

1. Vrai ou faux ?

- (a) Il existe un nombre fini de langages réguliers.
- (b) Tout langage fini est régulier.
- (c) Si le complément de L est fini, alors L est régulier.
- (d) Les deux énoncés suivants sont logiquement équivalents :
 - L est régulier ;
 - L est reconnu par un automate.
- (e) Le langage

$$\{0^n 1^{2n} \mid 0 < n < 1000 \text{ et } n \text{ est pair}\}$$

est régulier.

- (f) La classe des langages réguliers est fermée pour l'union, l'intersection et le complément.
- (g) La classe des langages hors contexte est fermée pour l'union, l'intersection et le complément.
- (h) Le langage

$$\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

est hors contexte.

- (i) Le langage

$$\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

et son complément sont hors contexte.

- (j) L'intersection d'un langage hors contexte et d'un langage régulier donne toujours un langage hors contexte.
- (k) L'intersection d'un langage hors contexte et d'un langage régulier donne toujours un langage régulier.
- (l) Deux grammaires hors contexte distinctes peuvent engendrer le même langage.
- (m) Si L_2 est régulier, alors tout langage L_1 tel que $L_1 \subseteq L_2$ est régulier.

(n) Il existe un automate à 6 états pour le langage

$$\{w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \mid |w|_{\mathbf{a}} \text{ est un multiple de } 7\}.$$

2. Prouvez que les langages suivants ne sont pas réguliers :

(a) $\{w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \mid |w|_{\mathbf{a}} = 2|w|_{\mathbf{b}}\}$

(b) $\{\mathbf{a}^{n^2} \mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$

(c) $\{\mathbf{a}^i \mathbf{b}^j \mathbf{c}^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$

3. Prouvez que les langages suivants ne sont pas hors contexte :

(a) $\{w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \mid |w|_{\mathbf{a}} = (|w|_{\mathbf{b}})^2\}$

(b) $\{0^{3n} 10^{2n} 10^{3n} \mid n \text{ est un entier positif}\}$

(c) $\{w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \mid |w|_{\mathbf{a}} = 2|w|_{\mathbf{b}} = 3|w|_{\mathbf{c}}\}$

(d) $\{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^{2n} \mathbf{c}^{3n} \mid n \text{ est un entier positif}\}$

4. Soit

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et soit L l'ensemble des mots de Σ^* tels que la somme des deux premières lignes, en binaire, est égale à la troisième.

Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est un mot de L de longueur 4, puisque $3 + 5 = 8$.

Démontrez que L est régulier.

5. Soit

$$L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

Prouvez que $\bar{L}$ est hors contexte.

6. Transformez la GHC (V, Σ, R, S) suivante en FNC :

$$\begin{aligned} V &= \{S, T\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ R &= \{S \rightarrow SSS \mid T \mid \varepsilon, \quad T \rightarrow a \mid aT \mid bbT\} \end{aligned}$$

7. Soit L l'ensemble des dates valides du calendrier grégorien sous la forme j/m où j est le jour du mois m , sans zéro initial. L est un langage fini sur l'alphabet

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, /\}.$$

Par exemple on a :

$$\begin{aligned} 22/11, \quad 29/2, \quad 31/12 &\in L, \\ 01/01, \quad 31/4, \quad 99/23 &\notin L. \end{aligned}$$

Construisez un automate qui reconnaît L . Essayez ne pas utiliser plus d'une dizaine d'états.

8. Les mots de Fibonacci f_n sur l'alphabet $\{0, 1\}$ sont définis par induction de la manière suivante :

- $f_0 = 0$;
- pour $n > 0$, f_n est dérivé de f_{n-1} en remplaçant chaque 0 par 1 et chaque 1 par 10.

On a donc :

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= 10 \\ f_3 &= 101 \\ f_4 &= 10110 \\ f_5 &= 10110101 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- (a) Démontrez par induction que $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$, pour $n \geq 2$.
- (b) Démontrez que le langage $\{f_n \mid n \geq 0\}$ n'est pas régulier.

9. Soit la GHC $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, R, S)$ définie par les règles suivantes :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow aB \mid bC \mid Ec \\ B &\rightarrow aA \mid bD \mid b \\ C &\rightarrow aD \mid bA \mid a \\ D &\rightarrow aC \mid bB \\ E &\rightarrow cEA \end{aligned}$$

Le langage $L(G)$ est régulier.

- (a) Construisez un automate qui reconnaît $L(G)$.
- (b) Décrivez en français le langage $L(G)$.

10. Soit

$$L = \{a^i b^j c^k d^m \mid i, j, k \geq 0; m = i + j \text{ ou } m = j + k\}.$$

- (a) Donnez une GHC pour le langage L .

(b) Donnez tous les arbres de dérivation pour le mot **abcdd** selon la grammaire trouvée en (a).

(c) Transformez la grammaire en FNC.

11. Pour un langage L , on définit :

$$DEMI(L) = \{w \mid \exists x : wx \in L \text{ et } |w| = |x|\}.$$

Démontrez que si L est régulier, alors $DEMI(L)$ est également régulier.

12. Démontrez que le langage

$$\{\mathbf{a}^i \mathbf{b}^j \mathbf{c}^k \mid i = 2k \text{ et } j > 0\}$$

est hors contexte.

13. Soit la GHC $G = (\{S, N, M\}, \{0, 1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, *\}, R, S)$ définie par les règles suivantes :

$$S \rightarrow M * M$$

$$M \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid N$$

$$N \rightarrow 0N \mid 1N \mid \varepsilon$$

Transformez G en FNC.

14. Montrez que les langages suivants sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ sont réguliers :

(a) $L_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*$

(b) $L_2 = \emptyset$

(c) $L_3 = \{\varepsilon\}$

(d) $L_4 = \{w \mid w = \mathbf{a}x\}$ (les mots qui commencent par **a**)

(e) $L_5 = \{w \mid |w|_{\mathbf{a}} \equiv 5 \pmod{7}\}$

(f) $L_6 = L_3 \cup L_4 \cup L_5$

- (g) $L = \{w \mid |w|_{\mathbf{b}} > 3\}$
- (h) $L = \{w \mid w = x\mathbf{ababy}\}$ (les mots qui contiennent le sous-mot **abab**)
- (i) $L = \{w \mid w \neq x\mathbf{ababy}\}$ (les mots qui ne contiennent pas le sous-mot **abab**)
- (j) $L = \{w \mid \text{le nombre de sous-chaînes } \mathbf{ab} \text{ dans } w \text{ est égal au nombre de sous-chaînes } \mathbf{ba} \text{ dans } w\}$

15. Montrez que $L = \{w \mid |w|_{\mathbf{a}} \equiv 5 \pmod{7}\}$ ne peut être reconnu par un automate ayant seulement 6 états.

16. Montrez que les langages suivants sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ne sont pas réguliers :

- (a) $L_1 = \{1^n 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $L_2 = \{w \mid w = xx\}$
- (c) $L_3 = \{w \mid w = w^R\}$ (le langage des palindromes)
- (d) $L_4 = \{w \mid w = 1^{n^2}\}$
- (e) $L_5 = \{w \mid |w| = 2^n\}$
- (f) $L_6 = \{w \mid w \text{ est un nombre premier en unaire}\}$
- (g) $L_7 = \{w \mid w \text{ est un nombre premier en binaire}\}$