur $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$ contient les m amplitudes de chaque mode de variation b_i où $-3\sqrt{\lambda_i} \leq b_i \leq +3\sqrt{\lambda_i}$ avec λ_i , la valeur propre associée au mode de déformation b_i .

En théorie, le rapport d'une valeur propre sur la somme totale des valeurs propres $V_T = \sum \lambda_i$ correspond au pourcentage d'erreur introduite si le vecteur propre associé n'est pas sélectionné. On choisit m le nombre de vecteurs propres à sélectionner en fixant un seuil f_v (par exemple, 95%) au-dessus duquel l'erreur totale introduite est

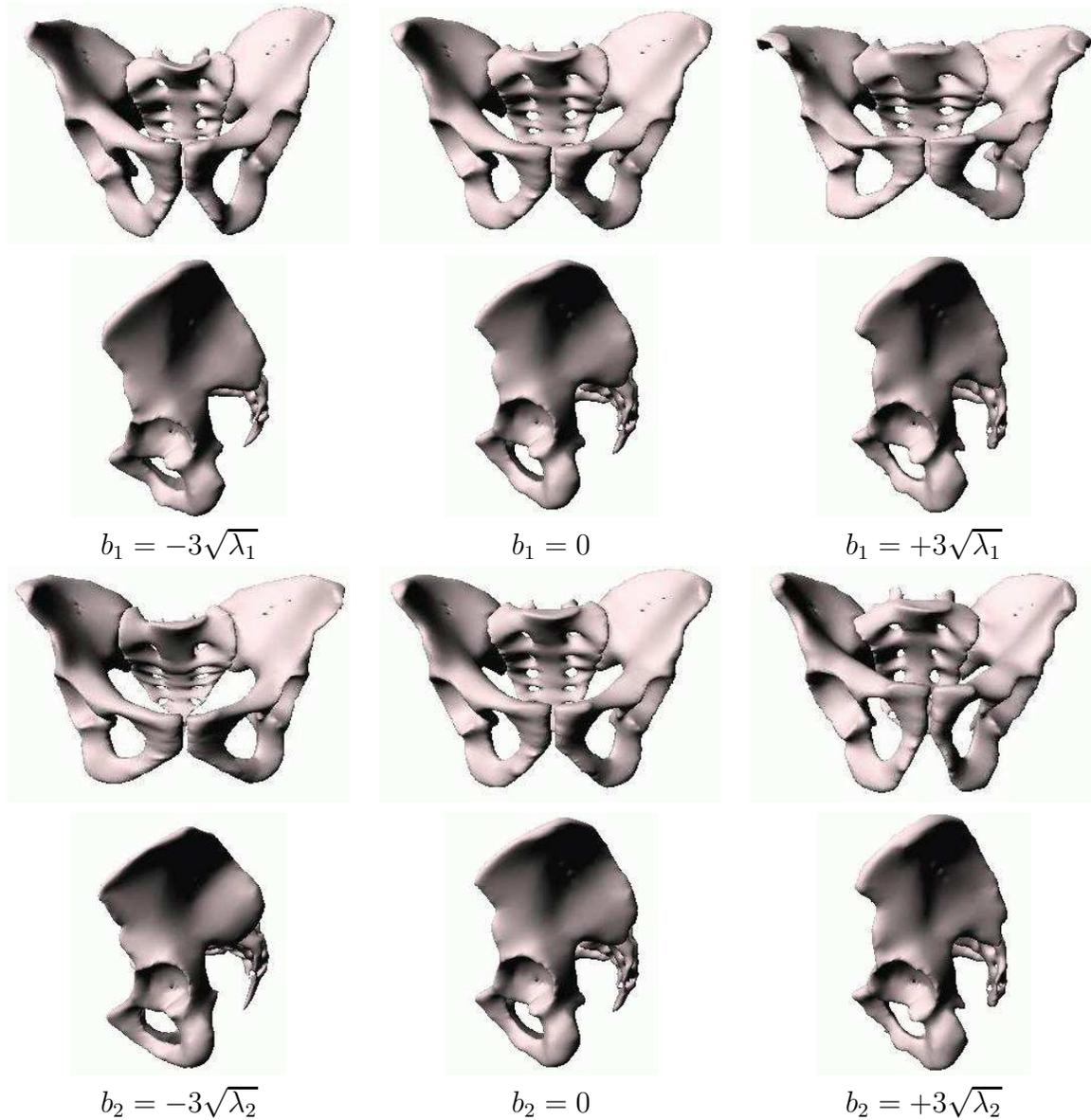


FIG. 2.2 – Visualisation de la forme moyenne (colonne du milieu) en vues frontale (ligne du dessus) et latérale (ligne du dessous) et des formes déformées obtenues par des variations de ± 3 des premier et deuxième modes de variations.

suffisamment petite pour que la forme générée soit une bonne approximation. Ainsi, seules les déformations importantes de la base sont retenues. m est alors défini tel que :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq f_v V_T.$$

où f_v est une mesure globale de la qualité de la représentation sur la base modale ϕ .

2.2 La reconstruction 3D

En plus des paramètres de déformations non linéaires globales, nous allons considérer aussi les paramètres de transformations rigides en 3D, de sorte qu'une forme est générée par le modèle :

$$s = M(k, \alpha) [\bar{s} + \phi b] + T \quad (2.2)$$

où k , α et T représentent respectivement les vecteurs d'échelle, de rotation et de translation (suivant les axes x , y , z). La matrice de rotation R et le vecteur d'échelle sont regroupés dans la matrice de transformation $M(k, \alpha)$ de la manière suivante :

$$M(k, \alpha) = \begin{pmatrix} M(k, \alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M(k, \alpha) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M(k, \alpha) \end{pmatrix}$$

où $M(k, \alpha) = k \cdot R$,

$$R = \begin{pmatrix} \cos(y) \cos(z) & \sin(x) \sin(y) \cos(z) - \cos(x) \sin(z) & \cos(x) \sin(y) \cos(z) + \sin(x) \sin(z) \\ \cos(y) \sin(z) & \sin(x) \sin(y) \sin(z) + \cos(x) \cos(z) & \cos(x) \sin(y) \sin(z) - \sin(x) \cos(z) \\ -\sin(y) & \sin(x) \cos(y) & \cos(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

et

$$T = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

Une fois positionnée dans l'environnement radiographique, la forme moyenne du bassin est mise à l'échelle suivant les directions x , y et z de façon à se projeter dans la région image du bassin. La reconstruction 3D consiste à déformer la forme moyenne jusqu'à ce que la projection de son contour externe se superpose aux contours segmentés du bassin radiographié.

2.2.1 La fonction d'énergie

Le problème de reconstruction 3D à partir des deux vues radiographiques I_{PA} et I_{LAT} est défini comme un problème de minimisation d'une fonction d'énergie :

$$E(s, \theta) = E_l(s, I_{PA}, I_{LAT}) + \beta E_p(s) \quad (2.3)$$

où $E_l(s, I_{PA}, I_{LAT})$ est l'énergie de vraisemblance, $E_p(s)$ l'énergie *a priori*, β un facteur de pondération qui permet de contrôler la rigidité du modèle statistique ^[1] et $\theta = (M(k, \theta), T, b)$ le vecteur des paramètres de déformation que l'on cherche à estimer.

2.2.2 L'énergie de vraisemblance

Le terme d'énergie de vraisemblance permet de mesurer la similarité entre les contours externes du modèle 3D projetés sur les vues I_{PA} et I_{LAT} et les contours segmentés sur les deux vues. Le calcul des contours externes du modèle 3D utilise l'algorithme d'extraction des contours externes d'une surface 3D présenté dans ^[4] (cf. Fig. 2.3).

Après avoir segmenté les images radiographiques par un détecteur de contours de Canny ^[7], on définit un champ de potentiel pour chacune des deux images par la fonction de potentiel suivante :

$$\psi(x, y) = \exp\left(-\frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{\tau}\right), \quad (2.4)$$

où pour chaque pixel (x, y) , (ξ_x, ξ_y) est le déplacement jusqu'au point de contour le

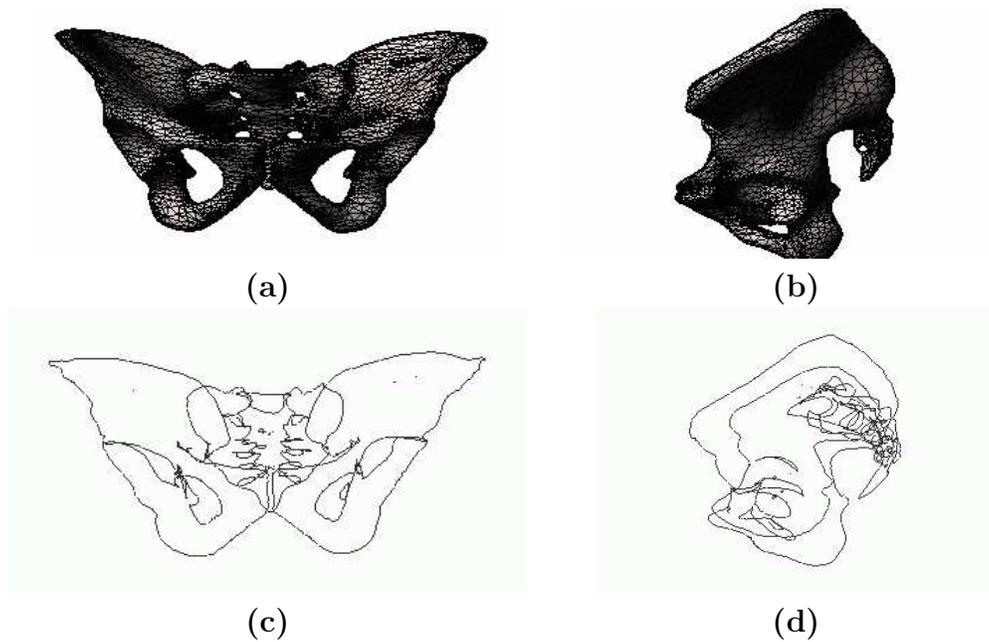


FIG. 2.3 – *Contours externes du modèle 3D : (a) et (b) modèle filaire, (c) et (d) contours externes.*

plus proche dans l'image des contours, et τ contrôle le degré de lissage du champ de potentiel.

On définit alors l'énergie de vraisemblance par :

$$E_l(s, I_{PA0}, I_{LAT}) = -\frac{1}{n_{PA0}} \sum_{\Gamma_{PA0}} \psi_{PA0}(x, y) - \frac{1}{n_{LAT}} \sum_{\Gamma_{LAT}} \psi_{LAT}(x, y) \quad (2.5)$$

où n_{PA0} et n_{LAT} représentent le nombre de points du contour externe projeté respectivement sur I_{PA} et I_{LAT} . Ce terme d'énergie devient minimal lorsque les contours externes projetés et les contours segmentés du bassin se superposent exactement (cf. Fig. 2.4).

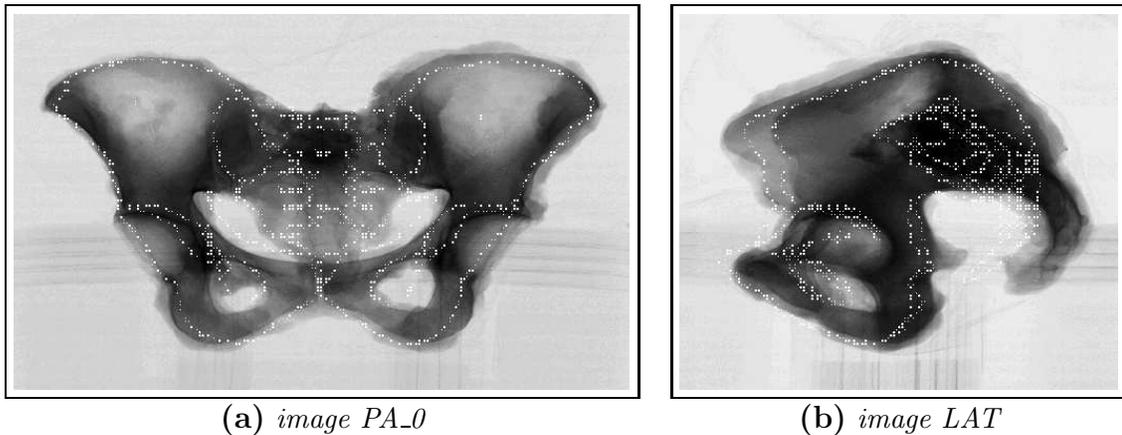


FIG. 2.4 – Contours du modèle 3D projetés sur les vues frontale et latérale.

2.2.3 L'énergie *a priori*

D'après [4], le terme d'énergie *a priori* est défini par :

$$E_p(s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{b_i^2}{\lambda_i}. \quad (2.6)$$

Le terme d'énergie *a priori* a pour but de pénaliser de trop grandes déformations admissibles par rapport au modèle moyen.

2.3 Optimisation de la fonction d'énergie

La fonction d'énergie à minimiser (2.3) est une fonction complexe avec plusieurs minima locaux. Une recherche globale est impossible étant donnée la taille de l'espace de déformation des paramètres. Pour résoudre ce problème, nous utilisons un algorithme d'optimisation stochastique d'exploration/sélection, récemment proposé par O. François [22] et déjà utilisé avec succès pour la reconstruction 3D de structure osseuse [3], la localisation de formes [11] et la minimisation de fonction d'énergie complexe.

2.3.1 Algorithme Exploration/Sélection

L'algorithme Exploration/Sélection appartient à la classe des algorithmes évolutionnaires. Son principal avantage réside dans l'ajustement de ses paramètres in-

ternes qui sont totalement indépendants de la fonction à minimiser. On peut le résumer ainsi (cf. 2.3.1) :

Soit F un ensemble fini, produit cartésien de k intervalles compacts $[m_i, M_i]$, et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ une suite de n solutions potentielles initiales choisies aléatoirement. $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta_i \in \theta} E(\theta_i)$ est l'élément θ_i de θ pour lequel $E(\theta_i)$ est minimal. Soit un graphe d'exploration connexe et non-orienté défini sur F et $\mathcal{N}(a)$ le voisinage de l'élément a sur ce graphe : $\mathcal{N}(a) = \{b \in F / \forall j \neq i, |b_j - a_j| \leq r(M_j - m_j), \text{ sinon } b_i = a_i\}$ avec r un nombre réel de $[0, 1]$ appelé rayon d'exploration. Chaque individu θ_i de la population θ parcourt le graphe d'exploration de manière aléatoire et indépendante. L'étape d'exploration consiste à choisir un nombre aléatoire N suivant une loi binômiale de probabilité p , $\mathcal{B}(n, p)$. Pour $i \leq N$, on remplace θ_i par $\nu_i \in \mathcal{N}(\theta_i) \setminus \{\hat{\theta}\}$ suivant une loi uniforme, sinon θ_i est remplacé par $\hat{\theta}$. On itère ce processus jusqu'au critère d'arrêt.

Algorithme E/S

But de l'algorithme : minimiser la fonction E sur l'ensemble F .

1. Initialization

Initialisation aléatoire de $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \in F^n$

$l \leftarrow 2$

2. Exploration/Selection

Répéter

1. Déterminer $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta_i \in \theta} E(\theta_i)$
2. Tirer N selon une loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$
 - Pour $i \leq N$, remplacer θ_i par $\nu_i \in \mathcal{N}(\theta_i) \setminus \{\hat{\theta}\}$
d'après une loi uniforme (Exploration)
 - Pour $i > N$, remplacer θ_i par $\hat{\theta}$ (Sélection)
3. $l \leftarrow l + 1$ et $p = l^{-1/D}$

jusqu'à un critère d'arrêt

Algorithme d'optimisation E/S.

2.3.2 Multirésolution

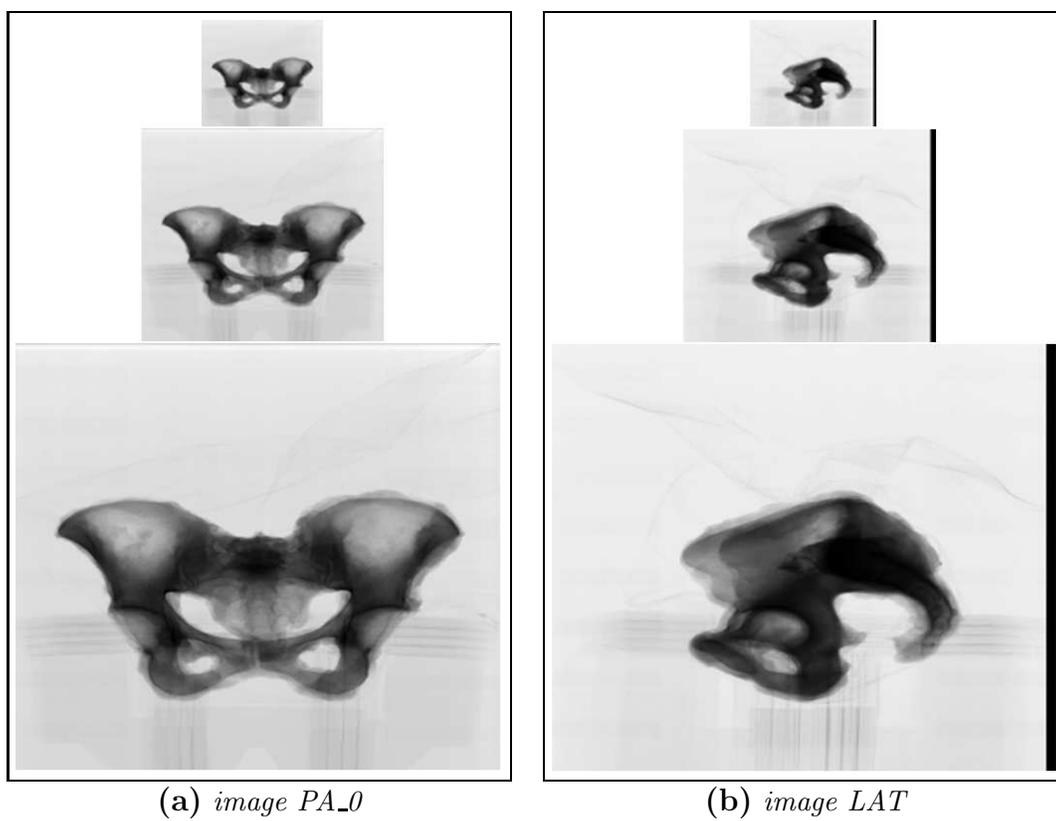
La fonction d'énergie à minimiser est une fonction complexe qui possède de nombreux minima locaux. Sa minimisation, résolue par notre algorithme stochastique d'exploration/sélection, peut donner lieu à des temps de calcul importants. L'introduction d'une approche multirésolution appliquée à notre modèle stochastique de reconstruction 3D permet de réduire le temps de convergence de l'algorithme d'optimisation.

Le modèle déformable est d'abord appliqué à des images de faible résolution, et ensuite raffiné sur des images de plus haute résolution. Pour cela, on utilise une pyramide quaternaire, composée de trois niveaux, où le niveau de base est l'image originale et les deux niveaux successifs sont de résolution plus réduite (cf. Fig. 2.5). Chaque niveau est obtenu à partir de la résolution précédente et non pas à partir de l'image originale. La structure d'une pyramide quaternaire est obtenue en représentant 4 pixels voisins ν_i appelés *filles* du niveau k par un pixel ω *père* au niveau $k + 1$ dont la valeur est la moyenne de leur niveaux de gris :

$$\text{NdG}_k(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^4 \text{NdG}_{k-1}(\nu_i)}{4}$$

La taille de l'image diminue et provoque une diminution de la résolution. Ce procédé permet de sous-échantillonner tout en appliquant un filtre moyenneur qui permet de conserver un maximum d'informations.

La minimisation de la fonction d'énergie à partir de radiographies de faible résolution fournit une première approximation de la solution. Cette solution intermédiaire est ensuite raffinée à l'étape d'optimisation suivante sur des images de plus haute résolution.

FIG. 2.5 – *Pyramide quaternaire.*

CHAPITRE 3

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

3.1 La base de données des bassins

Nous disposons de trois bases d'apprentissage différentes avec respectivement des modèles de 185, 1270 et 9274 points (voir Fig. 3.1) et des tailles de 8, 11 et 10 bassins.

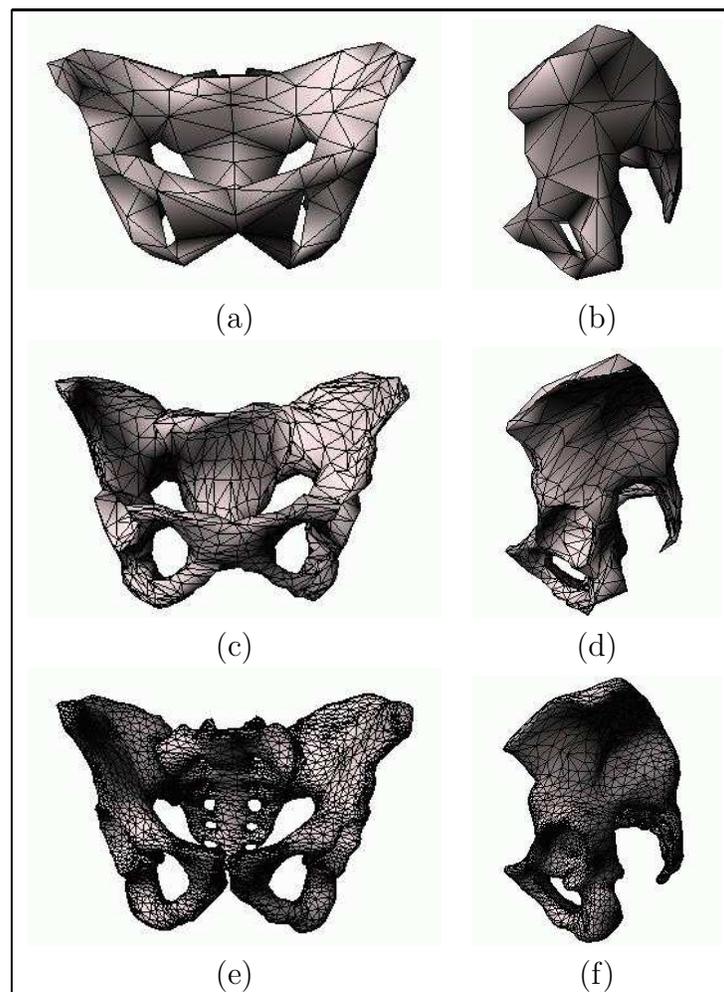


FIG. 3.1 – Modèles des 3 bases d'apprentissage : (a) et (b) modèle à 185 points, (c) et (d) modèle à 1270 points, (e) et (f) modèle à 9274 points.

3.2 Les images radiographiques

Dans notre application, nous utilisons deux images radiographiques (postéro-antérieure et latérale) calibrées de bassins secs obtenues simultanément par radiographie “EOS”.

3.3 La calibration

La calibration est nécessaire pour connaître tous les paramètres géométriques de l’environnement radiographique (la position, l’orientation et la distance focale de chacune des sources de rayon X). La scène est calibrée par l’évaluation, à partir des coordonnées connues d’un objet de référence, 3D (X, Y, Z) et 2D (u, v) , de la transformation qui relie ces coordonnées aux paramètres géométriques de l’environnement radiographique. L’objet de référence est généralement composé de billes de plomb repérables sur les radiographies. Le système EOS utilise une projection cylindrique (la source ponctuelle se déplace le long d’une droite). On détermine ces paramètres géométriques par l’algorithme DLT (*Direct Linear Transformation*)^[19] en résolvant le système :

$$\begin{aligned} u &= \frac{L_1.X + L_2.Y + L_3.Z + L_4}{L_9.X + L_{10}.Y + L_{11}.Z + 1} \\ v &= L_5.X + L_6.Y + L_7.Z + L_8 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dans notre application, les deux vues radiographiques ont été calibrées. On connaît donc les 11 paramètres L_i , et les matrices de passage des coordonnées 2D aux coordonnées 3D correspondantes.

3.4 Les résultats expérimentaux

Dans notre application, on a utilisé le détecteur de contours de Canny^[7] sur les vues radiographiques avec $\sigma = 1$, un masque de taille 3×3 , et des seuils haut et bas déterminés par expérimentation. On peut voir les contours obtenus avec le détecteur de Canny appliqué aux deux images radiographiques sur la figure 3.2. On

détermine les champs de potentiel sur ces deux vues (cf. Fig. 3.3) par la fonction de potentiel (2.4) avec $\tau = \frac{\text{taille des images}}{60.0}$.

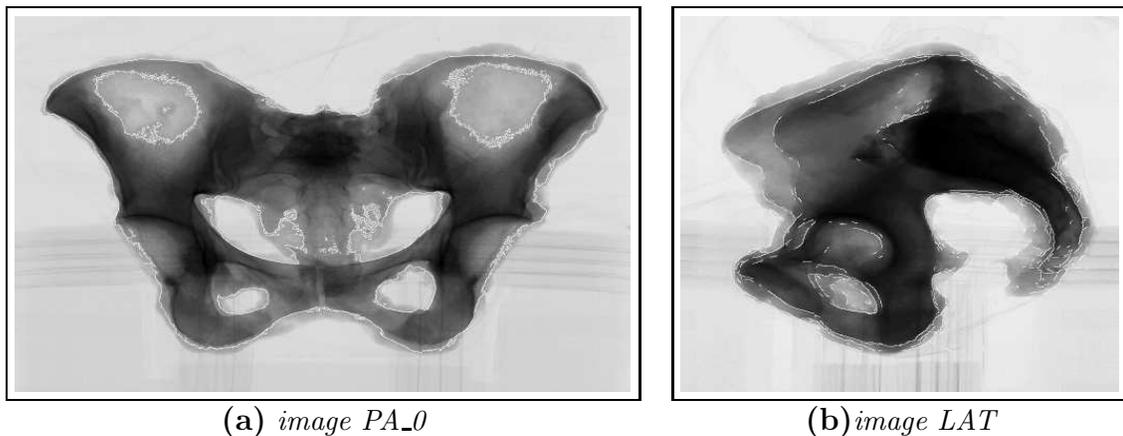


FIG. 3.2 – *Contours segmentés du bassin radiographié.*

On a appliqué une analyse en composantes principales sur notre base d'apprentissage en utilisant la technique proposée par Cootes ^[8] (cf. Annexe I). On a choisi de représenter au moins 95% des déformations statistiquement admissibles. Le Tableau 3.1 montre que les 4 premières valeurs propres intègrent 95.96% des déformations statistiquement admissibles dans la base à 185 points, 8 valeurs propres 95.84% dans la base à 1270 points, et 8 valeurs propres 97.71% des déformations dans la base à 9274 points.

On a déterminé de façon expérimentale le facteur de pondération β de la fonction d'énergie et on a pris $\beta = 0.02$. Les paramètres de l'algorithme E/S sont les suivants : la population de taille 100, le diamètre du graphe d'exploration $D = 32$. Le nombre maximal d'itérations dépend de la base utilisée et varie suivant la résolution de l'image.

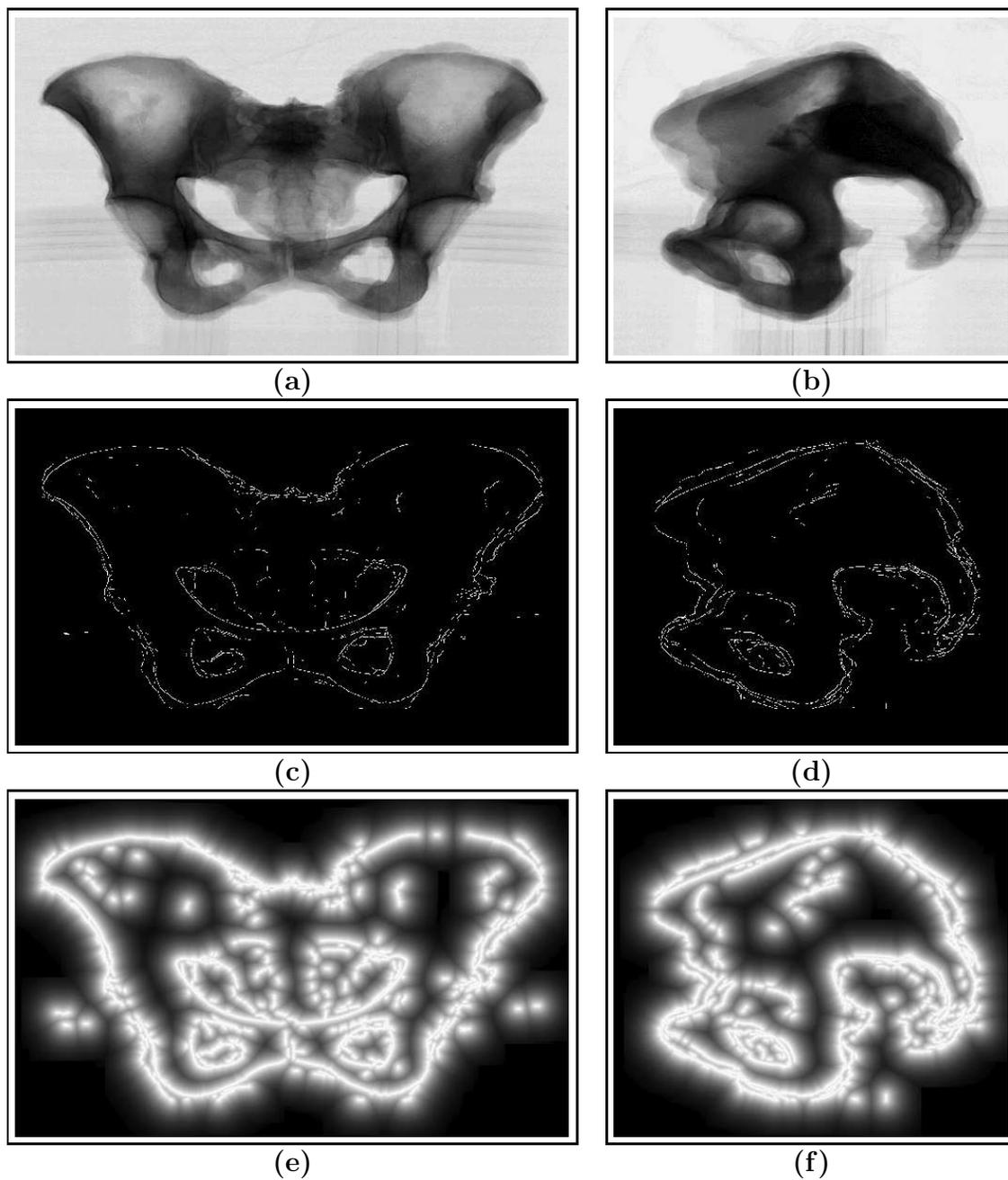


FIG. 3.3 – Prétraitement : (a) vue postéro-antérieure, (b) vue latérale, (c) et (d) détection de contours avec Canny, (e) et (f) champ de potentiel.

Base de bassins de 185 points

$\lambda_i/V_T(\%)$	λ_i/V_T cumulés (%)
77.94	77.94
10.25	88.19
5.51	93.70
2.26	95.96

Base de 1270 points

$\lambda_i/V_T(\%)$	λ_i/V_T cumulés (%)
47.38	47.38
15.75	63.13
11.61	74.74
6.64	81.38
4.42	85.80
4.31	90.11
3.03	93.13
2.71	95.84

Base de 9274 points

$\lambda_i/V_T(\%)$	λ_i/V_T cumulés (%)
46.42	46.42
13.02	59.44
11.82	71.26
8.52	79.79
5.97	85.76
5.10	90.86
3.55	94.42
3.30	97.71

TAB. 3.1 – Valeurs propres normalisées calculées sur les bases d'apprentissage.

La figure 3.4 montre les différents recalages 3D/2D du modèle déformable sur les radiographies, obtenus selon la base d'apprentissage utilisée.

La figure 3.5 montre le modèle 3D reconstruit avec l'utilisation de la base de 9274 points.

On peut voir les différents recalages 3D/2D obtenus à chaque résolution sur la figure 3.6.

Le Tableau 3.2 compare les résultats (énergie minimale et temps d'exécution) obtenus sur deux paires de radiographies différentes avec l'approche monorésolution et l'approche multirésolution en utilisant la base à 9274 points et pour un nombre maximal de 200 itérations (avec un PC de 2.0 GHz sous Linux).

Optimisation	Énergie		Temps d'exécution	
	<i>1^{er} bassin</i>	<i>2^{ème} bassin</i>	<i>1^{er} bassin</i>	<i>2^{ème} bassin</i>
monorésolution	$E = -0.837$	$E = -0.686$	10 h 24 min	10 h 4 min
multirésolution	$E = -0.842$	$E = -0.714$	9 h 3 min	8 h 44 min

TAB. 3.2 – *Temps d'exécution et minimum obtenus avec monorésolution et multirésolution pour deux paires de radiographies différentes et 200 itérations.*

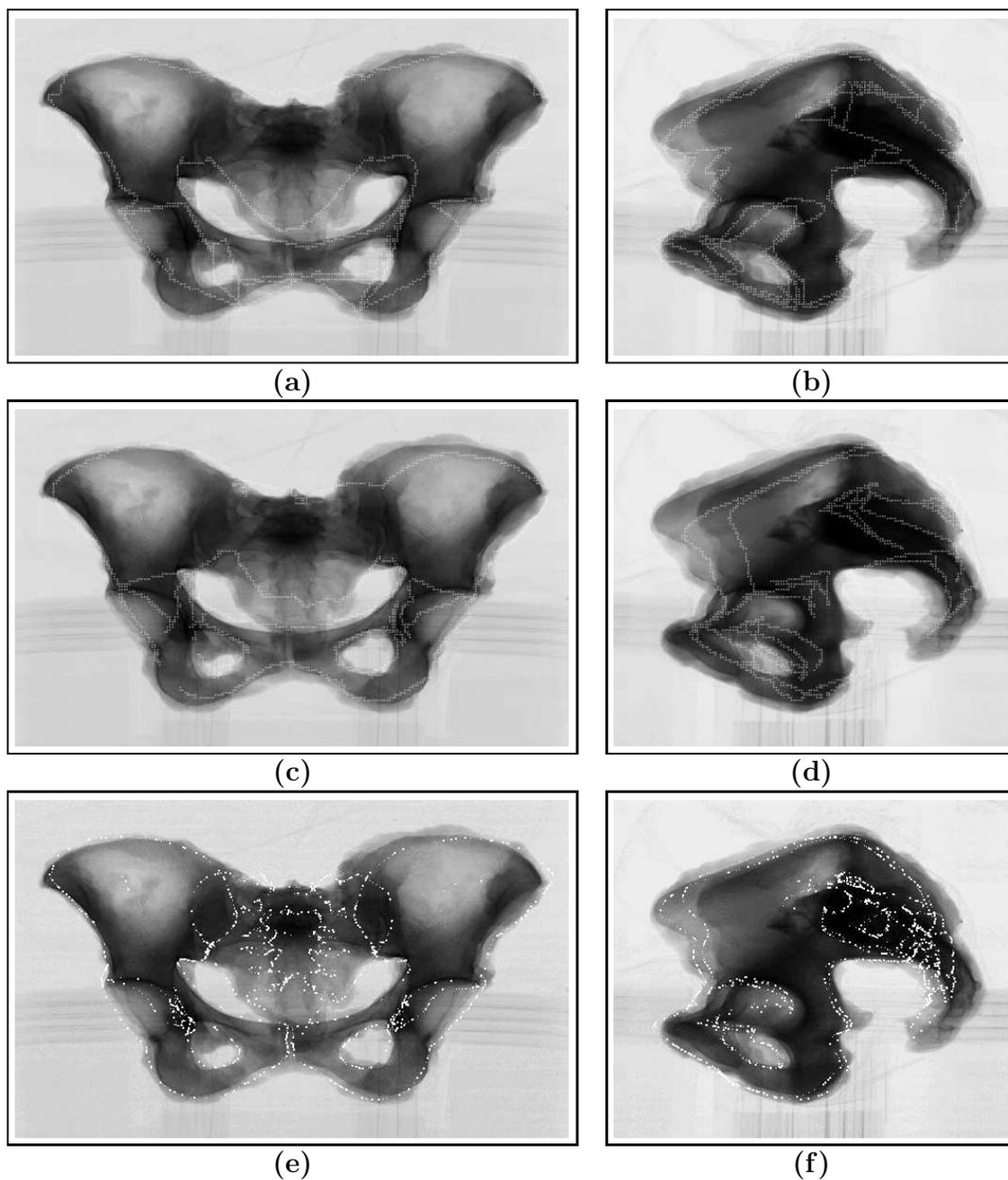


FIG. 3.4 – *Recalages 3D/2D obtenus suivant la base d'apprentissage utilisée : (a)-(b) base à 185 points : $E = -0.60$, 500 itérations, (c)-(d) base à 1270 points : $E = -0.55$, 200 itérations, (e)-(f) base à 9274 points : $E = -0.84$, 200 itérations.*

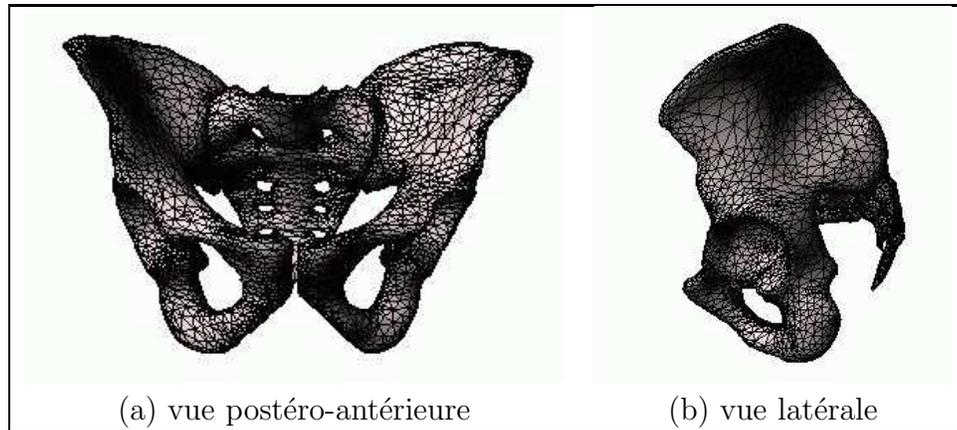


FIG. 3.5 – Bassin reconstruit avec la base de 9274 points.

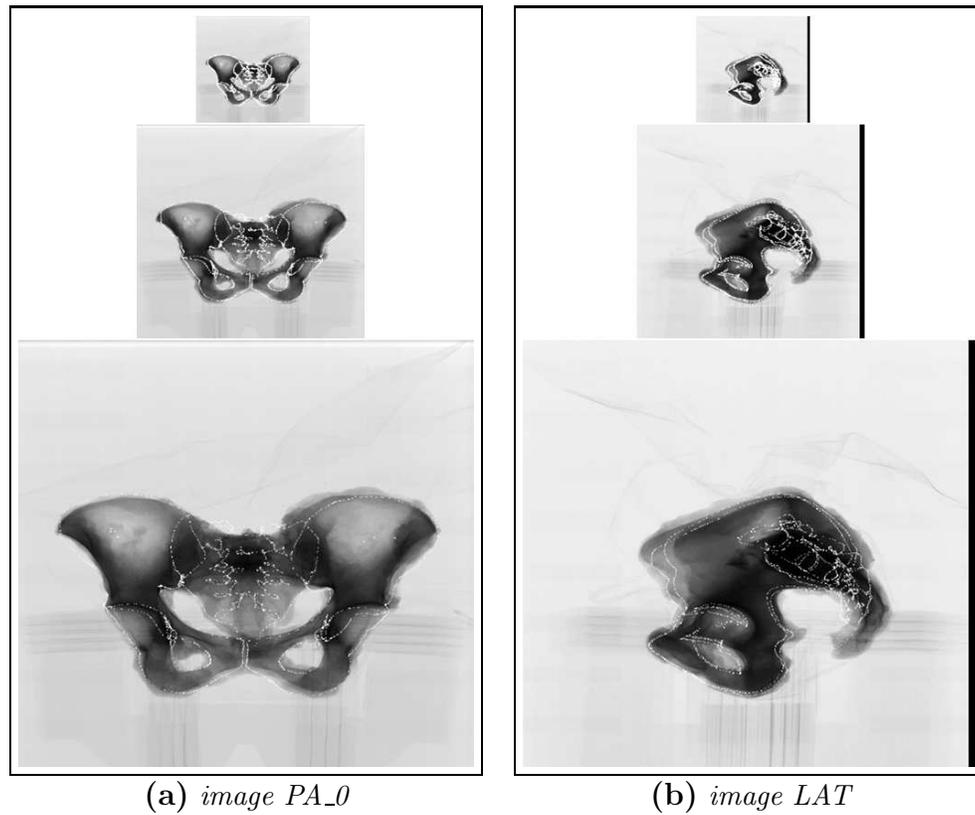


FIG. 3.6 – Recalages 3D/2D successifs obtenus avec l'approche d'optimisation multi-résolution.

DISCUSSION ET CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode de reconstruction 3D multirésolution non supervisée du bassin scoliotique, basée sur l'utilisation des contours du bassin détectés sur deux plans radiographiques conventionnels et sur une connaissance globale *a priori* de la structure géométrique du bassin et de ses déformations statistiques. D'un point de vue algorithmique, le problème de reconstruction 3D est formulé comme un problème de minimisation d'une fonction d'énergie efficacement résolu par un algorithme stochastique d'Exploration/Sélection combiné à une approche multirésolution. Cette méthode a été testée sur plusieurs paires de radiographies biplanaires et a montré des résultats satisfaisants.

L'utilisation de trois bases d'apprentissage différentes illustre l'influence de la qualité de la base (taille de la base, nombre de points des bassins) dans les résultats de notre reconstruction. L'utilisation de la base à 185 points ne fournit pas de bons résultats (cf. Fig. 3.4 (a) et (b)) : le modèle ne s'ajuste pas aux contours arrondis du bassin radiographié car la forme 3D du bassin est trop approximative (cf. Fig. 3.1 (a) et (b)). Les modèles 3D de la base de 1270 points ont une géométrie plus réaliste (cf. Fig. 3.1 (c) et (d)) mais présentent quelques défauts dans la région du trou pubien gauche (cf. Fig. 3.4 (c) et (d)). Les modèles 3D de la base à 9274 points sont visiblement plus détaillés (cf. Fig. 3.1 (e) et (f)) (les vertèbres du sacrum, la coupure entre les 2 os du bas) (cf. Fig. 3.4 (e) et (f)). Cependant, l'utilisation de cette base nécessite un temps de calcul important. Nous proposons d'utiliser un modèle de taille intermédiaire, plus détaillé que les modèles 3D de 185 et 1270 points. Malheureusement, nous ne disposons pas d'outils nécessaires à l'extraction d'un modèle de 3000 points environ à partir du modèle de 9274 points.

Les erreurs de reconstruction 3D proviennent de notre base d'apprentissage. Celle-ci est de faible taille et ne contient pas certaines déformations anatomiques ou pathologiques. Le modèle ne parvient pas à reconstruire toutes les déformations, d'où la nécessité d'utiliser une base d'apprentissage représentative et de taille suffisante.

Une partie des erreurs de reconstruction provient aussi de la qualité des images radiographiques des bassins que l'on cherche à reconstruire. Le système EOS qui nous les a fourni est toujours en période de test. De plus, la méthode est testée sur des images de bassins secs où les contours du bassin sont difficiles à détecter et se mêlent aux contours de la chair (cf. Fig. 3.2).

La minimisation utilisant l'approche multirésolution s'avère moins sensible aux minima locaux et converge plus rapidement vers un minimum de qualité proche de celui obtenu sans multirésolution (cf. Fig. 3.6 et Tableau 3.2).

Pour donner suite à notre projet, nous proposons :

- d'augmenter la taille de la base d'apprentissage,
- de tester notre méthode sur un nombre suffisant de paires radiographiques de différente qualité,
- d'étendre la multirésolution au modèle *a priori* dans le but d'apporter une certaine robustesse lorsqu'on dispose d'une base d'apprentissage de taille réduite. Par exemple, on pourrait appliquer une analyse multirésolution par ondelettes à notre modèle statistique 3D et appliquer une ACP sur les coefficients d'ondelettes obtenus, tel que suggéré dans [6],
- de valider notre méthode en comparant nos résultats de reconstruction à des modèles de bassins scannés servant de référence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Lakshmanan A. K. Jain, Y. Zhong. Object matching using deformable templates. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(3) :267–278, 1996.
- [2] B. Andre, J. Dansereau, and H. Labelle. Optimized vertical stereo base radiographic setup for the clinical three-dimensional reconstruction of the human spine. *Journal of Biomechanics*, 27(8) :1023–1035, 1994.
- [3] S. Benameur, M. Mignotte, H. Labelle, and J. De Guise. A hierarchical statistical modeling approach for the unsupervised 3d biplanar reconstruction of the scoliotic spine. *IEEE Transactions on BioMedical Engineering*, 2004, soumis.
- [4] S. Benameur, M. Mignotte, S. Parent, H. Labelle, W. Skalli, and J. De Guise. 3D/2D registration and segmentation of scoliotic vertebrae using statistical models. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 27(5) :321–337, 2003.
- [5] R.G. Burwell. 3D etiological and prognostic aspects of scoliotic deformities. *International Symposium on 3D Scoliotic Deformities*, pages 182–192, 1992.
- [6] D. Shen C. Davatzikos, X. Tao. Hierarchical active shape models, using the wavelet transform. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(3) :414 –423, 2003.
- [7] J. F. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6) :679–697, 1986.
- [8] T.F. Cootes, D. Cooper, C.J. Taylor, and J. Graham. Active shape models - their training and application. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(1) :38–59, 1995.
- [9] T.F. Cootes and C.J. Taylor. Active shape models - 'smart snakes'. In *British Machine Vision Conferenc*, pages 266–275, 1992.
- [10] J. Dansereau and I.A.F. Stokes. Measurements of three dimensional shape of the rib cage. *Journal of Biomechanics*, 21 :893–901, 1988.

- [11] F. Destrempe and M. Mignotte. Unsupervised localization of shapes using statistical models. In *International Conference on Signal and Image Processing*, pages 60–65, Kauai Marriott, Hawaii, USA, août 2002.
- [12] J. Diebolt and G. Celeux. Asymptotic properties of a stochastic EM algorithm for estimating mixture proportions. *Stochastic Models*, 9 :599–613, 1993.
- [13] M. Fleute and S. Lavallée. Nonrigid 3D/2D registration of images using statistical model. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer-Verlag, volume 38, pages 138–147. 1999.
- [14] B. Mouilleseaux P. Pries C. Mounier G. Duval-Beaupère, G. Taussig. Prognostic factors for idiopathic scoliosis. *International Symposium on 3D Scoliotic Deformities*, pages 211–216, 1992.
- [15] C. Gauvin. Modélisation géométrique du bassin. Master’s thesis, Ecole Polytechnique de l’Université de Montréal, 1996.
- [16] B. Godbout, C. Kauffmann, and J.A. de Guise. A simple 2D active contour model to segment non-convex objects in 3D images. In *Vision Interface*, pages 350–358, SFU Harbour Center, Vancouver, British Columbia, Canada, juin 1998.
- [17] J. Hadamard. *Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [18] J. Dansereau H. Labelle J.A De Guise, H. Mallouche. Techniques d’imagerie appliquées à la biomécanique rachidienne. *Rachis*, 7(3) :135–144, 1995.
- [19] G. T. Marzan. *Rational design for close-range photogrammetry*. PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 1976.
- [20] M. Moreland M.H. Pope, I.A.F. Stokes. The biomechanics of scoliosis. *CRC Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 11 :157–188, 1984.
- [21] D. Mitton, C. Landry, S. Veron, W. Skalli, F. Lavaste, and J.A. De Guise. 3D reconstruction method from biplanar radiography using non-stereocorresponding points and elastic deformable meshes. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 38(2) :133–139, 2000.

- [22] F. Olivier. Global optimization with exploration/selection algorithms and simulated annealing. *The Annals of Applied Probability*, 12 :248–271, 2002.
- [23] S. Parent, H. Labelle, W. Skalli, B. Latimer, and J.A. De Guise. Morphometric analysis of anatomic scoliotic specimens. *Spine*, 27(21) :2305–2311, 2002.
- [24] M.J. Pearcy. Stereo radiography of lumbar spine motion. In *Acta Orthopaedica Scandinavica Supplementum*, volume 56, pages 7–37, 1985.
- [25] A. Plamandon, M. Gnon, and G. Maurais. Application of a stereoradiographic method for the study of intervertebral motion. *Spine*, 13 :1027–1032, 1988.
- [26] I.A.F. Stokes, D.G. Wilder, J.W. Frymoyer, and M.H. Pope. Assessment of patients with low-back pain by biplanar radiographic measurement of intervertebral motion. *Spine*, 6 :233–240, 1981.
- [27] D.H. Cooper T.F. Cootes, C.J. Taylor and J. Graham. Training models of shape from sets of examples. In *British Machine Vision Conference*, pages 9–18, 1992.
- [28] F. Trochu. A contouring program based on dual kriging interpolation. *Engineering with Computers*, 9 :160–177, 1993.

Annexe I

ACP d'une base avec moins d'échantillons que de dimensions

Lorsqu'on dispose d'une base d'apprentissage de N vecteurs $n \times 3$, s_i , avec $N < n$, la matrice de covariance de taille $3n \times 3n$ peut être très grande. Cela peut engendrer des problèmes d'espace mémoire pour stocker cette matrice. De plus, le temps de calcul des vecteurs et valeurs propres de la matrice, proportionnel au cube de la taille de la matrice, peut être relativement important. Cependant, on peut calculer les vecteurs propres et les valeurs propres à partir d'une matrice de taille $N \times N$ plus petite.

En soustrayant la forme moyenne \bar{s} de chacun des vecteurs de forme s_i , on obtient la matrice D :

$$\mathbf{D} = ((s_1 - \bar{s}) | \dots | (s_N - \bar{s})),$$

la matrice de covariance S est égale à :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N} \mathbf{D} \mathbf{D}^T.$$

Soit T la matrice de taille $N \times N$:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{N} \mathbf{D}^T \mathbf{D}.$$

Soient e_i les N vecteurs propres de la matrice T associées aux valeurs propres λ_i , triées dans un ordre décroissant. Il peut être démontré que les N vecteurs De_i sont tous des vecteurs propres de la matrice S associés aux valeurs propres λ_i , et les vecteurs propres restants de S ont des valeurs propres nulle. Notons que De_i ne sont pas forcément des vecteurs propres unitaires.