

# IFT3545/MAT6490

version 2.4

20.02.2025

**Définition 1** Un graphe (*non-orienté*) simple  $G = (V, E)$  est défini par son ensemble de sommets  $V$  et son ensemble d'arêtes  $E \subseteq \binom{V}{2}$ .

Notons qu'un tel graphe a au plus une arête reliant deux sommets donnés et aucune boucle. Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.

**Définition 2** Un graphe orienté simple  $D = (V, A)$  est défini par son ensemble de sommets  $V$  et son ensemble d'arcs  $A \subseteq (V \times V) \setminus \Delta(V)$  (on met  $\Delta(V) = \{(v, v) : v \in V\}$  et on l'appelle la diagonale).

Comme pour les graphe non-orienté, le graphe orienté (“digraphe”) simple n'a aucune boucle (élément de  $\Delta(V)$ ) et au plus un arc de  $u$  à  $v$ .

Sauf indication contraire, un graphe  $G$  a comme ensemble de sommets  $V$  (ou  $V(G)$  si plus de clarté est nécessaire), et comme ensemble d'arêtes  $E$  (ou  $E(G)$ ). Une famille de graphes  $\{G_i : i \in I\}$  ( $I$  est un ensemble d'indices, souvent  $I = [k] = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  ou  $I = \mathbb{N}$ ) aura  $G_i = (V_i, E_i)$ . Comme partout dans le cours,  $|V| = n$  et  $|E| = m$ . Sauf indication contraire nos graphes sont simple (pas de boucles, pas d'arêtes multiples), non orientés et finis. On distinguera les graphes orientés en les notant  $D = (V, A)$ , avec les même conventions pour  $D_i$ ;  $A$  est l'ensemble d'arcs. On va noter l'arête  $\{u, v\}$  (l'arcs  $(u, v)$ ) d'un graphe (orienté) simplement par  $uv$ , sauf quand cela peut mener à une confusion.

Rappelons que  $P_k$  et  $C_k$  sont des chaînes ou des chemins et des cycles ou des circuits simples (élémentaires) sur  $k$  sommets et de longueur  $k-1$  et  $k$ , respectivement.

Dans les produits, on note une arête  $uv$  par  $[u, v]$  pour plus de clarté.

Rappel: étant donné un ensemble  $X$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\binom{X}{k}$  l'ensemble de parties à  $k$  éléments de  $X$ ,  $\binom{X}{k} = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}$ . Pour un naturel  $n \in \mathbb{N}$  on note  $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} = \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i < n\}$ .

**Les définitions suivantes sont pour des graphes simples.  
Elles s'appliquent souvent - mutatis mutandis - aux graphes qui  
ne sont pas simple; faites attention.**

**Définition 3** *Rappels:*

1. Soit  $G = (V, E)$  un graphe,  $u \in V$ .
  - (1) Un parcours de longueur  $k$  dans  $G$  est une suite  $x_0x_1 \dots x_k$  de sommets de  $G$  telle que  $x_i x_{i+1} \in E$  pour  $i = 0, \dots, k-1$ .
  - (2) Un sentier est un parcours dans lequel toutes les arêtes sont distinctes.
  - (3) Une chaîne est un parcours dans lequel tous les sommets sont distincts (a fortiori, les arêtes sont également distinctes).
  - (4) Un cycle de longueur  $k \geq 3$  est un sentier  $x_0x_1 \dots x_{k-1}$  dans lequel  $x_{k-1}x_0 \in E$ .
  - (5) Un cycle élémentaire ou simple est un cycle dont les sommets sont distincts.
  - (6)  $N(u) = \{v \in V : uv \in E\}$ ;  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$
  - (7)  $d(u) = \deg(u) = |N(u)|$
  - (8)  $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$ ,  $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$
  - (9)  $d(u, v)$  est la longueur (nombre d'arêtes) d'un chemin le plus court entre  $u$  et  $v$
  - (10)  $\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V\}$
  - (11) Si  $d(u) = d(v) = d$  pour tout  $u, v \in V$ , le graphe  $G$  est régulier de degré  $d$  (on dit aussi  $d$ -régulier).
2. Soit  $D = (V, A)$  un graphe orienté simple (ou strict dans le livre de Bondy et Murty).
  - (1) Un parcours de longueur  $k$  dans  $D$  est une suite  $x_0x_1 \dots x_k$  de sommets de  $G$  telle que  $x_i x_{i+1} \in A$  pour  $i = 0, \dots, k-1$ .
  - (2) Un sentier est un parcours dans lequel tous les arcs sont distinctes.
  - (3) Un chemin est un parcours dans lequel tous les sommets sont distincts (a fortiori, les arcs sont également distinctes).
  - (4) Un circuit de longueur  $k$  est un sentier  $x_0x_1 \dots x_{k-1}$  dans lequel  $x_{k-1}x_0 \in A$ .
  - (5) Un circuit élémentaire ou simple est un circuit dont les sommets sont distincts.

- (6)  $N^+(u) = \{v \in V : uv \in A\}$  et  $N^-(u) = \{v \in V : vu \in A\}$ ;  
 $N^+[u] = N^+(u) \cup \{u\}$  et  $N^-[u] = N^-(u) \cup \{u\}$
- (7)  $d^+(u) = \deg^+(u) = |N^+(u)|$ ,  $d^-(u) = \deg^-(u) = |N^-(u)|$
- (8)  $d(u, v)$  est la longueur (nombre d'arcs) d'un chemin orienté le plus court entre  $u$  et  $v$
- (9)  $\text{diam}(D) = \max\{d(u, v) : u, v \in V\}$

**Définition 4** Un graphe est eulérien s'il existe un cycle (pas élémentaire sauf exception) passant par chaque arête exactement une fois.

**Définition 5** Un graphe est hamiltonien s'il existe un cycle (pas élémentaire sauf exception) passant par chaque sommet exactement une fois.

Dans les deux cas on parle de *chaîne* eulérienne (hamiltonienne) si elle passe par chaque arête (sommet) exactement une fois.

La notation des voisinages s'étend aux ensembles : si  $S \subseteq V$  dans un graphe (orienté ou pas), on définit  $N(S) = \cup_{u \in S} N(u)$  et, mutatis mutandis,  $N^+(S)$ ,  $N^-(S)$ ,  $N[S]$ ,  $N^+[S]$ ,  $N^-[S]$ .

**Définition 6** Un graphe  $H = (U, F)$  est un sous-graphe du graphe  $G = (V, E)$  si  $U \subseteq V$  (ce qui implique que  $F \subseteq (E \cap \binom{U}{2})$ ). Le sous-graphe est induit si  $F = (E \cap \binom{U}{2})$ ; en effet, il est induit par  $U$  et on le note  $G\langle U \rangle$ . Un sous-graphe peut être induit par un ensemble d'arêtes  $F$ . Dans ce cas on le note  $G\langle F \rangle$  et on met  $U = \{u \in V : \text{il existe un sommet } u \in V \text{ tel que } uv \in F\}$ . On note  $H \leq G$  le fait que le graphe  $H$  est un sous-graphe du graphe  $G$ .

Ces définitions s'étendent au graphe orientés, mutatis mutandis. En France, un sous-graphe est toujours induit, les autres sont des (sous-)graphes *partiels*.

**Définition 7** Un sous-graphe  $H = (U, F)$  du graphe  $G = (V, E)$  est couvrant si  $U = V$ .

**Définition 8** Un graphe  $G = (V, E)$  est connexe si pour toute partition non-triviale de  $V = X \cup Y$  il existe une arête  $uv \in E$  telle que  $X \cap \{u, v\} \neq \emptyset \neq Y \cap \{u, v\}$  (i.e. telle que  $u \in X$  et  $v \in Y$ ).

**Définition 9** Un graphe  $G = (V, E)$  est connexe si pour toute paire de sommets  $u, v$  il existe une chaîne entre  $u$  et  $v$ , i.e. une chaîne  $x_0 \dots x_k$  telle que  $x_0 = u$  et  $x_k = v$ .

Notons que le graphe trivial  $K_1 = (\{u\}, \emptyset)$  est connexe, trivialement (sic) par la définition 8, avec  $k = 0$  par la définition 9. Bien sûr, les deux définitions sont équivalentes.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, simple ou pas, et soit  $\mathcal{A} = \{X \subseteq V : G\langle X \rangle \text{ est connexe}\}$ . On définit un ordre partiel sur  $\mathcal{A}$  en mettant  $X \leq Y$  si  $X \subseteq Y$ . Les sous-graphes induits par les maxima de cet ordre partiel sont des *composantes connexes* de  $G$ , définies d'une autre façon plus bas.

**Définition 10 (composante connexe I)** *Une composante connexe d'un graphe  $G$ , simple ou pas, est le graphe induit par une classe d'équivalence de la relation d'équivalence  $\equiv$  définie sur  $V(G)$  par  $u \equiv v$  s'il existe, dans  $G$ , une chaîne entre  $u$  et  $v$ .*

Donc (!) une composante connexe est un sous-graphe connexe maximal par inclusion (sommets).

**Définition 11 (composante connexe II)** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe et soit  $\sim$  une relation binaire sur  $V$  définie par  $u \sim v$  s'il existe une chaîne entre  $u$  et  $v$ . Ceci est une relation d'équivalence et chaque classes d'équivalence est une composante connexe de  $G$ .*

Les classes d'équivalence de la relation  $\sim$  sur  $V$  peuvent être définies récursivement. Pour  $u \in V$ , soit  $N_i(u) = \{v \in V : d(u, v) \leq i\}$  et  $N_{i+1}(u) = N_i(u) \cup (\cup_{v \in N_i(u)} N(v))$ . Une classe d'équivalence de  $u$  est donc  $N_{n-1}(u) = N_{diam(G)}(u)$ .

**Définition 12** *Un arbre est un graphe connexe sans cycles.*

Attention, un arbre n'a aucune racine, on ne peut parler d'enfants, les voisins d'un sommets ne sont pas ordonnés!

**Définition 13** *Le (graphe) complémentaire du graphe  $G = (V, E)$  est le graphe  $G^c = \overline{G} = (V, \overline{E})$  avec  $\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$ .*

**Définition 14** *Soit  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 0, 1$ , des graphes. Leur produit cartésien  $(V, E)$  est noté  $G_0 \square G_1$  et est défini par  $V = V_0 \times V_1$  et  $E = \{[(u, x), (v, y)] : \text{soit } uv \in E_0 \text{ et } x = y, \text{ soit } u = v \text{ et } xy \in E_1\}$ .*

**Définition 15** *Soit  $G$  un graphe,  $G^1 = G$ . Pour  $k > 1$ , soit  $G^k = G^{k-1} \square G$ ; on l'appelle la puissance cartésienne de  $G$ .*

**Définition 16** Un hypercube  $Q_n$  de dimension  $n$  est défini récursivement par

- $K_2$  est l'hypercube  $Q_1$  de dimension 1;
- L'hypercube de dimension  $n + 1$  est  $Q_{n+1} = Q_n \square K_2 = K_2^{n+1}$ .

**Définition 17** Un hypercube  $H_n$  de dimension  $n$  est le graphe avec  $V(H_n) = \{0, 1\}^n$  et  $E(H_n) = \{uv : u \text{ et } v \text{ diffèrent en exactement une coordonnée}\}$ .

Donc  $u \in V(H_n)$  si et seulement si  $u = (u_1, \dots, u_n)$  avec  $u_i \in \{0, 1\}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

**Définition 18** Soit  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 0, 1$ , des graphes. Leur produit catégorique (ou tensoriel, ou fort)  $(V, E)$  est noté  $G_0 \times G_1$  et est défini par  $V = V_0 \times V_1$  et  $E = \{(u, x), (v, y) : uv \in E_0 \text{ et } xy \in E_1\}$ .

**Définition 19** Soit  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 0, 1$ , des graphes. Le produit lexicographique ou la composition ou encore le produit en couronne de  $G_0$  autour de  $G_1$  (ou  $G_0$  par  $G_1$ ) est le graphe  $G_0[G_1] = (V, E)$  (parfois noté  $G_0 \wr G_1$ ) avec  $V = V_0 \times V_1$  et  $E = \{(u, x), (v, y) : \text{soit } uv \in E_0, \text{ soit } u = v \text{ et } xy \in E_1\}$ .

En d'autres mots, on commence par  $G_0$ . On remplace chaque sommet  $u$  de  $G_0$  par une nouvelle copie  $G_1^u$  de  $G_1$ , et on relie tous les sommets de  $G_1^u$  avec tous les sommets de  $G_1^v$  chaque fois que  $uv \in E$ .

**Définition 20** Un homomorphisme de  $G = (V, E)$  dans  $H = (U, F)$  est une fonction  $h : V \rightarrow U$  telle que si  $uv \in E$ , alors  $h(u)h(v) \in F$ . On indique que  $h$  est un homomorphisme de  $G$  vers  $H$  par  $G \xrightarrow{h} H$ . Quand un homomorphisme de  $G$  vers  $H$  existe, on écrit simplement  $G \rightarrow H$ . Si aucun homomorphisme de  $G$  vers  $H$  n'existe, on écrit  $G \not\rightarrow H$ .

**Définition 21** Un isomorphisme de  $G = (V, E)$  dans  $H = (U, F)$  est une fonction bijective  $\phi : V \rightarrow U$  telle que  $uv \in E$  si et seulement si  $\phi(u)\phi(v) \in F$ . Si un isomorphisme existe entre  $G$  et  $H$ , on dit que les graphes sont isomorphes et on écrit  $G \simeq H$ .

Un isomorphisme est un homomorphisme, bien évidemment.

**Définition 22** *Un isomorphisme  $\phi$  de  $G$  vers  $G$  est un automorphisme.*

L'ensemble d'automorphismes d'un graphe  $G$  forme un *groupe*, noté  $\text{Aut}(G)$ , avec la composition comme opération. L'identité du groupe est  $\text{id}_G$ ,  $\text{id}_G(u) = u$  pour tout  $u \in V(G)$ . L'inverse d'un automorphisme  $\phi$  est simplement  $\phi^{-1}$  (qui existe parce que  $\phi$  est une bijection).

Un automorphisme  $\phi$  de  $G$  envoie, par définition, une arête  $uv$  de  $G$  sur une arête  $\phi(u)\phi(v)$ .

**Définition 23** *Soit  $\phi : V \rightarrow U$  un isomorphisme de  $G = (V, E)$  dans  $H = (U, F)$ . Il induit une fonction  $\hat{\phi} : E \rightarrow F$  définie par  $\hat{\phi}(uv) = \phi(u)\phi(v)$ .*

**Définition 24** *Un graphe  $G = (V, E)$  est sommet-transitif si pour toute paire  $u, v \in V$  il existe un automorphisme  $\phi$  de  $G$  tel que  $\phi(u) = v$ . Le graphe  $G$  est arête-transitif si pour toute paire  $uv, xy \in E$  il existe un automorphisme  $\psi$  de  $G$  tel que  $\{\psi(u), \psi(v)\} = \{x, y\}$ .*

Donc  $G$  est arête-transitif si pour toute paire  $e, f \in E(G)$  il existe un automorphisme  $\phi$  de  $G$  tel que  $\hat{\phi}(e) = f$ . Par exemple, le cycle  $C_n$  est sommet-transitif et arête-transitif car on peut le tourner: si  $C_n = v_0 \dots v_{n-1}$  alors  $\phi_i(v_j) = v_{j+i}$  est un automorphisme de  $C_n$  qui envoie  $v_j$  sur  $v_{j+i}$  et donc l'arête  $v_j v_{j+1}$  sur l'arête  $v_{j+i} v_{j+i+1}$ .

**Définition 25** *Le nombre chromatique d'un graphe  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est le nombre minimum de couleurs qui permettent de colorier les sommets de  $G$  de manière à ce que des sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.*

**Définition 26** *Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est  $\chi(G) = \min\{n \in \mathbb{N} : \text{il existe un homomorphisme } h \text{ de } G \text{ dans } K_n\} = \min\{n \in \mathbb{N} : \text{il existe } h \text{ tel que } G \xrightarrow{h} K_n\}$ .*

Les deux définitions sont, bien sûr, équivalentes.

**Définition 27** *Un graphe  $G = (V, E)$  est un noyau si quel que soit l'homomorphisme (endomorphisme)  $h : V \rightarrow V$ ,  $h(V) = V$ .*

**Définition 28** *Un sous-graphe  $H$  d'un graphe  $G$  est le noyau de  $G$  si  $H$  est un noyau.*

**Remarque 1** Ne pas confondre le noyau pour les homomorphismes et celui défini pour les graphes orientés, définition 54. En anglais on distingue les deux: core pour les homomorphismes, kernel pour les graphes orientés.

**Définition 29** Un stable dans un graphe  $G = (V, E)$  est un ensemble  $S \subseteq V$  tel que pour tout  $u, v \in S$ ,  $uv \notin E$ .

**Définition 30** Une clique dans un graphe  $G = (V, E)$  est un ensemble  $T \subseteq V$  tel que pour tout  $u, v \in T$ ,  $uv \in E$ .

Parfois on insiste que  $T$  soit maximum pour l'appeler *clique*.

**Définition 31** Le nombre de stabilité  $\alpha(G)$  d'un graphe  $G$  est le nombre maximum de sommets de  $G$  deux-à-deux non-adjacents. En d'autres mots,  $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$

**Définition 32** Le rapport de stabilité d'un graphe  $G$  est  $i(G) = \frac{\alpha(G)}{n}$ , où  $n = |V(G)|$ . Le rapport de stabilité ultime est  $I(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} i(G^k)$ , avec  $G^k$  de la définition 15.

**Définition 33** Un graphe est localement fini si le degré de chaque sommet est fini.

**Définition 34** Un rayon est un graphe isomorphe à  $R = (\mathbb{N}, \{[i, i+1] : i \in \mathbb{N}\})$ .

**Définition 35** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Son graphe représentatif des arêtes (line graph, edge graph) est le graphe  $L(G) = (E, F)$  avec  $F = \{ef : e \cap f \neq \emptyset\}$ .

C'est-à-dire, les sommets de  $L(G)$  sont les arêtes de  $G$  et deux sommets de  $L(G)$  sont adjacents si les deux arêtes correspondantes sont incidentes (i.e. partagent un sommet).

**Définition 36** Pour un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  on définit  $[X, Y] = \{uv \in E : e \cap X \neq \emptyset \neq e \cap Y\}$ .

**Définition 37** Dans un graphe  $G = (V, E)$ , l'ensemble séparateur par arêtes est un ensemble  $[X, \overline{X}]$ ,  $X \neq \emptyset$ , avec  $\overline{X} = V \setminus X$ .

**Définition 38** La connexité par arêtes du graphe  $G = (V, E)$  est  $\kappa'(G) = \min\{|[X, \bar{X}]| : X \subset V\}$  si  $E \neq \emptyset$  (et si  $E = \emptyset$ ,  $\kappa'(G) = 0$ ). Si  $G$  n'est pas connexe, bien évidemment  $\kappa'(G) = 0$ .

En d'autres mots,  $\kappa'(G)$  est le nombre minimum d'arêtes dont l'enlèvement déconnecte le graphe s'il est connexe.

**Définition 39** Un ensemble séparateur par sommets d'un graphe  $G = (V, E)$  est  $S \subseteq V$  tel que  $G - S$  n'est pas connexe. La connexité du graphe  $G$  est  $\kappa(G) = \min\{|S| : S \text{ est un ensemble séparateur par sommets de } G\}$  si un tel  $S$  existem sinon  $\kappa(G) = |V| - 1$ .

Donc si  $G$  n'est pas connexe,  $\kappa(G) = 0$  et si  $G \simeq K_n$ ,  $\kappa(G) = n - 1$ .

**Définition 40** Soit  $D = (V, A)$  un graphe orienté (simple ou pas). Soit  $\emptyset \neq X \subset V$ ,  $X \neq V$ . Appelons séparateur l'ensemble  $(X, \bar{X}) = \{a \in A : \text{la queue de } a \text{ est dans } X \text{ et la tête de } a \text{ dans } \bar{X}\}$ .

**Définition 41** Soit  $D = (V, A)$  un graphe orienté, pas forcément simple. Un réseau sur  $D$  est obtenu à partir de  $D$  en spécifiant l'ensemble  $\emptyset \neq S \subset V$  de sources et l'ensemble  $\emptyset \neq T \subset V$  de puits,  $S \cap T = \emptyset$  ainsi qu'une application  $c : A \rightarrow \mathbb{N}$  de capacité. On définit  $I = V \setminus (S \cup T)$  l'ensemble de sommets internes. La fonction de capacité est étendue aux ensembles d'arc :  $c(M) = \sum_{a \in M} c(a)$  pour  $M \subseteq A$ .

**Définition 42** Soit  $N$  un réseau,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On étend  $f$  aux ensembles d'arcs : pour  $X \subset A$ ,  $f(X) = \sum_{a \in X} f(a)$ . Si  $(X, \bar{X})$  est un séparateur, alors  $f^+(X) = f(X, \bar{X})$  et  $f^-(X) = f(\bar{X}, X)$ ; si  $X = \{x\}$ , on écrit simplement  $f^+(x)$ ,  $f^-(x)$ .

**Définition 43** Soit  $N$  un réseau avec source  $s$  et puit  $t$ . Une coupe dans  $N$  est un séparateur  $X, \bar{X}$  tel que  $s \in X$  et  $t \in \bar{X}$ . La capacité d'une coupe  $K = (X, \bar{X})$  est  $c(K) = \sum_{a \in K} c(a)$ . Une coupe est minimum si pour toute coupe  $K' = (Y, \bar{Y})$  dans  $N$ ,  $c(K') \geq c(K)$ .

**Définition 44** Soit  $N$  un réseau sur  $D = (V, A)$ . Un flot dans  $N$  est une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

- $f^+(u) = f^-(u)$  si  $u \in I$ ;



- $0 \leq f(a) \leq c(a)$  pour  $a \in A$ .

**Définition 45** La valeur d'un flot  $f$  dans un réseau  $N$  avec source  $s$  et puit  $t$  est  $\text{val}f = f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$ . Le flot  $f$  est maximum si  $\text{val}f \geq \text{val}f'$  pour tout flot  $f'$  dans  $N$ .

**Définition 46** Soit  $N$  un réseau avec source  $s$  et puit  $t$  et soit  $f$  un flot dans  $N$ . Une chaîne augmentante est une chaîne  $P$  de  $s$  vers  $t$  tel pour  $a \in A(P)$ ,

- $c(a) - f(a) > 0$  si  $a$  est un arc en avant, et
- $f(a) > 0$  si  $a$  est un arc inverse.

Si  $P = s = u_0 \dots u_l = t$ , un arc  $u_i u_{i+1}$ , est en avant, un arc  $u_i u_{i-1}$  est inverse.

**Définition 47** Deux chaînes (chemins) dans un graphe (orienté) sont disjointes (disjoints) si elles (ils) n'ont aucun sommet en commun. Elles (ils) sont arête-disjointes (arcs-disjoints) si elles (ils) ne partagent aucune arête (arc).

Deux chaînes (chemins) entre deux sommets donnés  $u$  et  $v$  dans un graphe (orienté) sont indépendantes (indépendants) si elles (ils) n'ont aucun sommet en commun sauf  $u$  et  $v$  (on dit souvent qu'elles sont disjointes à l'intérieur ou encore intérieurement).

**Définition 48** Un couplage dans un graphe  $G = (V, E)$  est un ensemble  $M \subseteq E$  tel que  $e \cap f = \emptyset$  si  $e \neq f \in M$ . Un sommet de  $G$  est  $M$ -saturé s'il est une extrémité d'une arête de  $M$  (i.e., il existe un  $v \in V$  tel que  $uv = e \in M$ , si le graphe est simple). Un couplage est parfait si tout les sommets de  $G$  sont  $M$ -saturés. Un couplage  $M$  est maximum si pour tout couplage  $M'$ ,  $|M| \geq |M'|$ .

**Définition 49** Soit  $G$  un graphe est  $M$  un couplage dans  $G$ . Une chaîne  $P$  dans  $G$  est  $M$ -alternante si deux arêtes successives de  $P$  ne sont ni dans  $M$  ni dans  $E \setminus M$ , i.e. si es arêtes sont en alternance dans  $M$  et pas dans  $M$ . Une chaîne alternante est  $M$ -augmentante si ni la première ni la dernière arête n'est dans  $M$ .

**Définition 50** Soit  $M$  une matrice. Une ligne dans  $M$  est soit une rangée. soit une colonne de  $M$ . Deux entrée de  $M$  sont indépendantes si elles ne sont pas sur la même ligne. Si les entrée de  $M$  sont 0,1 l'ensemble  $L$  de lignes couvre  $M$  si les lignes de  $L$  contiennent tous les 1.

**Définition 51** Soit  $X = \{X_i\}_{i \in [n]}$  une famille d'ensembles finis. Un système de représentants distincts (SRD) de  $X$  est un ensemble  $\{x_i : i \in [n]\}$  tel que  $x_i \in X_i$  (notons que puisque  $\{x_i : i \in [i]\}$  est un ensemble,  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ ).

**Définition 52** Un tournoi est un graphe complet (donc simple) dont les arêtes sont orientés. En d'autres mots, entre chaque paire de sommets d'un tournoi il y un arc unique.

**Définition 53** Un ensemble absorbant dans un graphe orienté  $D = (V, A)$  dont les arêtes son coloriées est un ensemble de sommets  $S$  tel que de tout  $u \in V \setminus S$  il existe un chemin (orienté!) monochromatique vers un sommet de  $S$ .

**Définition 54** Un noyau dans un graphe orienté  $D = V, A$  est un stable minimum  $S \subset V$  tel que si  $v \in V \setminus S$  alors il existe un  $s \in S$  avec  $vs \in A$ .

**Définition 55** Un demi-noyau dans un graphe orienté  $D = V, A$  est un stable minimum  $S \subset V$  tel que si  $v \in V \setminus S$  alors il existe un  $s \in S$  avec  $d(v, s) \leq 2$  (la distance est orientée, i.e. c'est la longueur d'un plus court chemin orienté).

**Définition 56** Un groupe  $(G, *)$  est un ensemble  $G$  muni d'une opération binaire  $*$  vérifiant pour tout  $a, b, c \in G$ ,

- pour tout  $a, b \in G$ ,  $a * b \in G$  ( $G$  est fermé sous l'opération  $*$ );
- pour tout  $a, b, c \in G$ ,  $(a * b) * c = a * (b * c)$  (l'opération  $*$  est associative);
- il existe un  $e \in G$  tel que pour tout  $a \in G$ ,  $a * e = e * a = a$  ( $e$  est l'identité ou élément neutre de  $G$ );
- pour tout  $a \in G$ , il existe  $b \in G$  tel que  $a * b = b * a = e$  (chaque élément de  $G$  possède un inverse)

On prouve (exercice) l'unicité de  $e$  ainsi que de  $b$  étant donné  $a$ ; on peut alors écrire  $b = a^{-1}$ . Notons que  $*$  n'est pas toujours commutative, i.e. il se peut que  $a * b \neq b * a$ .

**Définition 57** Un groupe  $(G, *)$  est engendré par l'ensemble  $X \subseteq G$  si tout élément de  $G$  peut être exprimé en termes de ceux de  $X$  et l'opération  $*$ . I.e. si on écrit  $a^0 = e$  et  $a^i = a^{i-1} * a$ , alors pour tout  $b \in G$  il existe un  $k \in \mathbb{N}$ , des  $k_i \in \mathbb{N}$  et des éléments  $a_i \in G$ ,  $i = 1, \dots, k$ , tels que  $b = \prod_{i=1}^k a_i^{k_i}$ . En d'autres mots, si on prends tous les produits (sous  $*$ ) des éléments de  $X$ , on obtient  $G$ . Si  $G$  est engendré par  $X$ , on dit que  $X$  est un ensemble générateur de  $G$ .

**Définition 58** Le groupe  $(D_n, \cdot)$  engendré par l'ensemble  $\{r, m\}$  ( $r$  est une rotation et  $m$  un miroir) vérifiant  $r^n = e = m^2$  et  $rm = mr^{-1}$  est un groupe diédral.

**Définition 59** Soit  $G$  un groupe. Une partie  $S$  de  $G$  est un symbole si

1.  $a \in S$  si et seulement si  $a^{-1} \in S$  ( $S$  est fermé par rapport à l'inverse);
2.  $e \notin S$  ( $S$  ne contient pas l'identité de  $G$ )

**Définition 60** Soit  $G$  un groupe et  $S$  un symbole. Le graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  a  $G$  comme l'ensemble de sommets et ses arêtes sont les paires  $(a, b)$  telles que  $a^{-1}b \in S$  (i.e. il existe un  $s \in S$  avec  $as = b$ ).

**Définition 61** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Son graphe d'indépendance  $\text{Ind}(G)$  est le graphe dont les sommets sont les stables maximaux de  $G$  et une arête joint deux stables dont l'intersection est vide. I.e.  $V(\text{Ind}(G)) = \{X \subseteq V : X \text{ est un stable maximum de } G\}$  et  $E(\text{Ind}(G)) = \{XY : X \cap Y = \emptyset\}$ .

**Définition 62** Un arbre enraciné est un arbre  $T = (V, E)$  avec un sommet distingué  $r \in V$ , appelé racine.

Le fait de distinguer  $r$  donne une orientation implicite de  $E$  : puisque  $T$  est un arbre, pour chaque sommet  $u \in V$  il existe une chaîne unique de  $r$  vers  $u$  et on peut orienter les arêtes dans la direction de  $r$  vers  $u$ . Dans un tel arbre on peut donc parler d'un sous-arbre avec racine  $u$  : le sous-graphe connexe contenant  $u$  et tous les sommets  $x$  tels que l'unique chaîne de  $r$  vers  $x$  passe par  $u$ .