

# IFT 3245

## Simulation et modèles

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

Automne 2012

# Variables antithétiques (AV)

Semblable à l'idée des VAC, sauf que l'on veut maintenant estimer une seule espérance par un moyenne de plusieurs estimateurs négativement corrélés.

Supposons que l'on a  $k$  estimateurs sans biais de  $\mu$ ,  $(X^{(1)}, \dots, X^{(k)})$ , avec  $\text{Var}[X^{(1)}] = \dots = \text{Var}[X^{(k)}]$ .

La moyenne

$$X_a = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k X^{(\ell)}$$

est un estimateur sans biais de  $\mu$ , avec variance

$$\text{Var}[X_a] = \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^k \text{Cov}[X^{(j)}, X^{(\ell)}] = \frac{\text{Var}[X^{(1)}]}{k} + \frac{2}{k^2} \sum_{j < \ell} \text{Cov}[X^{(j)}, X^{(\ell)}]$$

# Variables antithétiques

Si les  $X^{(\ell)}$  sont indépendants, les covariances sont nulles.

La variance est réduite ssi  $\text{Var}[X_a] < \text{Var}[X_{(1)}]/k$ ,  
ssi la somme des covariances est négative.

Pour un total de  $n = mk$  répétitions, on définit

$$\bar{X}_{a,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{a,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^k X_i^{(\ell)},$$

où  $X_{a,1}, \dots, X_{a,m}$  sont des copies i.i.d. de  $X_a$ .

Estimateur sans biais de  $\text{Var}[X_a]$ ; variance empirique:

$$S_{a,m}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_{a,i} - \bar{X}_{a,n})^2.$$

# Méthode AV générale

Soit  $\mu = E[X]$ , où  $X = f(\mathbf{U})$  et  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots)$  une suite i.i.d.  $U(0, 1)$ . Pour  $\ell = 1, \dots, k$ , soit  $X^{(\ell)} = f(\mathbf{U}^{(\ell)})$  où  $\mathbf{U}^{(\ell)}$  est une suite i.i.d.  $U(0, 1)$ .

Le but de l'approche de variables antithétiques généralisées est d'induire une dépendance entre les  $\mathbf{U}_\ell$  de manière à rendre  $\sum_{j < \ell} \text{Cov}[X^{(j)}, X^{(\ell)}] < 0$ .

# Paires antithétiques

On a  $k = 2$ ,

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots),$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{one} - \mathbf{U} = (1 - U_1, 1 - U_2, \dots), \text{ la suite antithétique.}$$

Posons  $X_a = [X^{(1)} + X^{(2)}]/2$ ,

$$\begin{aligned}\text{Var}[X_a] &= (\text{Var}[X^{(1)}] + \text{Var}[X^{(2)}] + 2 \text{Cov}[X^{(1)}, X^{(2)}])/4 \\ &= (\text{Var}[X^{(1)}] + \text{Cov}[X^{(1)}, X^{(2)}])/2,\end{aligned}$$

et  $\text{Var}[X_a] < \text{Var}[X]/2$  ssi  $\text{Cov}[X^{(1)}, X^{(2)}] < 0$ .

Intuition: Les événements désastreux pour  $X^{(1)}$  seront compensés par des événements antithétiques chanceux pour  $X^{(2)}$ , et vice-versa.

# Combinaison VAC-AV

Supposons que l'on veut comparer deux systèmes en utilisant des VAC, et aussi des paires de répétitions antithétiques.

Si ces deux méthodes fonctionnent bien séparément, fera-t-on nécessairement mieux en les combinant ? Non.

Soit  $X_k^{(1)} = f_k(\mathbf{U})$  et  $X_k^{(2)} = f_k(\mathbf{one} - \mathbf{U})$  la paire antithétique pour le système  $k$ . On a

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left[ \frac{X_2^{(1)} + X_2^{(2)}}{2} - \frac{X_1^{(1)} + X_1^{(2)}}{2} \right] \\ = & \frac{\text{Var}[X_1^{(1)}] + \text{Var}[X_1^{(2)}] + \text{Var}[X_2^{(1)}] + \text{Var}[X_2^{(2)}]}{4} \\ & + \frac{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_1^{(2)}] + \text{Cov}[X_2^{(1)}, X_2^{(2)}]}{2} - \frac{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_2^{(1)}] + \text{Cov}[X_1^{(2)}, X_2^{(2)}]}{2} \\ & - \frac{\text{Cov}[X_1^{(2)}, X_2^{(1)}] + \text{Cov}[X_1^{(1)}, X_2^{(2)}]}{2}. \\ = & \text{Var}[X_1^{(1)}] + \underbrace{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_1^{(2)}]}_{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_1^{(2)}]} - \underbrace{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_2^{(1)}]}_{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_2^{(1)}]} - \underbrace{\text{Cov}[X_1^{(2)}, X_2^{(1)}]}_{\text{Cov}[X_1^{(2)}, X_2^{(1)}]}. \end{aligned}$$