

IFT1575

Algorithme Hongrois

L'algorithme Hongrois est un algorithme spécialisé permettant de résoudre le problème d'affectation. Il s'agit d'une procédure itérative qui transforme la matrice des coûts en une suite de matrices équivalentes, jusqu'à ce que l'obtention d'une solution optimale soit évidente. La matrice finale est telle que toutes les entrées sont soit positives ou nulles et qu'une affectation faisant appel seulement aux entrées nulles est possible. Cette affectation de coût 0 est alors nécessairement optimale.

L'algorithme Hongrois peut être décrit de la façon suivante :

1. Dans chacune des rangées, identifier le coût minimal et soustraire celui-ci de chacun des coûts dans la rangée correspondante.
2. Dans chacune des colonnes, identifier le coût minimal et soustraire celui-ci de chacun des coûts dans la colonne correspondante.
3. Vérifier si une affectation de coût 0 est possible. Une façon de procéder à cette vérification est d'identifier le nombre minimum de lignes horizontales et verticales permettant de « barrer » ou couvrir toutes les entrées nulles. Si ce nombre minimum correspond au nombre de rangées dans la matrice, alors une affectation de coût 0 est possible et il faut aller ensuite à l'étape 6; sinon il faut continuer à l'étape 4.
4. Ajouter des entrées nulles dans la matrice de la façon suivante :
 - a. Identifier le plus petit coût non couvert dans la matrice.
 - b. Soustraire le plus petit coût non couvert de chacune des entrées non couvertes dans la matrice
 - c. Ajouter le plus petit coût non couvert aux entrées se trouvant à l'intersection d'une ligne horizontale et verticale (i.e., les entrées qui sont couvertes par deux lignes).

Il faut noter que les coûts dans les entrées couvertes par une seule ligne ne changent pas.

5. Répéter les étapes 3 et 4 jusqu'à ce qu'une affectation de coût 0 soit possible.
6. Procéder à l'affectation optimale en considérant, une à une, les entrées de coût nul. Pour ce faire, toujours donner la préférence aux rangées et aux colonnes ayant une seule entrée de coût nul. À chaque fois qu'une entrée est choisie, éliminer la rangée et la colonne correspondante. Répéter jusqu'à ce que toutes les rangées et colonnes aient été éliminées.

Note 1. Une fois l'affectation optimale connue, il faut évidemment se référer à la matrice des coûts originaux pour évaluer le coût de celle-ci.

Note 2. Les étapes 1 et 2 de l'algorithme peuvent être interchangées afin de traiter les colonnes avant les rangées.

Exemple 1. Une usine de transformation doit acheter 3 nouvelles machines ayant des caractéristiques différentes et qui transforment de la matière brute fournie par un secteur différent dans l'usine. Il existe 4 emplacements où ces machines peuvent être installées. Certains de ces emplacements sont plus désirables que d'autres, selon le type de machine, en fonction de la proximité du secteur qui doit fournir la matière brute à la machine. L'objectif est donc d'affecter chacune des machines à un emplacement différent dans l'usine de façon à minimiser le coût d'acheminement de la matière brute à chacune des machines.

La matrice originale des coûts est la suivante :

Machines	Emplacements			
	1	2	3	4
1	13	16	12	11
2	15	---	13	20
3	5	7	10	6

Comme la machine 2 ne peut être installée à l'emplacement 2, nous affectons un coût arbitrairement grand M à cette entrée. Par ailleurs, comme le nombre de machines n'est pas égal au nombre d'emplacements, nous ajoutons une machine 4 fictive dont tous les coûts d'affectation sont nuls. Dans la solution finale, l'emplacement choisi pour cette machine demeurera inoccupé. La nouvelle matrice des coûts devient alors la suivante :

Machines	Emplacements			
	1	2	3	4
1	13	16	12	11
2	15	M	13	20
3	5	7	10	6
4	0	0	0	0

Nous allons maintenant appliquer l'algorithme Hongrois à cette matrice.

À l'étape 1, nous soustrayons 11, 13 et 5 des trois premières rangées.

À l'étape 2, il n'y a rien à faire.

Nous obtenons alors la matrice des coûts suivante :

Machines	Emplacements			
	1	2	3	4
1	2	5	1	0
2	2	M	0	7
3	0	2	5	1
4	0	0	0	0

Dans cette matrice, il existe une affectation de coût 0 qui est donc optimale (considérer les entrées en traits gras) où les machines 1, 2 et 3 sont installées aux emplacements 4, 3 et 1, respectivement. Par ailleurs, la machine 4 est installée à l'emplacement 2, ce qui signifie que cet emplacement demeure libre. Le coût de cette affectation, en faisant appel aux coûts originaux, est égal à $11+13+5 = 29$, ce qui correspond simplement à la somme des valeurs qui ont été soustraites de la matrice originale.

Dans cet exemple, nous avons obtenu une affectation optimale assez facilement. Mais il faut parfois se rendre plus loin dans l'exécution de l'algorithme pour y arriver, comme en témoigne l'exemple suivant.

Exemple 2. Soit un problème d'affectation tâches-employés où chaque employé ne peut exécuter qu'une seule tâche et chaque tâche ne peut être exécutée que par un seul employé. Nous avons la matrice des coûts suivante (il faut noter que l'employé 1 ne peut exécuter la tâche 1) :

Employés	Tâches		
	1	2	3
1	---	8	7
2	7	6	4

Puisqu'il y a trois tâches et seulement deux employés, il faut créer un troisième employé fictif qui s'acquittera automatiquement de la tâche laissée de côté par les deux véritables employés. Par ailleurs, le fait que l'employé 1 ne peut exécuter la tâche 1 est noté M, qui représente un coût arbitrairement grand. On obtient ainsi la matrice des coûts suivante :

Employés	Tâches		
	1	2	3
1	M	8	7
2	7	6	4
3	0	0	0

Nous allons maintenant appliquer l'algorithme Hongrois à cette matrice.

À l'étape 1, nous soustrayons 7 de la première rangée et 4 de la deuxième rangée.

À l'étape 2, il n'y a rien à faire.

Nous obtenons alors la matrice des coûts suivante :

Employés	Tâches		
	1	2	3
1	M	1	0
2	3	2	0
3	0	0	0

À l'étape 3, nous constatons qu'aucune affectation de coût nul n'est possible. En effet, seulement 2 lignes, soit 1 ligne verticale et 1 ligne horizontale, suffisent à couvrir toutes les entrées nulles, ce qui est inférieur au nombre de rangées.

Employés	Tâches		
	1	2	3
1	M	1	0
2	3	2	0
3	0	0	0

Le coût minimal dans une entrée non couverte est égal à 1. Ainsi à l'étape 4, nous soustrayons cette valeur de chaque entrée non couverte et nous l'additionnons à chaque entrée couverte par deux lignes. Nous obtenons le résultat suivant :

Employés	Tâches		
	1	2	3
1	M	0	0
2	2	1	0
3	0	0	1

Dans cette matrice, il existe une affectation de coût 0 qui est donc optimale (considérer les entrées en traits gras) où l'employé 1 exécute la tâche 2 et l'employé 2 exécute la tâche 3, tandis que la tâche 1 est laissée de côté. Le coût de cette affectation, en faisant appel aux coûts originaux, est égal à $8 + 4 + 0 = 12$.