

IFT-3245

Démonstration 5, 05 novembre 2012.

1. Illustration de la méthode d'acceptation-rejet : génération de $N(0, 1)$ à partir d'une Laplace $(0, 1)$. (Voir répertoire exemples d'Oratio 0.7.1)
2. Comparaison en termes d'efficacité numérique de la méthode d'inversion, de Box-Muller, et d'acceptation-rejet, pour la $N(0, 1)$.
3. Loi exponentielle et maximum de vraisemblance.

On souhaite estimer le paramètre λ d'une loi exponentielle à partir d'un n -échantillon. La fonction de densité est

$$f(x, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

La vraisemblance, dont nous cherchons le maximum, s'écrit :

$$L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

La vraisemblance étant positive, nous pouvons considérer son logarithme, qui est une fonction monotone croissante :

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda) &= \ln e^{-\lambda n} + \ln \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\ &= -\lambda n + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!). \end{aligned}$$

La dérivée première s'annule quand :

$$-n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0,$$

ou encore

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

La dérivée seconde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2} \leq 0.$$

Ce ratio étant toujours négatif alors, l'estimation est donnée par :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance correspond donc simplement au nombre d'occurrences par unité de temps.

4. Quelques propriétés du Logit : <http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ChoixDiscrets2011/logit.pdf>.