

## IFT-3245

## Démonstration 11, 16 décembre 2012.

1. Dans l'exemple de centre d'appels vu au cours, supposons que les temps de service suivent une Erlang( $k, \gamma$ ), et qui nous générons chacun d'eux comme suit : on génère  $k$  exponentielles de moyenne  $\frac{1}{\gamma}$  par inversion et nous les additionnons. Montrez que cette méthode est équivalent à l'inversion directe de la fonction de distribution d'Erlang en termes de maximisation de la corrélation entre les temps de service des appels correspondants dans les deux systèmes.

Soit  $Y_1, \dots, Y_k$   $k$  exponentielles indépendantes de moyenne 1 générées par inversion :

$$Y_j = -\ln(1 - U_j)$$

où  $U_1, \dots, U_k$  sont i.i.d.  $U(0, 1)$ .

Soit  $Y = Y_1 + \dots + Y_k$  et définissons  $U = F(Y)$ , où  $F$  est la fonction de distribution d'un Erlang( $k, 1$ ). Nous avons  $U \sim U(0, 1)$ . La méthode proposée génère les deux variables aléatoires d'Erlang  $X_1$  et  $X_2$  (les temps de service d'un appel donné dans les deux systèmes) par

$$X_1 = \frac{Y_1}{\gamma_1} + \dots + \frac{Y_k}{\gamma_1} = \frac{Y}{\gamma_1}$$

et

$$X_2 = \frac{Y_1}{\gamma_2} + \dots + \frac{Y_k}{\gamma_2} = \frac{Y}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} X_1$$

Dès lors,  $X_2$  est une fonction linéaire de  $X_1$ , impliquant que  $\rho(X_1, X_2) = 1$ , aussi la corrélation est clairement maximale.

Afin de prouver que ceci est équivalent à générer  $X_1$  et  $X_2$  par inversion à partir de  $U$ , nous pouvons montrer que  $U = F_1(X_1) = F_2(X_2)$  sont les fonctions de distribution de  $X_1$  et  $X_2$ , respectivement. Nous avons

$$F_1(X_1) = F_1\left(\frac{Y}{\gamma_1}\right) = F(Y) = U$$

comme

$$F_1\left(\frac{y}{\gamma_1}\right) = P\left[\frac{Y}{\gamma_1} \leq \frac{y}{\gamma_1}\right] = P[Y \leq y] = F(y),$$

pour tout  $y$ . Par les mêmes arguments,  $F_2(X_2) = F(Y) = U$ .

## 2. Réseau d'activités stochastique.

A stochastic activity network is a directed acyclic graph  $(N, A)$ , where  $N$  is a set of nodes that contains one source and one sink, and  $A$  is a set of arcs corresponding to activities. Each activity  $k \in A$  has a random duration  $V_k$  with distribution function  $F_k(\cdot)$ . This duration  $V_k$  can be viewed as the length of arc  $k$ .

Such networks are used in PERT-type methodologies for planning and scheduling activities in large complex projects, sometimes with thousands or more activities. The network (or project) completion time  $T$  is the length of the longest path from the source to the sink. This longest path is also called the critical path. Suppose we are interested in  $\mu = P[T > x]$ , the probability that the project completion time exceeds  $x$ , for a given threshold  $x$ . No efficient numerical method is available for computing  $\mu$  in general for large complex networks.

La durée  $V_j$  de l'activité  $j$  a la fonction de répartition  $F_{1,j}$  dans la configuration 1 et  $F_{2,j}$  dans l'autre. On génère toutes les durées par :  $V_{k,j} = F_{k,j}^{-1}(U_j)$ , puis  $X_k = f_k(\mathbf{U}_k) = I[T_k > x]$  pour  $k = 1, 2$ . Le théorème nous assure que  $\text{Cov}[X_1, X_2] \geq 0$ .