Vision par ordinateur: Estimation de paramètres

Sébastien Roy
Jean-Philippe Tardif

Département d'Informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal

Hiver 2007

Au programme

1. Décompositions utiles
2. Optimisation ou estimation de paramètres
   - Introduction
   - Problèmes convexes
   - Problèmes non-convexes
3. Homographie
4. Méthodes robustes

Sommaire

Décomposition symétrique des valeurs propres

Définition

Symmetric eigenvalue decomposition
Pour $\mathcal{A}$ symétrique :

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}_{n\times n}\Lambda\mathcal{Q}^{\mathsf{T}}$$

$\mathcal{Q}\mathcal{Q}^{\mathsf{T}} = \mathsf{I}, \quad \Lambda = \mathsf{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n),$

- Colonnes de $\mathcal{Q}$ sont les **vecteurs propres** orthogonaux entre eux
- λ_i sont les **valeurs propres**
- On ordonne $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$

Matrice (semi-)définie positive

Définie positive

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathcal{Q} \mathbf{x} > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Équivalent à toutes ses valeurs propres positives, *i.e.*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n > 0$$

Semi-définie positive

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathcal{Q} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$$

- Conditions nécessaires pour effectuer certaines décompositions

Coniques : exercices

- À quoi correspond la décomposition d'une conique $\mathcal{C} = \mathcal{Q}\Lambda\mathcal{Q}^{\mathsf{T}}$?
- Dans quel(s) cas $\mathcal{C}$ est définie positive ?
- Semi-définie positive ?

Décomposition QR

Définition

Pour une matrice carrée :

$$\mathcal{A}_{n\times n} = \mathcal{Q}_{n\times n}\mathcal{R}_{n\times n}, \quad \mathcal{Q}^{\mathsf{T}}\mathcal{Q} = \mathsf{I}, \quad \mathcal{R} \text{ triangulaire supérieure droite}$$

Définition

Pour une matrice rectangulaire :

$$\mathcal{A}_{n\times p} = \begin{bmatrix}\mathcal{Q}_1 & \mathcal{Q}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{R} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}, \quad {\mathcal{Q}_1}^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_1 = \mathsf{I}, {\mathcal{Q}_2}^{\mathsf{T}}\mathcal{Q}_2 = \mathsf{I},$$

$$\mathcal{Q}_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}, \mathcal{Q}_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n\times p}$$

Utile pour :

- Système d'équations sous-déterminé,
- Décomposition RQ de la matrice de caméra
- Auto-calibrage affine

Décomposition RQ

Définition

Pour une matrice carrée :

$$\mathcal{A}_{n\times n} = \mathcal{R}_{n\times n}\mathcal{Q}_{n\times n}, \quad \mathcal{Q}^{\mathsf{T}}\mathcal{Q} = \mathsf{I}, \quad \mathcal{R} \text{ triangulaire supérieure droite}$$

- Calculable à partir d'une QR (essayez-le !)
- $\mathcal{Q}$ est une matrice de rotation, ou presque.

Décomposition en valeur singulière : SVD

Définition

Singular Value Décomposition

$$\mathcal{A}_{m\times ng} = \mathcal{U}_{m\times r}\Sigma(\mathcal{V}_{n\times r})^{\mathsf{T}}$$

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^{\mathsf{T}} = \mathsf{I}, \quad \mathcal{V}\mathcal{V}^{\mathsf{T}} = \mathsf{I}$$

$$\Sigma = \mathsf{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_n)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > ... > \sigma_r > 0$$

- σ_i valeurs singulières
- $\mathbf{u}_i$ colonnes de $\mathcal{U}$ vecteurs singuliers gauches
- $\mathbf{v}_i$ colonnes de $\mathcal{V}$ vecteurs singuliers droits
- r est la **Rang** de $\mathcal{A}$ (prochaine diapo)

Décomposition en valeur singulière : SVD

On peut réécrire le tout :

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$$

Lien avec décomposition symmétrique des valeurs propres : pour $\mathcal{A} = \mathcal{U}\Sigma\mathcal{V}^\mathsf{T}$

$$\mathcal{A}^\mathsf{T}\mathcal{A} = \mathcal{V}\Sigma\mathcal{U}^\mathsf{T}\mathcal{U}\Sigma\mathcal{V}^\mathsf{T} = \mathcal{V}\mathcal{D}^2\mathcal{V}^\mathsf{T}$$

- $\mathcal{A}^\mathsf{T}\mathcal{A}$ est définie positive

Donc les valeurs singulières au carré de $\mathcal{A}$ sont les valeurs propres de $\mathcal{A}^\mathsf{T}\mathcal{A}$

La SVD est **très, très** utile en Vision !

Utilité de la SVD : Rang d'une matrice

Définition

Le maximum entre :

- Le nombre de colonnes linéairement indépendantes
- Le nombre de rangées linéairement indépendantes

Vérifiable par le nombre de valeurs singulières non-nulles

Utilité de la SVD : Pseudo-inverse

(ou inverse de Moore-Penrose)

Définition

La pseudo-inverse de $\mathcal{A}_{m\times n} = \mathcal{U}\Sigma\mathcal{V}^{\mathsf{T}}$ est donnée par :

$$\mathcal{A}^{\dagger} = \mathcal{V}\Sigma^{\dagger}\mathcal{U}^{\mathsf{T}}$$

Propriétés :

- $\star$ $\mathcal{A}\mathcal{A}^{\dagger}\mathcal{A} = \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}^{\dagger}\mathcal{A}\mathcal{A}^{\dagger} = \mathcal{A}^{\dagger}$
- $(\mathcal{A}A^{\dagger})^{*} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{\dagger}$
- $(A^{\dagger}\mathcal{A})^{*} = \mathcal{A}^{\dagger}\mathcal{A}$
- On peut calculer $\Sigma^{\dagger}$ efficacement

Si le rang de $\mathcal{A}$ est plein $(= m)$, $\mathcal{A}^{\dagger} = (\mathcal{A}^{\mathsf{T}}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^{\mathsf{T}}$

Utilité de la SVD : Pseudo-inverse

Pour une matrice diagonale :

$$D_{ii} = \begin{cases} 0 \text{ pour } D_{ii} = 0 \\ {D_{ii}}^{-1} \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Si les colonnes sont linéairement indépendantes :

$$\mathcal{A}^{\dagger}\mathcal{A} = \mathsf{I}$$

- Si les rangées sont linéairement indépendantes :

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{\dagger} = \mathsf{I}$$

- Si les colonnes et rangées sont linéairement indépendantes :

$$\mathcal{A}^{\dagger} = A^{-1}$$

Utilité de la SVD : Moindre carré linéaire

Définition

Optimiser

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$$

- On utilise la pseudo-inverse

$$\mathcal{A}^{\dagger}\mathbf{b}$$

Mais attention, il y a plusieurs façon de calculer $\mathcal{A}^{\dagger}$ dans ce cas :

- Formule directe
- ⋆ SVD

Utilité de la SVD : Système linéaire homogène

Définition

Optimiser

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \text{sujet à la contrainte} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

- La contrainte est nécessaire puisque le minimum serait $\mathbf{x} = 0$

Pour $\mathcal{A} = \mathcal{U}\Sigma\mathcal{V}^{\mathsf{T}}$ Le vecteur singulier droit correspondant à la plus petite valeur singulière (dernière colonne de $\mathcal{V}$)

Utilité de la SVD : Système linéaire homogène

Pourquoi ?

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| &= \|\mathcal{U}\Sigma\mathcal{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\| \\ &= \|\Sigma\mathcal{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\| \qquad \text{puisque } \|\mathcal{U}\mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\| \end{aligned}$$

On renomme $\mathbf{y} = \mathcal{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$, notre nouveau problème est :

$$\|\mathcal{D}\mathbf{y}\| \text{ sujet à } \|\mathcal{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$$

et comme $\mathcal{D}$ est diagonale avec éléments ordonnées en ordre décroissant, la solution est

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

et donc notre solution pour $\mathbf{x}$ est

$$\mathcal{V}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \text{ puisque } \mathcal{V}\mathcal{V}^{\mathsf{T}} = \mathsf{I}$$

i.e. la dernière colonne de $\mathcal{V}$

Factorisation de Cholesky

Définition

Pour $\mathcal{A}_{n\times n}$ symétrique définie positive on peut la factoriser :

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}_{n\times n}\mathcal{L}^{\mathsf{T}}$$

avec $\mathcal{L}$ est triangulaire inférieure

- Décomposition LU symétrique

Utile pour :

- Calibration de caméra

Sommaire

Sommaire

Optimisation

Définition

L'étude des problèmes pour lesquels nous voulons minimiser ou maximiser une fonction réelle par un choix de valeurs réelles ou entières dans un certain ensemble

- "un certain ensemble" réfère à certaines contraintes.
  - Égalités, Inégalités
  - Un élément qui satisfait aux contraintes est dit *faisable*

Minimum

Global (ce qu'on cherche idéalement)

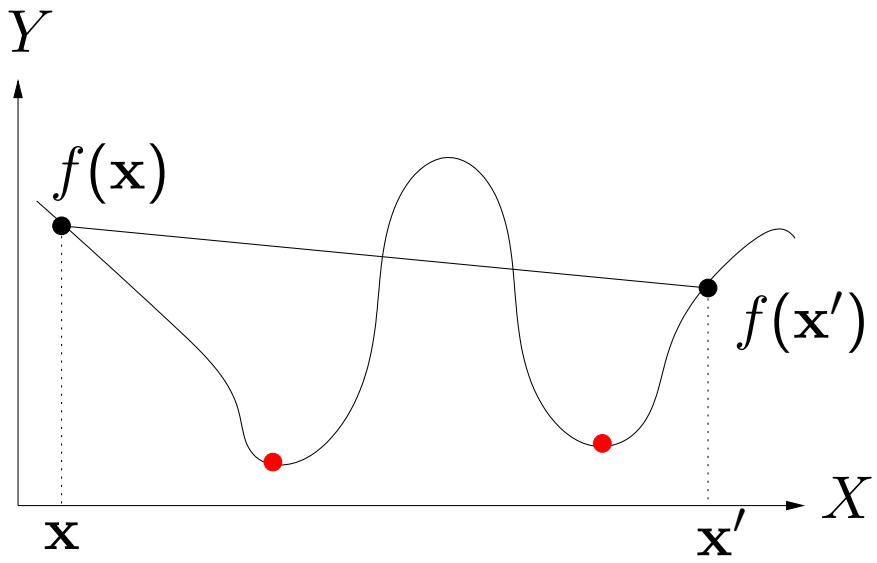
$\mathbf{x}^*$ est dit minimum global de f si

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$$

Local

$\mathbf{x}^*$ est dit minimum local de f s'il existe ϕ tel que

$$\forall\ \mathbf{x} \text{ t.q. } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \phi, f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$$

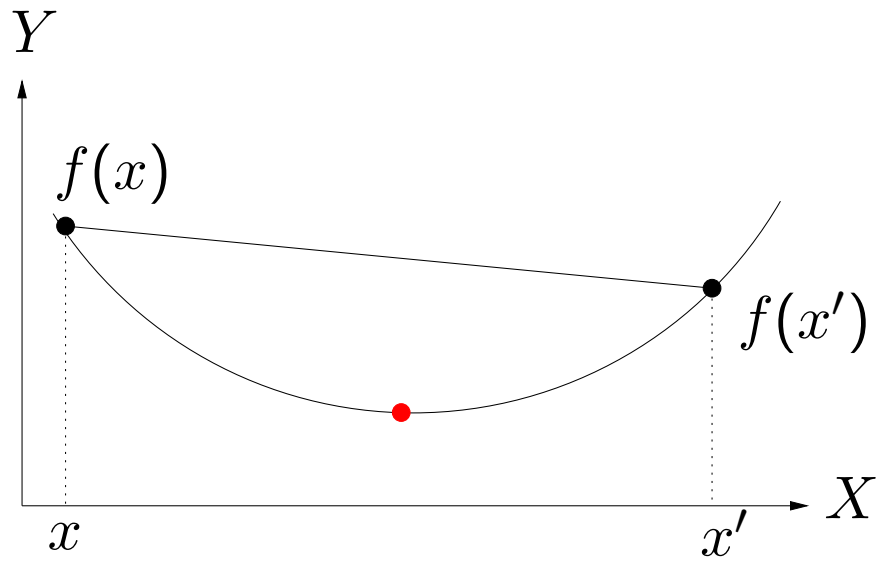


Sommaire

Fonction convexe

Définition

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(x')$$



- Plusieurs de nos problèmes sont convexes

Un seul minimum (global) qu'on peut "facilement" trouver

Voir : Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, "Convex Optimization"

Exemples de problèmes convexes

Système d'équations linéaires

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$$

(pseudo-inverse)

Système d'équations homogène

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \text{sujet à la contrainte} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

(SVD)

Système homogène et contrainte linéaire

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \text{sujet à la contrainte} \quad \|\mathbf{x}\| = 1 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{C}\mathbf{x}\| = 0$$

(2 SVD)

etc...

Système d'équation linéaire : Régression linéaire

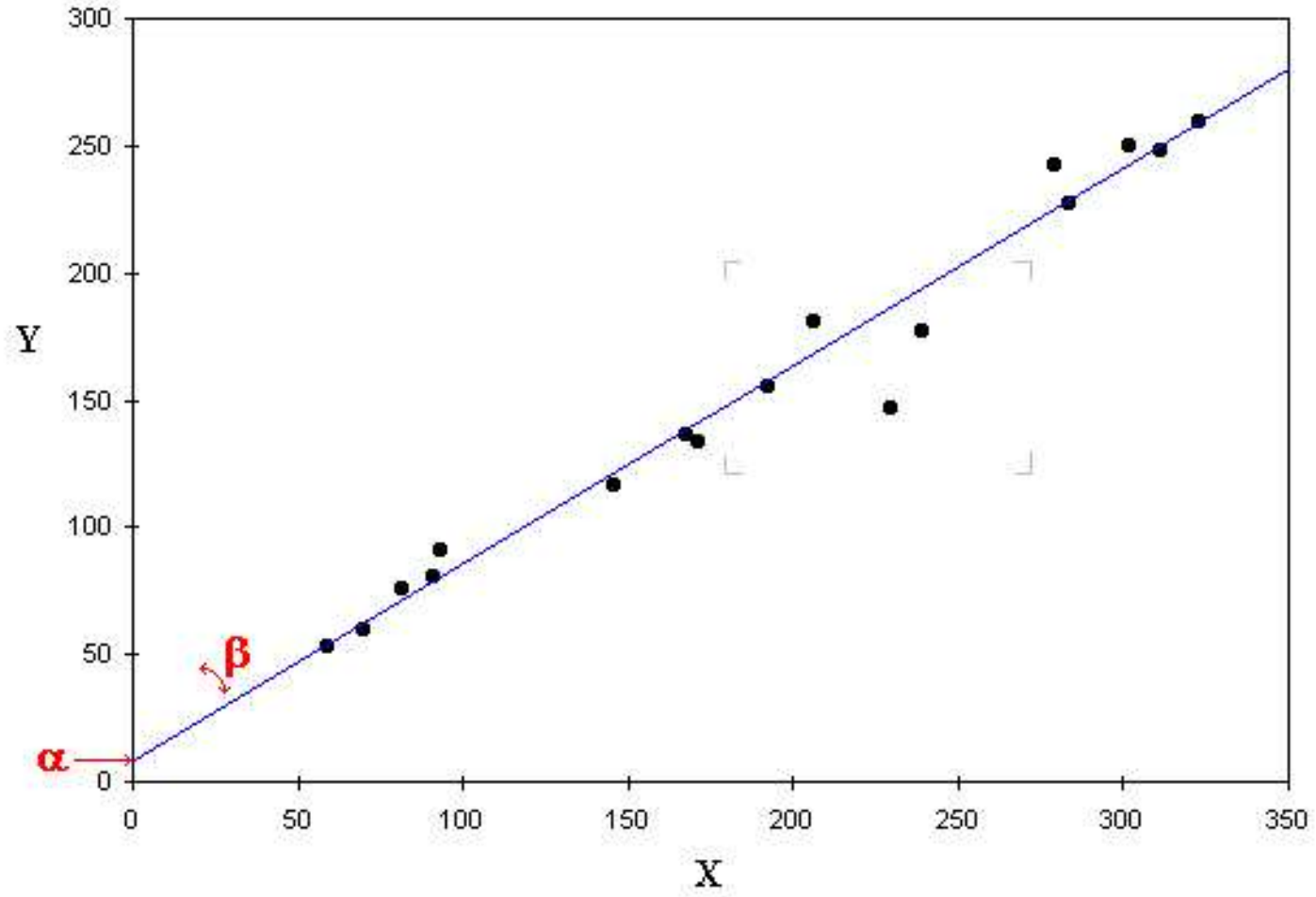


FIG.: http://www.le.ac.uk/bl/gat/virtualfc/Stats/regression/regr1.html

Système d'équation linéaire : Régression linéaire

Définition

$$y_i = \alpha + \beta u_i + e_i \leftrightarrow e_i = v_i - \alpha + \beta u_i$$

Optimisation

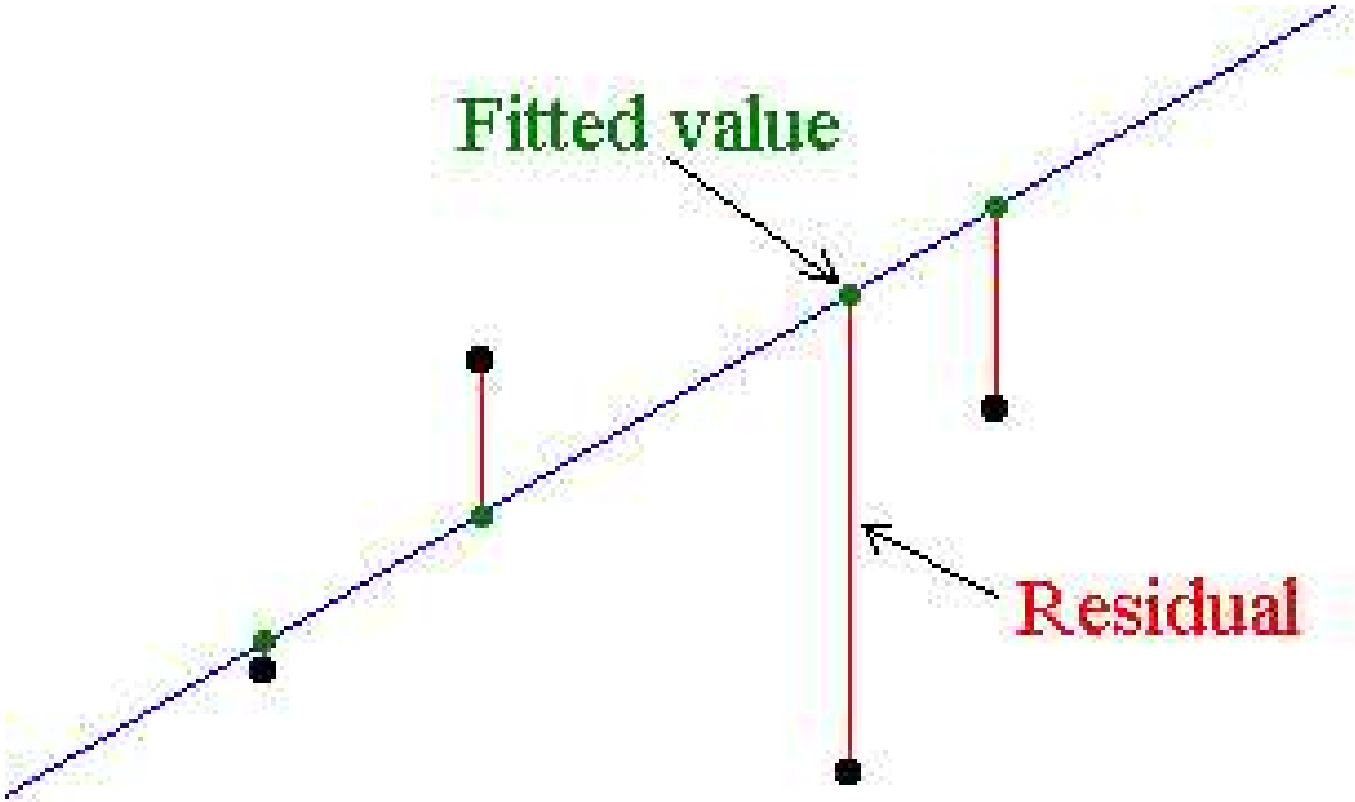
$$\arg\min_{\alpha,\beta} \sum_i e_i^2$$

$$\arg\min_{\alpha,\beta} \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_n \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} - \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \right\|_2^2 \rightarrow \arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

Erreur algébrique

Idéalement, on devrait minimiser la distance des points à la ligne.

- Problème non-linéaire (voir plus loin)
- Approximation linéaire : erreur algébrique
  - Distance en Y



Estimation de polynôme

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 u_i^1 + ... + \alpha_n u_n^m + e_i = e_i + \sum_i^m \alpha_i u_i^i$$

Optimisation

$$\arg\min_{\alpha_i} \sum_i e_i^2$$

$$\arg\min_{\alpha_i} \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_1 & ... & u_1^m \\ 1 & u_2 & ... & u_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_1 & ... & u_n^m \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_2^2 \rightarrow \arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

(Erreur algébrique)

Calcul de conique

Définition

$$\begin{pmatrix} u_i & v_i & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = au_i^2 + du_i + bu_iv_i + cv_i^2 + ev_i + f + e_i = 0$$

Optimisation

$$\arg \min_{a,b,c,d,e,f} \sum_i e_i^2$$

$$\arg \min_{a,b,c,d,e,f} \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 & u_1v_1 & v_1^2 & v_1 & 1 \\ u_2^2 & u_2 & u_2v_2 & v_2^2 & v_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^2 & u_n & u_nv_n & v_n^2 & v_n & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right\|_2^2 \rightarrow \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{pour} \|\mathbf{x}$$

Système homogène

Pourquoi ne pas fixer *e.g.* $f = 1$? Résoudre :

$$\arg \min_{a,b,c,d,e} \left\| \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 & u_1 v_1 & v_1^2 & v_1 \\ u_2^2 & u_2 & u_2 v_2 & v_2^2 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^2 & u_n & u_n v_n & v_n^2 & v_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

- Pourquoi pas a ou b ... erreur algébrique
- Remplacer un système homogène pour une régression est utile si $\mathcal{A}$ est creuse (*sparse*)

Calcul d'homographie : méthode linéaire algébrique

Nous avons une relation d'une plan à l'autre :

$$\mathbf{p} \propto \mathcal{H}\mathbf{q}$$

ou bien

$$\alpha\mathbf{p} = \mathcal{H}\mathbf{q}, \forall\alpha$$

On a en fait un système à trois équations :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -p_3q_1 & -p_3q_2 & -p_3q_3 & p_2q_1 & p_2q_2 & p_2q_3 \\ p_3q_1 & p_3q_2 & p_3q_3 & 0 & 0 & 0 & -p_1q_1 & -p_1q_2 & -p_1q_3 \\ -p_2q_1 & -p_2q_2 & -p_2q_3 & p_1q_1 & p_1q_2 & p_1q_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9)^\mathsf{T}$$

(avec la troisième équation redondante.)
Avec plusieurs correspondances, ceci est un système linéaire homogène :

$$\|\mathcal{A}\mathbf{H}\|^2$$

et l'erreur est $||\epsilon||^2$, avec $\epsilon = \mathcal{A}\mathbf{H}$

Normalisation des données

Pourquoi normaliser les données ?
Exemple :

$$(1,1),(20,400),(100,700),(400,800),(700,1000) \textit{ etc.}$$

Polynôme du 4e degré :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 20 & 400 & 8000 & 160000 \\ 1 & 100 & 10000 & 1000000 & 100000000 \\ 1 & 400 & 160000 & 64000000 & 25600000000 \\ 1 & 700 & 490000 & 343000000 & 240100000000 \end{bmatrix}$$

Normalisation des données

La normalisation sert à améliorer la stabilité numérique

En 2D

Il faut faire les étapes suivantes :

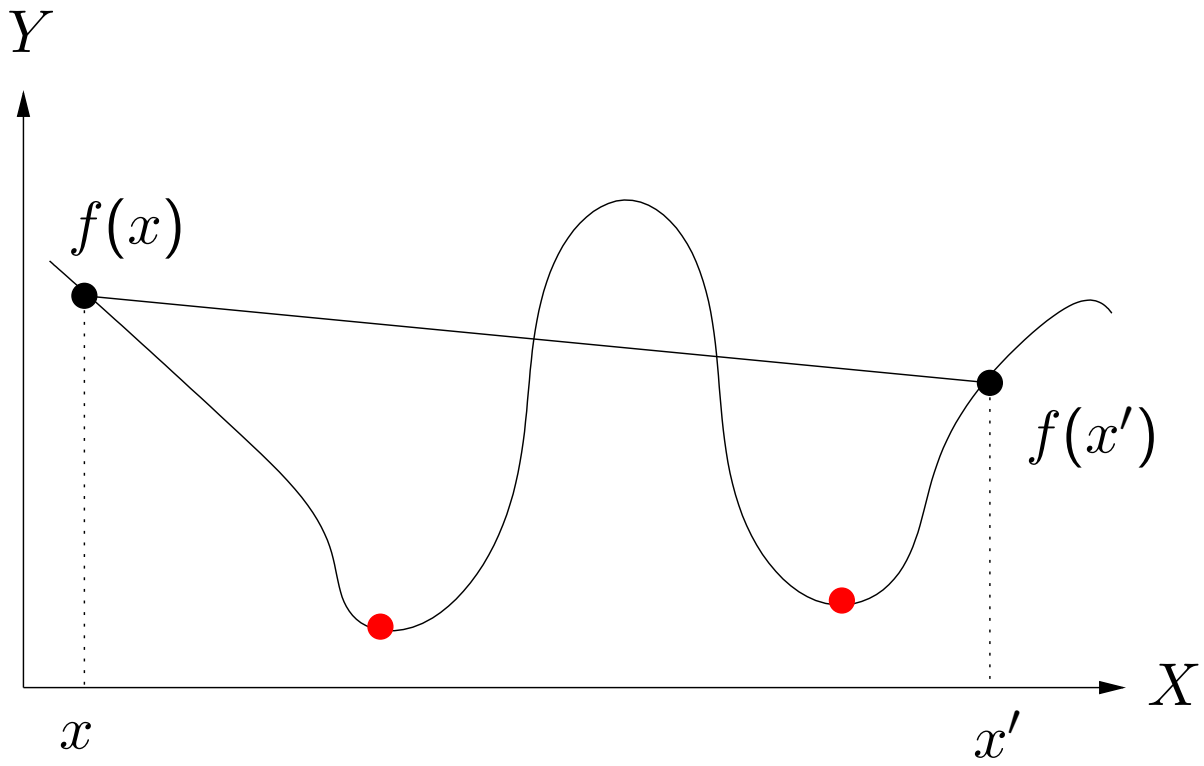
- Δ : moyenne des $\tilde{\mathbf{x}}_i \rightarrow \quad \Delta\tilde{\mathbf{x}}_i$
- $s = \frac{\sqrt{2}}{\text{mean} \|\Delta\tilde{\mathbf{x}}_i\|}$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & s\Delta_x \\ 0 & s & s\Delta_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- En 3D : le facteur d'échelle est $s = \frac{\sqrt{3}}{\text{mean} \|\Delta\tilde{\mathbf{x}}_i\|}$

Sommaire

Fonction non-convexe



- Plusieurs minimum locaux

Méthode analytique

Parfois possible mais :

- Presque jamais
- Souvent numériquement instable

Polynôme à une variable

$$f(x) = \sum_i \alpha_i x^i$$

Minimum lorsque

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

On cherche les racines de $g(x)$ Pour f du degré 4 : la première racine de g est

$$-\frac{a_3}{4a_4} - \frac{24a_2a_4 - 9a_3^2}{62^{2/3}a_4\sqrt[3]{-54a_3^3+216a_2a_4a_3-432a_1a_4^2+\sqrt{4\left(24a_2a_4-9a_3^2\right)^3+\left(-54a_3^3+216a_2a_4a_3-432a_1a_4^2\right)^2}}} + \frac{\sqrt[3]{-54a_3^3+216a_2a_4a_3-432a_1a_4^2+\sqrt{4\left(24a_2a_4-9a_3^2\right)^3+\left(-54a_3^3+216a_2a_4a_3-432a_1a_4^2\right)^2}}}{12\sqrt[3]{2}a_4}$$

Méthode analytique

- Souvent on préfère une solution numérique

Polynôme à une variable :
Mathematica :

```
deg = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7};
Random[] Power[x, #] & /@ deg;
eq  = Plus @@ %
f[x_] = eq;
Roots[f[x] == 0, x]
```

Méthode itérative

- Part d'un point $\mathbf{x}_0$
- Converge vers un minimum local
- Il faut donc $\mathbf{x}_0$ le plus proche possible de x^*

Typiquement en vision :

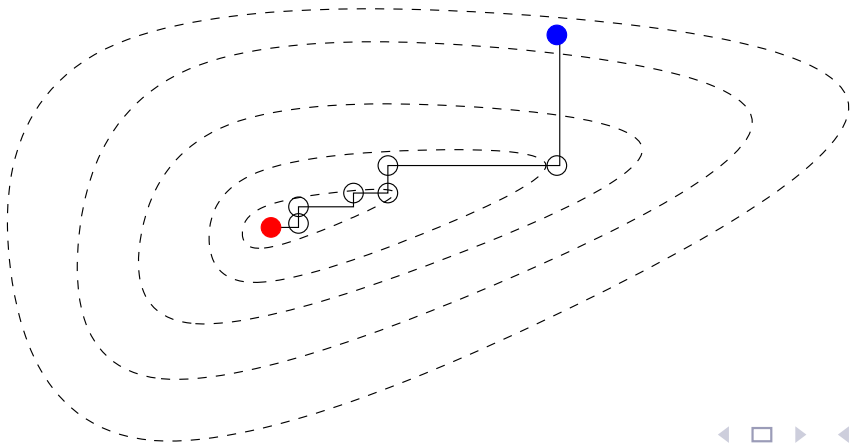
- Solution sous-optimal, formulation convexe $\longrightarrow \mathbf{x}_0$
- Raffinement non-linéaire

Alternation

Définition

- Fixer tous les paramètres sauf 1.
- Minimiser le problème simplifié pour cette variable.
- Recommencer pour un autre paramètre.

- Facile à implémenter
- Chaque itération est rapide si peu de paramètres (typiquement 2 paramètres)
- Convergence lente
- Fonctions non-dérivables (aucune dérivée à calculer)
- Utiliser avec modération



Gradient

Dérivée de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Df(\mathbf{x})_i = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

Matrice $1 \times n$

Gradient

$$\nabla f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})^\mathsf{T}$$

Vecteur colonne $n \times 1$ des dérivés dans chaque dimension

Hessienne

Dérivée seconde de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$D\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$$

Matrice symétrique $n \times n$ (puisque l'ordre de différentiation n'est pas important)

- Si définie positive $\longrightarrow$ minimum local
- Si définie négative $\longrightarrow$ maximum local
- Si valeur propre positive et négative $\longrightarrow$ col (*saddle point*)
- Sinon, aucune conclusion possible

Descente de gradient

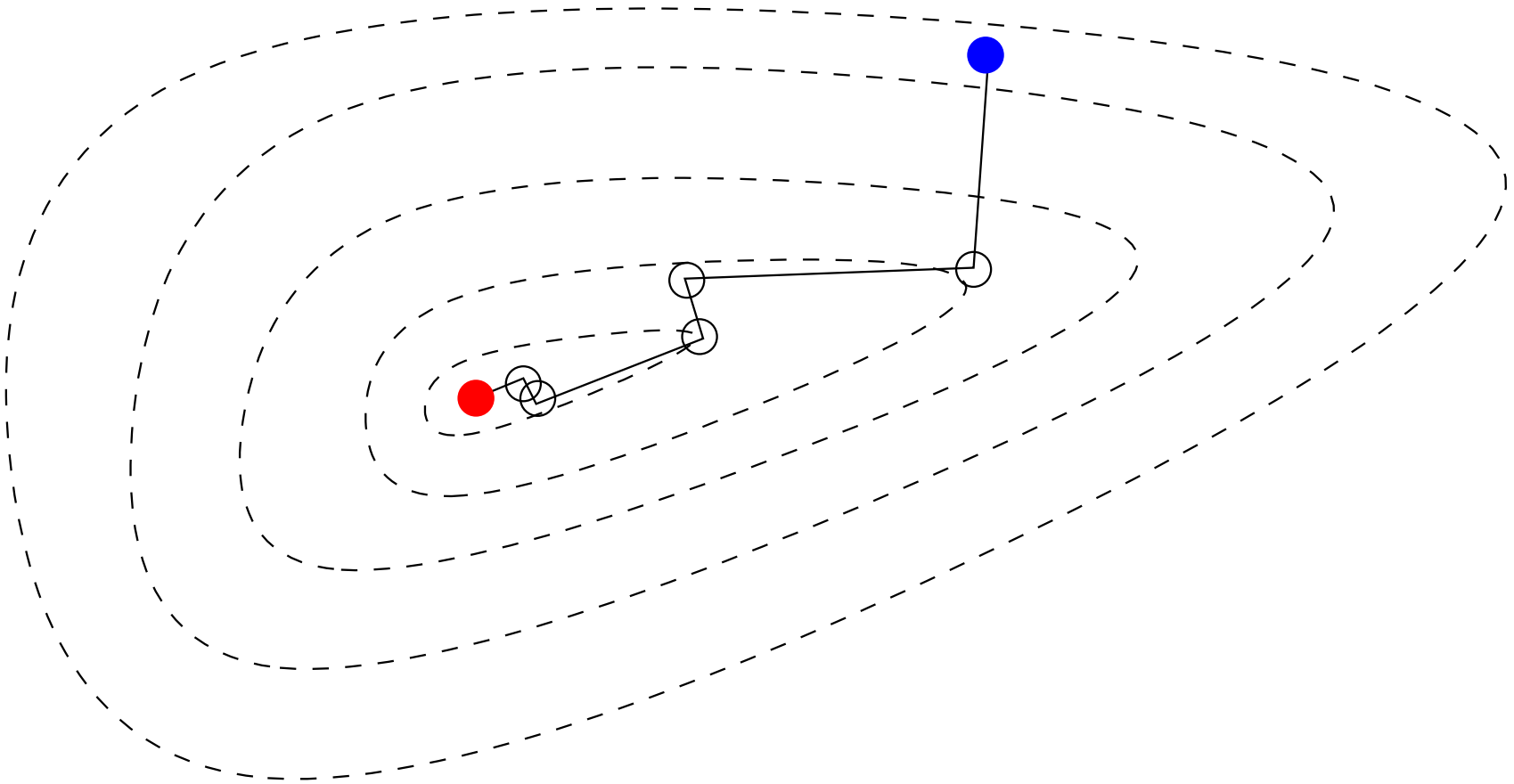
Approximation du premier ordre

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{v}) \approx \hat{f}(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{step} &= \arg\min_{v} \hat{f}(\mathbf{x}+\mathbf{v}) \\ \Delta_{step} &= -t\nabla f(\mathbf{x}) \\ \text{donc : } \mathbf{x} &:= \mathbf{x} + t\Delta_{step} \end{aligned}$$

- $\nabla f(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ dérivée directionnelle de f dans la direction de $\mathbf{v}$
- Descente si négative
- t peut être $= 1$ ou calculé par une méthode de recherche linéaire (*line search*)
- Choix du système de coordonnée est important

Descente de gradient



Newton

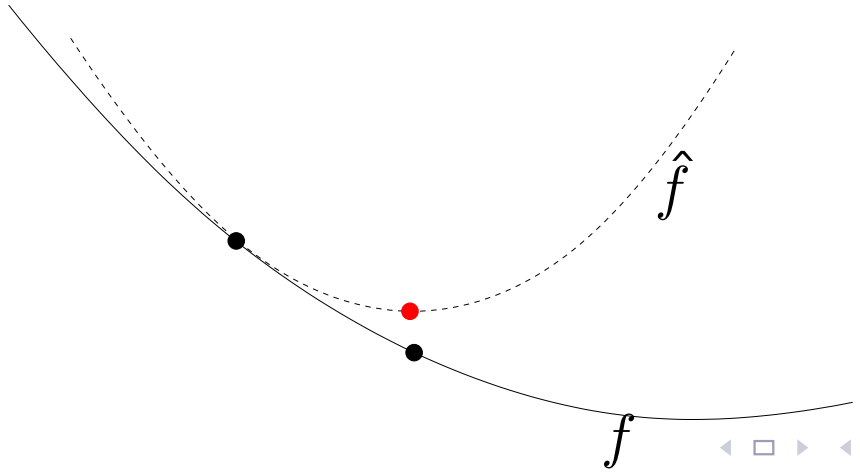
À l'origine : une méthode pour trouver les racines d'une fonction.

Définition

- Minimise un approximation locale du second ordre
- Invariant à un changement de coordonnée affine

$$\hat{f}(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{step} &= -\nabla^2 f(x)^{-1}\nabla f(x) \\ \Delta_{step} &= \arg\min_v \hat{f}(x+v) \end{aligned}$$



Autres méthodes

Il y a des méthodes plus sophistiquées

- Conjugate gradient
- Levenberg-Marquardt (descente de gradient et Gauss-Newton combinée)

- Stabilité
- Rapidité de convergence
- Implémentation spécifique lorsque l'Hessienne est creuse par bloc
- ...

- Ajouter des contraintes aux paramètres
  - Exemple typique : paramètres d'une matrice de rotation $\mathcal{R}^{\mathsf{T}}\mathcal{R} = \mathsf{I}$

Sommaire

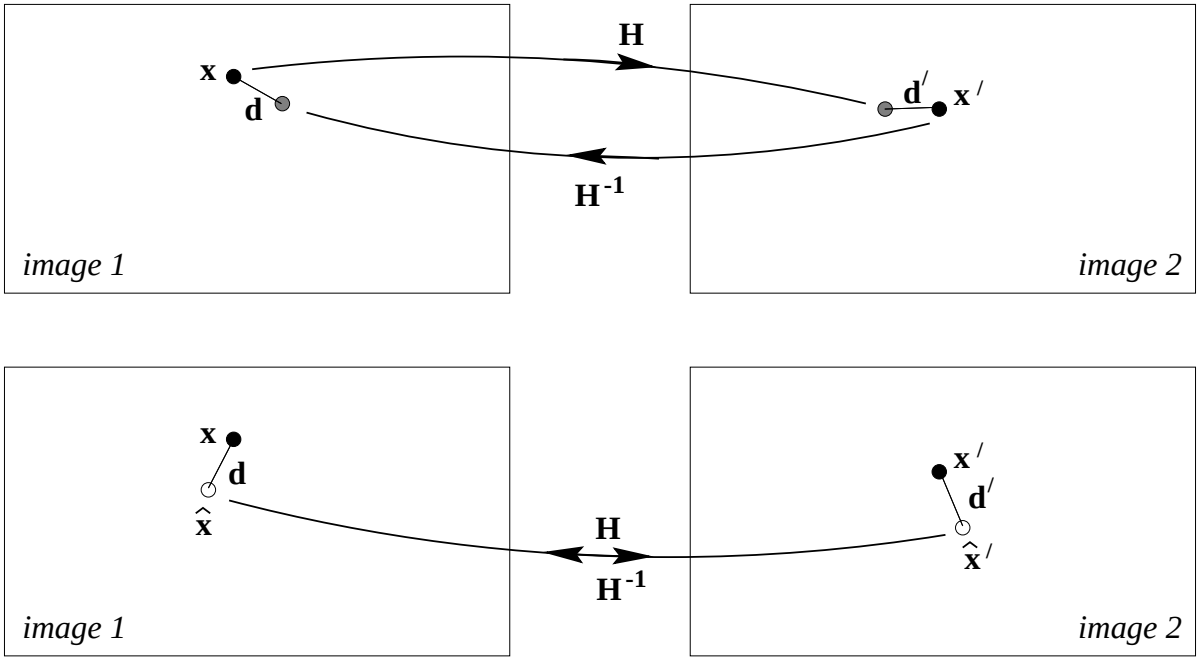
Retour aux homographies

Solution plus correcte :

- Erreur géométrique
- Erreur de reprojection symétrique

Aucun point à l'∞

Idéalement, on aimerait trouver une homographie en minimisant une erreur ayant un sens géométrique plus clair.



On voudrait minimiser la distance entre les points originaux et les points transformés.

Erreur géométrique

Pour n points, on veut minimiser :

$$\arg\min_{\mathcal{H}} \sum_i dist(\mathbf{p}_i, \mathcal{H}^{-1}\mathbf{q}_i)^2 + dist(\mathcal{H}\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)^2$$

où la fonction d est une fonction de distance géométrique des points

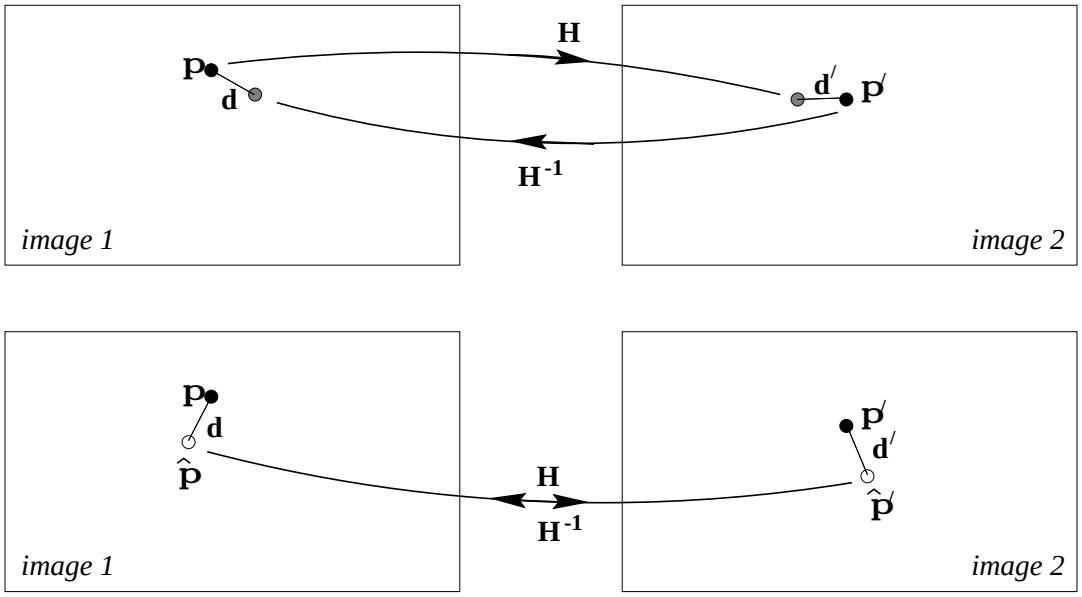
$$dist(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = ||\frac{(p_1, p_2)}{p_3} - \frac{(q_1, q_2)}{q_3}||$$

Au long, par exemple

$$dist(\mathbf{p}, \mathcal{H}\mathbf{q})^2 = \left(\frac{p_1}{p_3} - \frac{h_1q_1 + h_2q_2 + h_3q_3}{h_7q_1 + h_8q_2 + h_9q_3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{p_3} - \frac{h_4q_1 + h_5q_2 + h_6q_3}{h_7q_1 + h_8q_2 + h_9q_3}\right)^2$$

ce qui n'est pas linéaire !

Erreur de reprojection symétrique



En plus d'estimer l'homographie, on cherche les points corrigés $\mathbf{p}_i \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_i, \mathbf{q}_i \rightarrow \hat{\mathbf{q}}_i$ qui vérifie parfaitement $\mathcal{H}$ Pour n points, on cherche :

$$\arg \min_{\mathcal{H}, \hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{q}}_i} \sum_i^n dist(\mathbf{p}_i, \hat{\mathbf{p}}_i)^2 + dist(\hat{\mathbf{q}}_i, \mathbf{q}_i)^2, \quad \text{sujet à} \quad \hat{\mathbf{q}}_i = \mathcal{H}\hat{\mathbf{p}}_i$$

Il faut donc minimiser 4n+9 paramètres. On note que le nombre d'inconnues est très grand, ce qui est un gros inconvénient. Par contre, ceci est un problème **sparse** et on peut résoudre assez efficacement.

Note : Dans le cas des homographies, cette méthode n'améliore pas significativement. Elle est surtout donnée à titre d'exemple, puisqu'elle est utile dans certaines circonstances (matrice fondamentale, calcul de conique...).

Implémentation

- Mathematica

  FindMinimum : Newton, Levenberg-Marquardt, Conjugate Gradient (pas la même chose que *Minimize*)

- Matlab

  lsqnonlin

- C

  Levenberg-Marquardt : *levmar*

- Fortran avec wrapper C

  Levenberg-Marquardt : MINPAK

Sommaire

Données erronées

Estimateur robuste

Estimateur qui n'est pas affecté par des données qui ne respectent pas l'hypothèse concernant le modèle de bruit

- Sujet complexe

Données valides

Hypothèse :

- Loi Gaussienne (Normale), $\mu = 0$

Données erronées

Hypothèse :

- Loi uniforme

Méthode naïve

Enlever les donnés

- Utiliser toutes les données
- Calculer la distance des points
- Enlever les plus mauvais
- Itérer

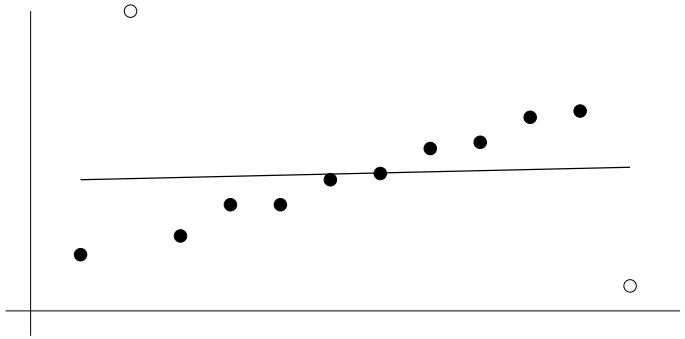
Re-pondération

- Pondérer un point par l'inverse de son erreur
- Itérer jusqu'à convergence

Peut fonctionner si :

- Très petit ratio de mauvaises données
- Elles sont bornées

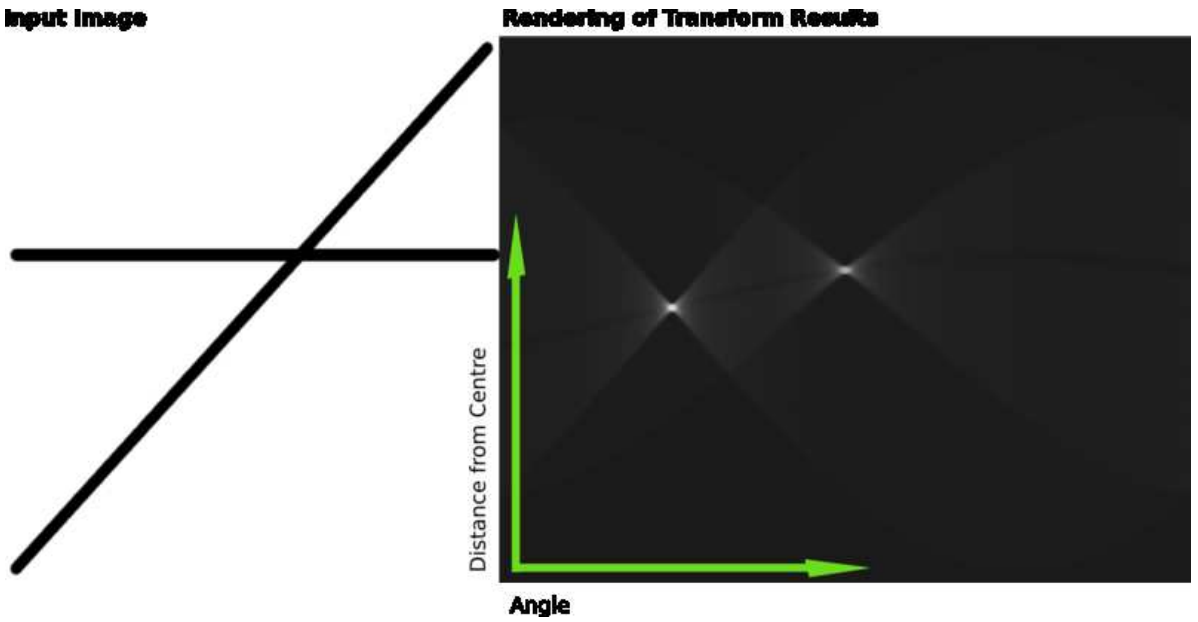
Ne fonctionne pas très bien, fortement déconseillée



Vote dans l'espace des solutions

- Discrétisation de l'espace solution
- Pour chaque point, voter pour les solutions possibles
- Choisir la solution qui a le plus de vote
- Déterminer les bons points et recalculer la solution

Exemple : Transformée de Hough



Vote dans l'espace des solutions

Quelques difficultés :

- Comment discrétiser ?

  Exponentiel en le nombre de paramètres

- Le vote n'est pas toujours simple/possible

  e.g. Homographie

- Surtout utile pour la segmentation

  e.g. plusieurs lignes

- # de paramètres doit rester petit

  3 et moins en général

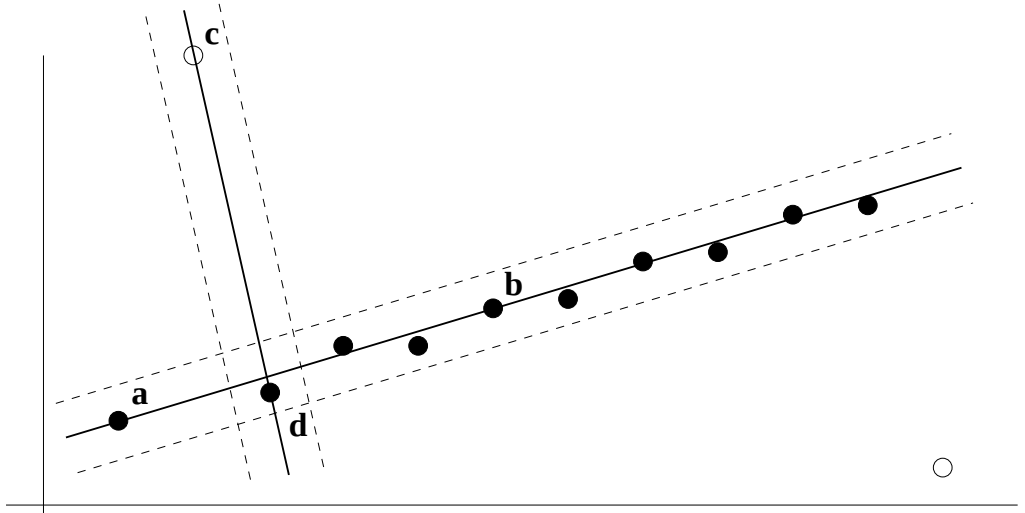
RANSAC

RANdom SAmpling And Consensus : idée générale

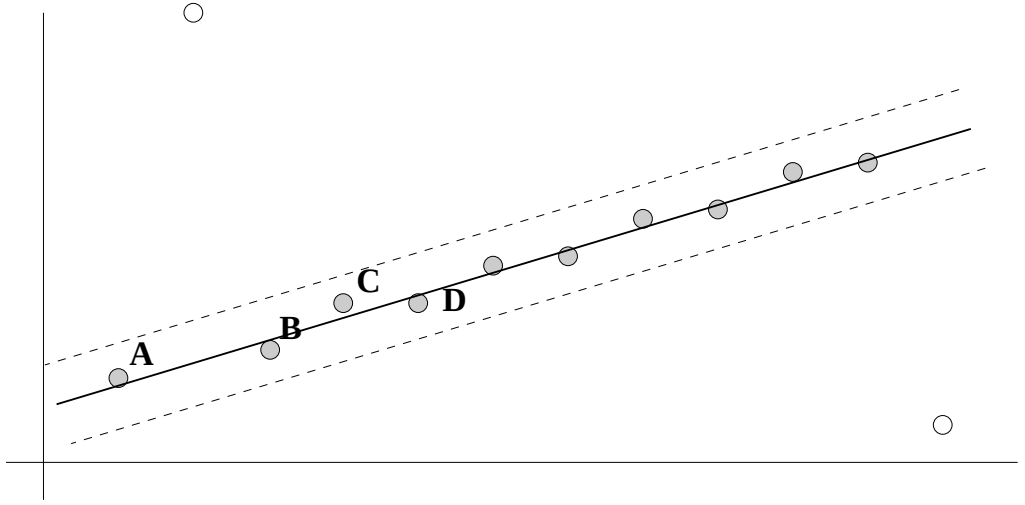
- Trouver un sous-ensemble (minimal) de points au hasard
- Calculer les paramètres pour les points de cet ensemble
- Calculer l'erreurs pour chaque point
- Répéter pour trouver la solution qui "explique" le plus de points

Régression linéaire : RANSAC

- Bon choix : ligne $\overline{ab}$
- Mauvais choix : ligne $\overline{cd}$



- Résultat final



RANSAC, algorithme de base

Entrée :

D : # de données

d : # minimal de points

t : distance maximal pour les points non-aberrants

T : # minimal de non-aberrants

N : # maximal d'itérations

Pour $i < N$:

Trouver un ensemble E_i de d points
Calculer le modèle (candidat) M_i avec E_i
Calculer l'erreur de toutes les données pour M_i
Déterminer S_i : les points valides
Si $|S_i| > T$,

Calculer le modèle final avec les points dans S_i et terminer

Sinon

Répéter

Paramètre : N

- Inutile d'essayer toutes les possibilités
- Hypothèse : on connaît le ratio d'aberrants w (ou une borne supérieure)

On cherche N pour une probabilité p d'avoir trouvé un ensemble sans aberrant

w	probabilité qu'un point soit valide
$\epsilon = 1 - w$	soit un aberrant
w^d	d'avoir d points valides
$1 - w^d$	d'avoir un mauvais ensemble
$(1 - w^d)^N$	d'avoir juste des mauvais ensembles après N essais

donc

$$(1 - w^d)^N = 1 - p$$

et

$$N = \log(1 - p) / \log(1 - w^d) = \log(1 - p) / \log(1 - (1 - \epsilon)^d)$$

Paramètre : d

- Choisir d le plus petit possible pour le calcul des paramètres
- d plus petit $\longrightarrow$ N plus petit $\longrightarrow$ meilleur performance

Paramètre : N pour w inconnu

Mise à jour de N en fonction des nouvelles solutions calculés

$N = \infty$

$nb = 0$

Tant que $(nb < N)$

Trouver une solution M_i pour un ensemble E_i

$\hat{w} = |S_i|/|D|$ est une borne pour w

Ajuster N avec $\hat{w}$ (comme précédemment)

$nb = nb + 1$

RANSAC : Étape finale

Deux façons :

Méthode simple

- Re-estimation du modèle avec les données valides
- Sous-optimale

MLE (Maximum Likelihood estimator

- fonction de coût robuste (non-convexe) :

$$E = \sum e_{rb}(dist(\mathbf{x}_i))$$

$$e_{rb}(d) = \begin{cases} d^2 \text{ pour } d^2 < t^2 \\ t^2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

t^2 est une constante.

FIN

Certaines figures sont la courtoisie de
R. Hartley et A. Zisserman
Multiple View Geometry in Computer Vision, 1ère Édition,2002