

Rappel de quelques notations
version 0.97
07.09.2013

SVP me signaler toute erreur ou faute de frappe et suggérer d'autres notations ou définitions à ajouter.

Soient X et Y deux ensembles. Si x est un élément de X , on écrit $x \in X$, sinon $x \notin X$. On a donc trivialement que $X = \{x : x \in X\}$. Soient également $n, k \in \mathbb{N}$; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des *naturels*, i.e. entiers non-négatifs. On note \mathbb{R} l'ensemble des réels.

- $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$
- $|X|$ est la *cardinalité* de X , i.e. le nombre d'éléments de X quand X est fini.
- $Y \subseteq X$ si $x \in X$ quand $x \in Y$; on a que $Y \subseteq X$ si, et seulement si, $Y \cap X = Y$
- $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ ou } x \in Y\}$
- $X \cap Y = \{x : x \in X \text{ et } x \in Y\}$
- $X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ et } x \notin Y\}$
- $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
- $X^Y = \{f : Y \rightarrow X : f \text{ est une fonction}\}$
- $\mathbb{N}^{\geq k} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$; et, mutatis mutandis, on définit $\mathbb{R}^{\geq 0}$, $\mathbb{R}^{>0}$, etc. Parfois on écrit \mathbb{N}^+ pour $\mathbb{N}^{>0}$ et \mathbb{R}^+ pour $\mathbb{R}^{>0}$.
- $\binom{n}{k}$ est le nombre de manières de choisir k objets parmi n (que l'on considère distincts); on a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{X}{k} = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}$
- (*notation privée mais pratique*) $\mathcal{P}_b = \{b^k : k \in \mathbb{N}\}$, pour $b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$
- $G = (V, E)$ est un graphe non orienté, $E \subseteq \binom{V}{2}$; pas de boucles, pas d'arêtes multiples. L'ensemble de sommets est V , l'ensemble d'arêtes est E . On écrit presque toujours uv pour $\{u, v\}$, mais on adopte une autre notation si celle-ci est ambiguë.
- Une chaîne de longueur k dans G est une suite $u_0 \dots u_k$ de sommets tels que $u_i u_{i+1} \in E$ pour $i \in [k]$. Elle est simple si tous les u_i sont distincts.
- Un cycle de longueur k est une chaîne $u_0 \dots u_{k-1}$ avec l'arête additionnelle $u_0 u_{k-1}$. Il est simple si les sommets sont tous distincts.

- Un graphe $G = (V, E)$ est connexe si pour toute paire u, v de sommets il existe une chaîne $u_0 \dots u_k$ telle que $u = u_0$ et $v = u_k$. Notons que la chaîne de longueur 0 est admissible, donc le graph $(\{u\}, \emptyset)$ est connexe.
- La distance entre deux sommets u, v dans un graphe $G = (V, E)$ est la longueur d'un plus court chemin entre eux.
- Le voisinage du sommet u dans un graphe $G = (V, E)$ est l'ensemble $N(u) = \{v \in V : uv \in E\}$; on écrit $N_G(u)$ si on veut souligner dans quel graphe on regarde. La cardinalité du voisinage de u est le degré de u , i.e. $d(u) = |N(u)|$.
- Des définitions semblables s'appliquent, mutatis mutandis, au graphe orienté $D = (V, A)$, avec $A \subseteq V \times V$ l'ensemble d'arcs. Notons que dans ce cas des boucles (u, u) sont permises et que les arcs peuvent relier deux sommets dans les deux directions. Il faut donc modifier les notions de chaîne (qui devient *chemin*), de cycle (*circuit*), de connexe (*connexe* et *fortement connexe*), de voisinage (*voisinage extérieur*, *voisinage intérieur*) et de degré (*extérieur*, *intérieur*).
- Un graphe $H = (U, F)$ est un sous-graphe du graphe $G = (V, E)$ quand $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$. Notons qu'étant donnée la définition d'un graphe, on a en fait $F \subseteq E \cap \binom{U}{2}$. Une définition semblable s'applique aux graphes orientés. On dit que H est *induit* par F si $U = \{u \in V : \text{il existe } v \in V \text{ tel que } uv \in F\}$. Il est induit par U si $F = E \cap \binom{U}{2}$. On écrit $H = G[F]$ ou $H[U]$, suivant le cas.
- Un graphe $H = (V, F)$, $F \subseteq E$, est un sous-graphe *couvrant* du graphe $G = (V, E)$.
- Un *ordre topologique* d'un graphe orienté $D = (V, A)$ est une énumération $v_1, \dots, v_{|V|}$ des sommets telle que si $v_i v_j \in A$ alors $i < j$.
- Un graphe connexe sans cycle est un arbre. Dans un arbre, un sommet de degré 1 est une feuille. Un arbre avec un sommet distingué r (racine) s'appelle arborescence. Puisque on peut partitionner les sommets d'une arborescence en ensembles $N_i = \{u \in V : d(r, u) = i\}$, $i = 0, 1, \dots$ (bien sur à partir d'un i , $N_i = \emptyset$ quand G est fini), on a une notion implicite de direction: on imagine une arête uv orientée de u vers v si $u \in N_i$ et $v \in N_{i+1}$. Les enfants d'un sommet $u \in V$ sont les sommets $v \in N(u)$ tels que $d(r, v) = d(r, u) + 1$; on appelle u le parent de ses enfants (puisque'il n'y a pas de cycles, tout sommet, sauf la racine, a un parent unique). Dans une arborescence, les feuilles sont les sommets sans enfants (ce qui est la même chose que les sommets de degré 1 qui ne sont pas la racine, sauf quand l'arborescence ne contient que la racine qui est alors également feuille).
- Une arborescence dans laquelle chaque sommet a au plus k enfants s'appelle *arbre k-aire*. En informatique on considère souvent une arborescence comme *ordonnée* par un ordre total \preceq vérifiant

- les sommets à distance i de la racine précèdent les sommets à distance $j > i$ de la racine;
- les enfants de chaque sommets sont ordonnés par un ordre total et si $u \preceq v$, alors les enfants de u précèdent ceux de v .

Ceci permet l'intuition de dessiner l'arborescence dans l'ordre d'abord par distance de la racine et ensuite de gauche à droite sur chaque niveau.

Un arbre k -aire est *plein* si tout sommet interne a exactement k enfants. Un arbre k -aire est *complet* si tous les sommets internes précèdent toutes les feuilles, tous les sommets internes sauf peut-être le dernier ont exactement k enfants chacun, et le dernier sommet interne est au niveau $t - 1$. Attention, la terminologie est parfois différente, vérifier les définitions utilisées. Un arbre k -aire complet est facile à représenter par un tableau. Comment?

- Soit $G = (V, E)$ un graphe avec au moins 3 sommets. On dit que G est 2-connexe s'il est connexe et la suppression d'un sommet ne le déconnecte pas. C'est-à-dire, quelque soit $u \in V$, le graphe $G - u = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{uv : v \in V\})$ est toujours connexe.
- Un sommet u dans un graphe $G = (V, E)$ est un *point d'articulation* si G est connexe et $G - u$ ne l'est pas. Donc un graphe avec au moins 3 sommets est 2-connexe si, et seulement si, il n'a aucun point d'articulation.
- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *bloc* B de G est un sous-graphe maximal sans point d'articulation (*maximal* veut dire que si on ajoute n'importe quel sommet pas dans B avec les arêtes vers B , le graphe qui en résulte aura un point d'articulation). Notons que K_2 , le graphe complet avec 2 sommets, c'est-à-dire, une arête seule, est un bloc.