

S.V.P. ME SIGNALER TOUTE FAUTE DE FRAPPE, GRAMMAIRE, ORTHOGRAPHE OU LOGIQUE; LES FAUTES DE LOGIQUE VOUS APPORTENT DES POINTS SUPPLÉMENTAIRES POUR LA NOTE FINALE. TOUTE SUGGESTION D'UNE MEILLEURE TRADUCTION D'UN TERME ANGLAIS SERA ÉGALEMENT BIENVENUE.

Exemple : AFD \rightarrow expression régulière

Soit $L = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \equiv 2 \pmod{3}\}$ et soit $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ l'AFD avec $\delta(q_i, x) = q_{(i+1) \pmod{3}}$ pour $i \in [3]$ et $x \in \{a, b\}$. On voit facilement (preuve?) que $L = L(M)$. On va construire une expression régulière R_L telle que $L(R_L) = L$ à partir de M même si on en a une très simplement $-(a+b)^2((a+b)^3)^*$ (ici on utilise des raccourcis, la vraie expression régulière est $((a+b) \cdot (a+b)) \cdot (((a+b) \cdot (a+b)) \cdot (a+b))^*$.) Rappelons que l'on construit R_{ij}^k pour $i, j \in [3]$ et $-1 \leq k \leq 2$ par récurrence sur k , en commençant par R_{ij}^{-1} . Rappelons également qu'en général, R_{ij}^k est une expression régulière dont le langage consiste des mots qui permettent de passer de q_i à q_j en ne passant que par des états numérotés $0, \dots, k$, i.e. $L(R_{ij}^k) = \{w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, w) = q_j \text{ et } \hat{\delta}(q_i, a_1, \dots, a_m) \in \{q_0, \dots, q_k\} \text{ pour } 1 \leq m < n\}$. Dans notre cas, la fonction δ est décrite par ce tableau :

	a	b
q_0	q_1	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_0	q_0

Les expressions régulières R_{ij}^k seront construites dans le tableau suivant.

	-1	0	1	2
00				
01				
02				
10				
11				
12				
20				
21				
22				

On le remplit colonne par colonne, en mettant dans la case (ij, k) l'expression régulière $R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} + R_{ik}^{k-1} \cdot (R_{kk}^{k-1})^* \cdot R_{kj}^{k-1}$. Pour mieux visualiser, notons $[ij, k]$ le contenu de la case (ij, k) . On a alors

$$[ij, k] = [ij, k - 1] + [ik, k - 1][kk, k - 1]^*[kj, k - 1]$$

où on a omis les parenthèses pour une meilleur lisibilité. Avec ceci, on obtient les tableaux suivants (en se rappelant que $[ij, -1] = R_{ij}^{-1} = x_1 + x_2 + \dots + x_t$ tels que $\delta(q_i, x_\ell) = q_j$ pour $\ell = 1, \dots, t$).

Sans simplification.

	-1	0	1	2
00	ε			
01	$(a + b)$			
02	\emptyset			
10	\emptyset			
11	ε			
12	$(a + b)$			
20	$(a + b)$			
21	\emptyset			
22	ε			

	-1	0	1	2
00	ε	$\varepsilon + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon$		
01	$(a + b)$	$(a + b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a + b)$		
02	\emptyset	$\emptyset + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset$		
10	\emptyset	$\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon$		
11	ε	$\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a + b)$		
12	$(a + b)$	$(a + b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset$		
20	$(a + b)$	$(a + b) + (a + b) \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon$		
21	\emptyset	$\emptyset + (a + b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a + b)$		
22	ε	$\varepsilon + (a + b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset$		

En simplifiant ($\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon$, $R \cdot \emptyset = \emptyset \cdot R = \emptyset$; en fait on remplace une expression régulière R par une autre R' , équivalente, i.e. t.q. $L(R) = L(R')$ et ces équivalences, parfois évidentes, devraient être prouvées. . .) on a des tableaux un peu plus clairs. Voici le tableau après les simplifications. Conseil : essayer de le refaire vous-même.

	-1	0	1	2
00	ε	ε	ε	$((a+b)^3)^*$
01	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)((a+b)^3)^*$
02	\emptyset	\emptyset	$(a+b)^2$	$(a+b)^2((a+b)^3)^*$
10	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$(a+b)^2((a+b)^3)^*$
11	ε	ε	ε	$((a+b)^3)^*$
12	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)((a+b)^3)^*$
20	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)((a+b)^3)^*$
21	\emptyset	$(a+b)^2$	$(a+b)^2$	$(a+b)^2((a+b)^3)^*$
22	ε	ε	$(\varepsilon + (a+b)^2)$	$((a+b)^3)^*$

Le langage de M est donc $L(R_{02}^2) = L((a+b)^2((a+b)^3)^*)$, comme prédit au début.