

Monte Carlo avec Régression par Moindres Carrés

$$J_N(x) = g_N(x) \quad \text{pour } x \in X_N,$$

$$J_k(x) = \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E}_{w_k} [g_k(x, u, w_k) + J_{k+1}(f_k(x, u, w_k))], \quad 0 \leq k < N, x \in X_k,$$

Choisir une classe de fonctions $\{\Psi_i : S \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq d\}$, puis approximer J_k par

$$\tilde{J}_k(x) = \sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x)$$

où les $\beta_{k,i}$ sont des coefficients à choisir.

On peut par exemple évaluer (ou approximer) $J_k(x)$ en un nombre fini de points x^1, \dots, x^M (j'utilise la notation de Bertsekas...), disons par $\bar{J}_k(x^1), \dots, \bar{J}_k(x^M)$, puis déterminer les $\beta_{k,i}$ par régression linéaire, en minimisant la somme des carrés:

$$\min_{\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,d}} \sum_{x^m \in \bar{S}} \left(\tilde{J}_k(x^m) - \bar{J}_k(x^m) \right)^2 = \sum_{x^m \in \bar{S}} \left(\sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x^m) - \bar{J}_k(x^m) \right)^2.$$

Difficulté majeure (surtout en grande dimension):
Comment choisir les points x^m ?

Difficulté majeure (surtout en grande dimension):
Comment choisir les points x^m ?

Idée: simuler des réalisations du processus et prendre les points visités aux différentes étapes.

Dans certains cas, on peut simuler des réalisations indépendamment des décisions ou politiques. C'est le cas par exemple lorsqu'on veut évaluer une option financière de type américaine: on peut simuler le processus sous-jacent sans égard aux décisions d'exercice de l'option.

(Autre difficulté importante: Comment choisir les Ψ_i ?)

Problème de temps d'arrêt optimal

À chaque étape $k < N$, on peut ou bien s'**arrêter** et encaisser un revenu $g_k(x_k) \geq 0$, ou bien **continuer** pour au moins une autre étape, avec un revenu espéré (**valeur de retention**)

$$Q_k(x_k) = \mathbb{E}[J_{k+1}(f_k(x_k, w_k)) \mid x_k].$$

La **valeur optimale** est

$$J_k(x) = \max[g_k(x), Q_k(x)], \quad 0 \leq k < N.$$

Pour une option financière, g_k est la valeur d'exercice et Q_k la valeur de retention.

Problème de temps d'arrêt optimal

À chaque étape $k < N$, on peut ou bien s'**arrêter** et encaisser un revenu $g_k(x_k) \geq 0$, ou bien **continuer** pour au moins une autre étape, avec un revenu espéré (**valeur de retention**)

$$Q_k(x_k) = \mathbb{E}[J_{k+1}(f_k(x_k, w_k)) \mid x_k].$$

La **valeur optimale** est

$$J_k(x) = \max[g_k(x), Q_k(x)], \quad 0 \leq k < N.$$

Pour une option financière, g_k est la valeur d'exercice et Q_k la valeur de retention.

Une **politique d'arrêt** est une suite $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ telle que $\mu_k : S \rightarrow \{\text{arrêter}, \text{continuer}\}$. Une telle politique est en fait équivalente à un **temps d'arrêt** τ au sens des processus stochastiques, défini par $\tau = \min\{k \geq 0 : \mu_k(x_k) = \text{arrêter}\}$.

À chaque politique d'arrêt π (ou temps d'arrêt τ), correspond des fonctions de valeur $J_{\pi,k} = J_{\tau,k}$ et $Q_{\pi,k} = Q_{\tau,k}$ qui correspondent à J_k et Q_k lorsque la politique est fixée à π .

Réciproquement, à chaque approximation \tilde{J}_k de J_k , $k = 0, \dots, N - 1$, correspond un temps d'arrêt défini par:

$$\tau = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{J}_k(x_k)\}.$$

De même, à chaque approximation \tilde{Q}_k de Q_k , $k = 0, \dots, N - 1$, correspond un temps d'arrêt défini par:

$$\tau = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{Q}_k(x_k)\}.$$

À chaque politique d'arrêt π (ou temps d'arrêt τ), correspond des fonctions de valeur $J_{\pi,k} = J_{\tau,k}$ et $Q_{\pi,k} = Q_{\tau,k}$ qui correspondent à J_k et Q_k lorsque la politique est fixée à π .

Réciproquement, à chaque approximation \tilde{J}_k de J_k , $k = 0, \dots, N-1$, correspond un temps d'arrêt défini par:

$$\tau = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{J}_k(x_k)\}.$$

De même, à chaque approximation \tilde{Q}_k de Q_k , $k = 0, \dots, N-1$, correspond un temps d'arrêt défini par:

$$\tau = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{Q}_k(x_k)\}.$$

On préfère souvent approximer Q_k plutôt que J_k , car elle est plus lisse. On pose $\tilde{Q}_N(x) = 0$ et

$$\tilde{Q}_k(x) = \sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \psi_i(x),$$

où les $\beta_{k,i}$ sont des coefficients à choisir.

Pour une **trajectoire donnée** et $k < N$, on peut estimer $Q_k(x_k)$ simplement par $\max[g_{k+1}(x_{k+1}), \tilde{Q}_{k+1}(x_{k+1})]$, en supposant que l'on connaît \tilde{Q}_{k+1} .

Algorithme de régression (Tsitsiklis et Van Roy 1999).

1. Simuler n trajectoires indépendantes $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$, $1 \leq j \leq n$, du processus Markovien de base, avec $x_{j,0} = x_0$.
2. Poser $v_{j,N} = g_N(x_{j,N})$ pour $j = 1, \dots, n$.
3. Pour $k = N - 1, \dots, 0$ faire:
 - 3a. Calculer les coefficients $\beta_{k,i}$ (pour Q_k) qui minimisent

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x_{j,k}) - v_{j,k+1} \right)^2.$$

// Note: $v_{j,k+1}$ est l'estimation de $Q_k(x_{j,k})$.

// $\tilde{Q}_k(x)$ est maintenant définie partout.

3b. Poser $v_{j,k} = \max[g_k(x_{j,k}), \tilde{Q}_k(x_{j,k})]$, $j = 1, \dots, n$.

4. Estimer $Q_0(x_0)$ par $\hat{Q}_0(x_0) = (v_{1,0} + \dots + v_{n,0})/n$.

Algorithme de régression (Tsitsiklis et Van Roy 1999).

1. Simuler n trajectoires indépendantes $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$, $1 \leq j \leq n$, du processus Markovien de base, avec $x_{j,0} = x_0$.
2. Poser $v_{j,N} = g_N(x_{j,N})$ pour $j = 1, \dots, n$.
3. Pour $k = N - 1, \dots, 0$ faire:
 - 3a. Calculer les coefficients $\beta_{k,i}$ (pour Q_k) qui minimisent

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x_{j,k}) - v_{j,k+1} \right)^2.$$

// Note: $v_{j,k+1}$ est l'estimation de $Q_k(x_{j,k})$.

// $\tilde{Q}_k(x)$ est maintenant définie partout.

3b. Poser $v_{j,k} = \max[g_k(x_{j,k}), \tilde{Q}_k(x_{j,k})]$, $j = 1, \dots, n$.

4. Estimer $Q_0(x_0)$ par $\hat{Q}_0(x_0) = (v_{1,0} + \dots + v_{n,0})/n$.

Deux sources d'erreur: (1) valeur finie de n et (2) distance entre chaque fonction Q_k et l'espace fonctionnel engendré par les fonctions de base.

Le vecteur de coefficients $\beta_k = (\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,d})$ qui minimise la somme des carrés est

$$\tilde{\beta}_k = \hat{B}_\psi^{-1} \hat{B}_{\psi,v},$$

où \hat{B}_ψ est la matrice dont l'élément (i, ℓ) est

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Psi_i(x_{j,k}) \Psi_\ell(x_{j,k})$$

et $\hat{B}_{\psi,v}$ est le vecteur colonne dont l'élément i est

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Psi_i(x_{j,k}) v_{j,k+1}.$$

Pour plus de détails sur ces formules, voir n'importe quel bon livre sur la régression linéaire.

L'espace fonctionnel engendré par les fonctions de base à l'étape k est

$$\mathcal{F}_k = \left\{ f : X_k \rightarrow \mathbb{R} \text{ such that } f(x) = \sum_{i=1}^d \beta_i \Psi_i(x) \text{ where } \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{R} \right\}.$$

La **distance** en norme \mathcal{L}_2 entre \mathcal{F}_k et Q_k est

$$d_2(\mathcal{F}_k, Q_k) = \inf_{\beta_1, \dots, \beta_d} \left(\int_{x \in X_k} \left(\sum_{i=1}^d \beta_i \Psi_i(x) - Q_k(x) \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

et celle en norme sup est

$$d_\infty(\mathcal{F}_k, Q_k) = \inf_{\beta_1, \dots, \beta_d} \sup_{x \in X_k} \left| \sum_{i=1}^d \beta_i \Psi_i(x) - Q_k(x) \right|.$$

En pratique, on n'a pas tout à fait la meilleure approximation de Q_k par une fonction de \mathcal{F}_k , à cause de **l'erreur statistique** (n fini).

Amélioration: Régression avec 1SL.

L'algorithme précédent nous fournit des approximations \tilde{Q}_k des fonctions Q_k , ce qui nous donne une politique d'arrêt définie par

$$\tilde{\tau} = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{Q}_k(x_k)\}.$$

Notons $J_{\tilde{\tau},k}$ et $Q_{\tilde{\tau},k}$ les fonctions de valeur associées à cette politique (ou ce temps d'arrêt) $\tilde{\tau}$.

Cette politique est la **politique 1SL** (one-step lookahead) associée à l'approximation \tilde{Q}_k .

Puisqu'elle ne peut pas faire mieux que la politique optimale, on a nécessairement $J_{\tilde{\tau},k}(x) \leq J_k(x)$ pour tout k et x .

On obtient facilement un estimateur **sans biais** de $J_{\tilde{\tau},0}(x)$ en simulant le système avec cette politique (fixée) plusieurs fois, indépendamment, et en faisant la moyenne. L'espérance de cet estimateur est $J_{\tilde{\tau},0}(x) \leq J_0(x)$. Cela donne un estimateur de $J_0(x)$ à **biais négatif** ("low bias").

Algorithme LSM.

1. Simuler n trajectoires indépendantes $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$, $1 \leq j \leq n$, du processus Markovien de base, avec $x_{j,0} = x_0$.
2. Poser $v_{j,N} = g_N(x_{j,N})$ pour $j = 1, \dots, n$.
3. Pour $k = N - 1, \dots, 0$ faire:
 - 3a. Calculer les coefficients $\beta_{k,i}$ (pour Q_k) qui minimisent

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x_{j,k}) - v_{j,k+1} \right)^2.$$

- 3b. Pour $j = 1, \dots, n$, poser

$$v_{j,k} = \begin{cases} g_k(x_{j,k}) & \text{si } g_k(x_{j,k}) \geq \tilde{Q}_k(x_{j,k}); \\ v_{j,k+1} & \text{sinon (seule différence)}. \end{cases}$$

4. Estimer $Q_0(x_0)$ par $\hat{Q}_0(x_0) = (v_{1,0} + \dots + v_{n,0})/n$.

Algorithme LSM.

1. Simuler n trajectoires indépendantes $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$, $1 \leq j \leq n$, du processus Markovien de base, avec $x_{j,0} = x_0$.
2. Poser $v_{j,N} = g_N(x_{j,N})$ pour $j = 1, \dots, n$.
3. Pour $k = N - 1, \dots, 0$ faire:
 - 3a. Calculer les coefficients $\beta_{k,i}$ (pour Q_k) qui minimisent

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x_{j,k}) - v_{j,k+1} \right)^2.$$

- 3b. Pour $j = 1, \dots, n$, poser

$$v_{j,k} = \begin{cases} g_k(x_{j,k}) & \text{si } g_k(x_{j,k}) \geq \tilde{Q}_k(x_{j,k}); \\ v_{j,k+1} & \text{sinon (seule différence)}. \end{cases}$$

4. Estimer $Q_0(x_0)$ par $\hat{Q}_0(x_0) = (v_{1,0} + \dots + v_{n,0})/n$.

Ici, lorsqu'on n'exerce pas, on estime la valeur par la valeur de continuation $v_{j,k+1}$ au lieu de l'approximation \tilde{Q}_k . Le biais sur $Q_0(x_0)$ est habituellement négatif, mais il peut aussi être positif.

Au lieu d'approximer les fonctions Q_k par régression, il est possible d'approximer à la place les fonctions μ_k , i.e., les frontières qui délimitent les régions d'arrêt, pour chaque k . Le principe est semblable.

Au lieu d'approximer les fonctions Q_k par régression, il est possible d'approximer à la place les fonctions μ_k , i.e., les frontières qui délimitent les régions d'arrêt, pour chaque k . Le principe est semblable.

On choisit une classe paramétrisée de politiques, $\{\mu_{\theta,k}, \theta \in \Theta\}$ pour chaque k . À chaque $\pi_{\theta} = (\mu_{\theta,0}, \mu_{\theta,1}, \dots)$ correspond une fonction de valeur $J_{\pi_{\theta}}$ et un temps d'arrêt $\tau(\theta)$.

1. Simuler n trajectoires indépendantes $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$, $1 \leq j \leq n$, avec $x_{j,0} = x_0$.
2. Trouver $\tilde{\theta}$ qui maximise le revenu moyen empirique

$$\hat{J}_{\tilde{\theta},0}(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_{\tau_j(\tilde{\theta})}(x_{j,\tau_j(\tilde{\theta})})$$

p.r. à θ , où $\tau_j(\theta)$ est le temps d'arrêt pour la trajectoire j .

3. Approximer $J_0(x_0)$ par $J_{\tilde{\theta},0}(x_0)$.

Au lieu d'approximer les fonctions Q_k par régression, il est possible d'approximer à la place les fonctions μ_k , i.e., les frontières qui délimitent les régions d'arrêt, pour chaque k . Le principe est semblable.

On choisit une classe paramétrisée de politiques, $\{\mu_{\theta,k}, \theta \in \Theta\}$ pour chaque k . À chaque $\pi_{\theta} = (\mu_{\theta,0}, \mu_{\theta,1}, \dots)$ correspond une fonction de valeur $J_{\pi_{\theta}}$ et un temps d'arrêt $\tau(\theta)$.

1. Simuler n trajectoires indépendantes $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$, $1 \leq j \leq n$, avec $x_{j,0} = x_0$.
2. Trouver $\tilde{\theta}$ qui maximise le revenu moyen empirique

$$\hat{J}_{\tilde{\theta},0}(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_{\tau_j(\tilde{\theta})}(x_{j,\tau_j(\tilde{\theta})})$$

p.r. à θ , où $\tau_j(\theta)$ est le temps d'arrêt pour la trajectoire j .

3. Approximer $J_0(x_0)$ par $J_{\tilde{\theta},0}(x_0)$.

Biais: on a $\mathbb{E}[\hat{J}_{\tilde{\theta},0}(x_0)] \geq \sup_{\theta} J_{\theta,0}(x_0)$ par l'inégalité de Jensen, et aussi $J_0(x_0) \geq \sup_{\theta} J_{\theta,0}(x_0)$. Le biais peut être négatif ou positif.

Évaluation d'une politique.

Après avoir appliqué l'un des algorithmes, la politique retenue $\tilde{\pi}$ est aléatoire. On évalue ensuite cette politique hors-échantillon (out of sample) via (disons) n' simulations indépendantes. Cela donne un estimateur (biaisé) $\hat{Q}_{\tilde{\pi},0}(x_0)$ de la valeur optimale, dont la variance est:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{Q}_{\tilde{\pi},0}(x_0)] &= \text{Var}[\mathbb{E}[\hat{Q}_{\tilde{\pi},0}(x_0) \mid \tilde{\pi}]] + \mathbb{E}[\text{Var}[\hat{Q}_{\tilde{\pi},0}(x_0) \mid \tilde{\pi}]] \\ &= \text{Var}[V_{\tilde{\pi}}(x_0)] + \mathbb{E}[\text{Var}[\hat{Q}_{\tilde{\pi},0}(x_0) \mid \tilde{\pi}]] \\ &= \text{Var}[V_{\tilde{\pi}}(x_0)] + \mathbb{E}[\text{Var}[g_{\tilde{\pi}}(X_{\tilde{\pi}}) \mid \tilde{\pi}]]/n'. \end{aligned}$$

Habituellement, on peut rendre le second terme négligeable par rapport au premier en prenant un n' très grand.

Exemple (Glasserman 2004, chap. 8): Option américaine sur le max des¹² prix de deux actifs S_1 et S_2 , qui évoluent selon des mouvements Browniens géométriques indépendants.

Dates d'exercices: $t_k = k/3$ pour $k = 1, \dots, 9$. Revenu:

$$g_k(S_1(t_k), S_2(t_k)) = \max[S_1(t_k) - K, S_2(t_k) - K, 0].$$

Taux d'intérêt $r = 5\%$, dividende $\delta = 10\%$, volatilité $\sigma = 0.20$.

Valeur exacte: 13.90, 8.08, 21.34 pour $S_k(0) = 100, 90, 110$.

On approxime par Monte Carlo + régression, avec $n = 4000$. Résultats pour $S_k(0) = 100$:

fonctions de base	régression	1SL	LSM
$1, S_i, S_i^2, S_i^3$	15.74	13.62	13.67
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2$	15.24	13.65	13.68
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2, \max(S_1, S_2)$	15.23	13.64	13.63
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2, S_1^2 S_2, S_1 S_2^2$	15.07	13.71	13.67
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2, S_1^2 S_2, S_1 S_2^2, g_k(S_1, S_2)$	14.06	13.77	13.79
$1, S_i, S_i^2, S_1 S_2, g_k(S_1, S_2)$	14.08	13.78	13.78

Résultats pour $S_k(0) = 90$ et 110. Valeurs exactes: 8.08 et 21.34.

régression	1SL	LSM	régression	1SL	LSM
9.49	7.93	7.92	24.52	20.79	21.14
9.39	7.97	7.87	23.18	21.02	21.15
9.44	7.98	7.87	22.76	20.98	21.02
9.25	7.95	7.87	22.49	21.08	21.15
8.24	8.01	7.95	21.42	21.25	21.20
8.27	7.99	7.99	21.38	21.26	21.16

Longstaff et Schwartz (2001) recommandent de n'utiliser que les points $x_{j,k}$ où $g_k(x_{j,k}) > 0$ dans la régression, au lieu de tous les points $x_{j,k}$. Mais Glasserman (2004) dit qu'il a obtenu de moins bons résultats de cette manière.

Example: a simple put option

For more details on this and the following examples, see M. Dion and P. L'Ecuyer, "American Option Pricing with Randomized Quasi-Monte Carlo Simulation", Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference, 2010, 2705-2720. <http://www.informs-sim.org/wsc10papers/250.pdf>

Asset price obeys GBM $\{S(t), t \geq 0\}$ with drift (interest rate) $\mu = 0.05$, volatility $\sigma = 0.08$, initial value $S(0) = 100$.

For **American version**, exercise dates are $t_j = j/16$ for $j = 1, \dots, 16$.

Payoff at t_j : $g_j(S(t_j)) = e^{-0.05t_j} \max(0, K - S(t_j))$, where $K = 101$.

European version: Can exercise only at $t_{16} = 1$.

Example: a simple put option

For more details on this and the following examples, see M. Dion and P. L'Ecuyer, "American Option Pricing with Randomized Quasi-Monte Carlo Simulation", Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference, 2010, 2705-2720. <http://www.informs-sim.org/wsc10papers/250.pdf>

Asset price obeys GBM $\{S(t), t \geq 0\}$ with drift (interest rate) $\mu = 0.05$, volatility $\sigma = 0.08$, initial value $S(0) = 100$.

For **American version**, exercise dates are $t_j = j/16$ for $j = 1, \dots, 16$.

Payoff at t_j : $g_j(S(t_j)) = e^{-0.05t_j} \max(0, K - S(t_j))$, where $K = 101$.

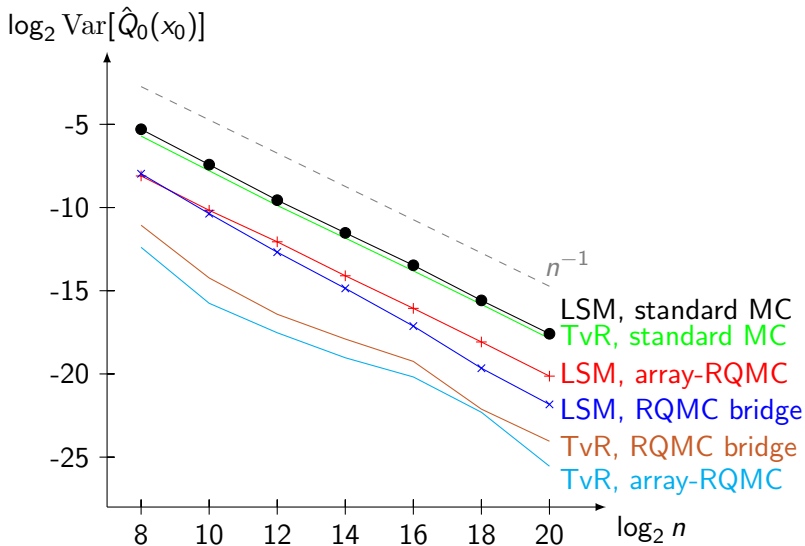
European version: Can exercise only at $t_{16} = 1$.

One-dimensional state $X_j = S(t_j)$.

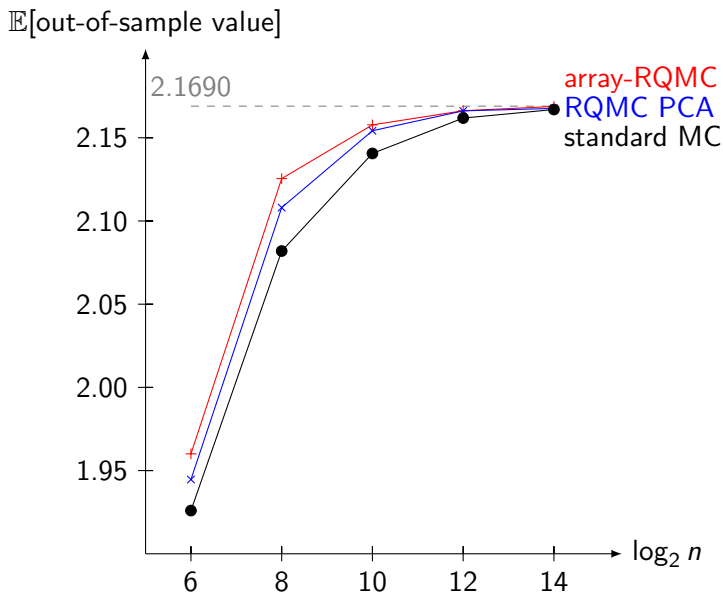
Basis functions: polynomials $\psi_k(x) = (x - 101)^{k-1}$ for $k = 1, \dots, 5$.

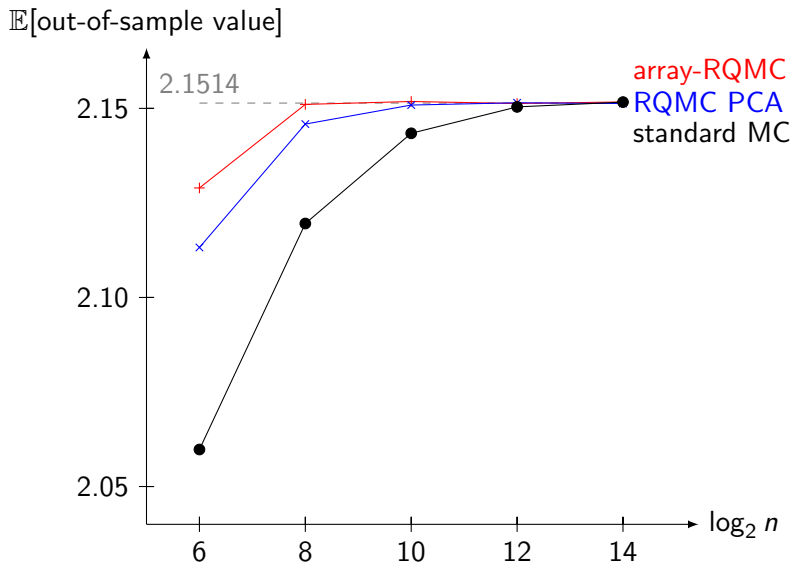
For TvR, add $\psi_6(x) = \max(0, x - 101)$ and $\psi_7(x) = (\max(0, x - 101))^2$.

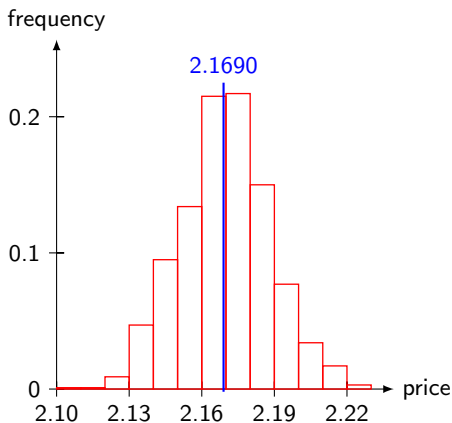
American put option.



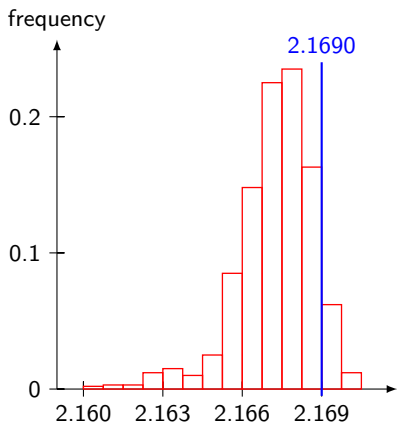
American put: out-of-sample value for policy obtained from LSM. ¹⁶







1000 indep. replications of $\hat{Q}_0(x_0)$ for LSM with MC.



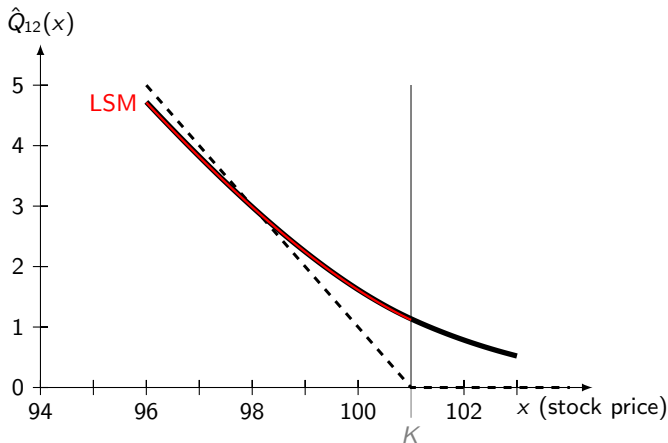
1000 second-stage (out-of-sample) estimates of $V_{\hat{\pi}}(x_0)$, for LSM with MC.

Standard error on each value is the width of a rectangle.

Continuation value at time step 12 (out of 16)

Bold black: Our best estimate of the exact continuation value

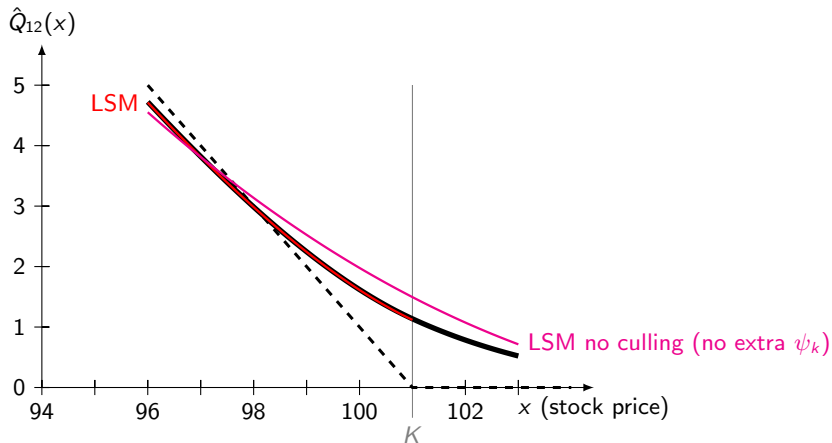
Dashed: Exercise value.



Continuation value at time step 12 (out of 16)

Bold black: Our best estimate of the exact continuation value

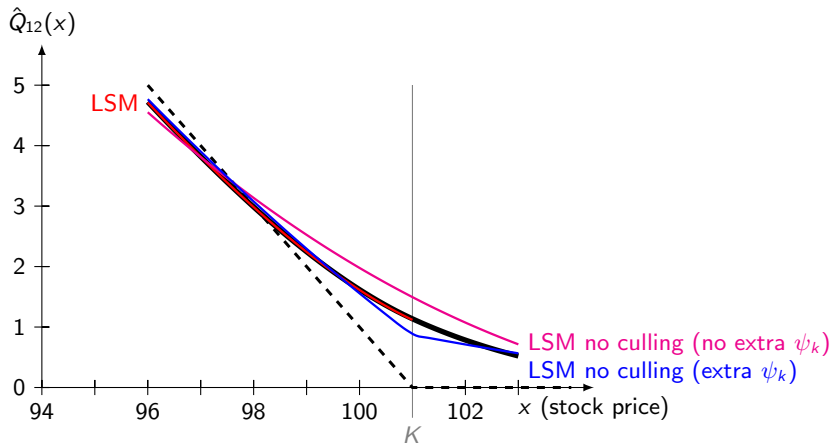
Dashed: Exercise value.



Continuation value at time step 12 (out of 16)

Bold black: Our best estimate of the exact continuation value

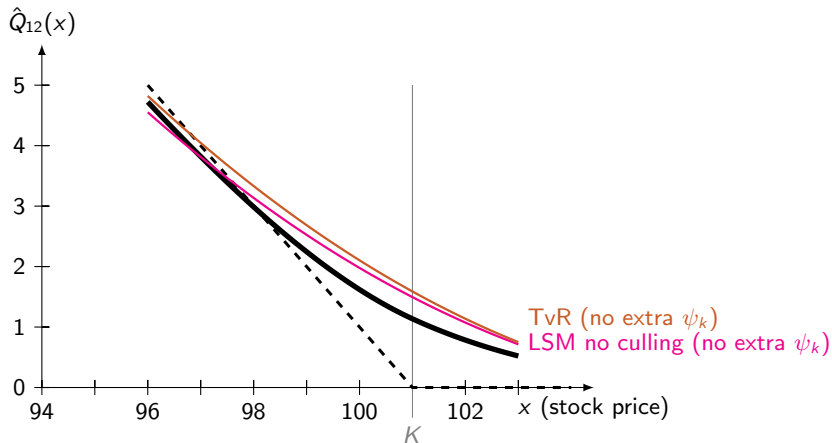
Dashed: Exercise value.



Continuation value at time step 12 (out of 16)

Bold black: Our best estimate of the exact continuation value

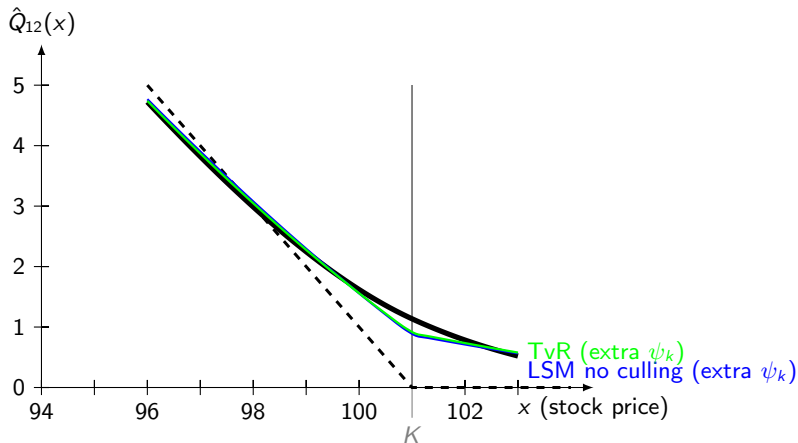
Dashed: Exercise value.



Continuation value at time step 12 (out of 16)

Bold black: Our best estimate of the exact continuation value

Dashed: Exercise value.



Example: Asian Option

Given observation times t_1, t_2, \dots, t_s , suppose

$$S(t_j) = S(t_{j-1}) \exp[(r - \sigma^2/2)(t_j - t_{j-1}) + \sigma(t_j - t_{j-1})^{1/2} \Phi^{-1}(U_j)],$$

where $U_j \sim U[0, 1]$ and $S(t_0) = s_0$ is fixed.

State is $X_j = (S(t_j), \bar{S}_j)$, where $\bar{S}_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j S(t_i)$.

Transition:

$$(S(t_j), \bar{S}_j) = \varphi(S(t_{j-1}), \bar{S}_{j-1}, U_j) = \left(S(t_j), \frac{(j-1)\bar{S}_{j-1} + S(t_j)}{j} \right).$$

Payoff at step j is $\max[0, \bar{S}_j - K]$.

GBM with parameters: $S(0) = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$,
 $t_j = j/52$ for $j = 0, \dots, s = 13$.

Basis functions to approximate the continuation value:

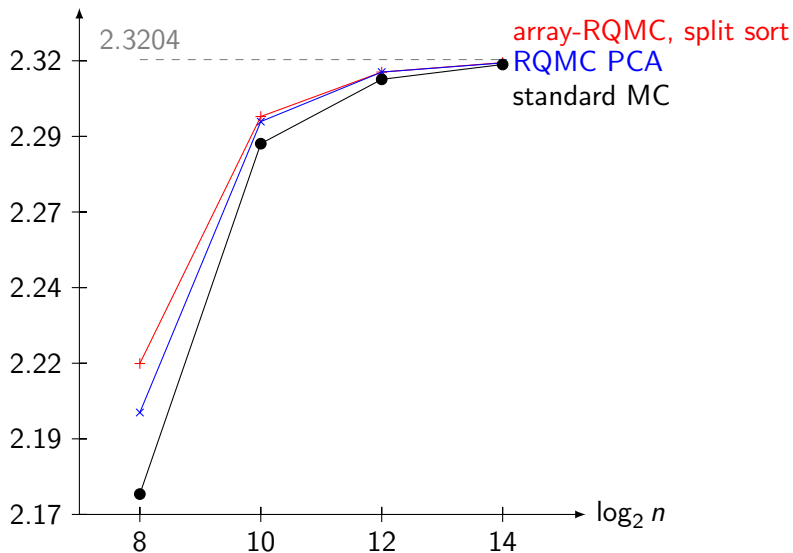
$$g(S, \bar{S}) = (S - 100)^k (\bar{S} - 100)^m, \quad k, m = 0, \dots, 4 \text{ and } km \leq 4;$$

$$\max(0, S - 100)^k \quad k = 1, 2;$$

$$\max(0, S - 100)(\bar{S} - 100).$$

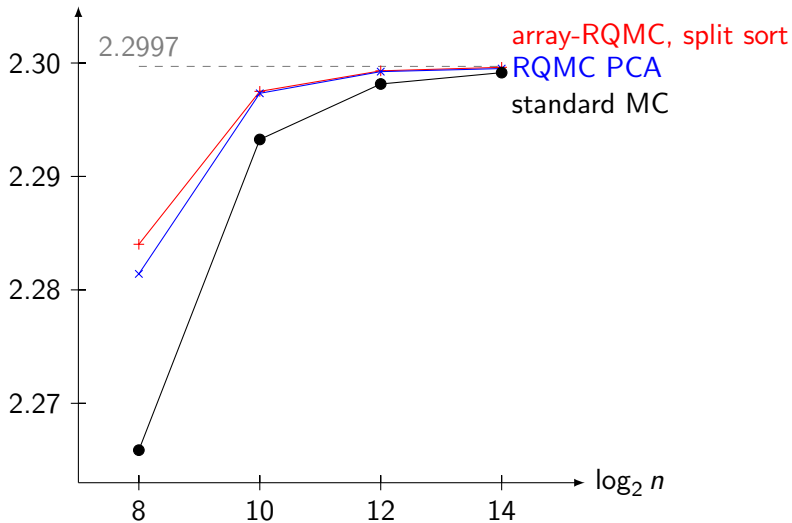
Out-of-sample value of policy obtained from LSM.

$\mathbb{E}[\text{out-of-sample value}]$



Out-of-sample value of policy obtained from TvR.

$\mathbb{E}[\text{out-of-sample value}]$



Callable Bond

Bond issued at $t_0 = 0$, pays coupon $c = 0.0425$ at $t_i^c = (i - 1) + 0.172$ for $i = 1, \dots, d = 21$, plus principal of 1 at maturity date t_d^c .

Can be called back by issuer (if interest rate is low) at $t_i^c - 0.1666$, for $i = 11, \dots, d$. Owner then receives $c + C_j$ at t_j^c .

We have $C_{11} = 1.025$, $C_{12} = 1.02$, $C_{13} = 1.015$, $C_{14} = 1.01$, $C_{15} = 1.005$, and $C_j = 1$ for $j = 16, \dots, 21$.

Callable Bond

Bond issued at $t_0 = 0$, pays coupon $c = 0.0425$ at $t_i^c = (i - 1) + 0.172$ for $i = 1, \dots, d = 21$, plus principal of 1 at maturity date t_d^c .

Can be called back by issuer (if interest rate is low) at $t_i^c - 0.1666$, for $i = 11, \dots, d$. Owner then receives $c + C_j$ at t_j^c .

We have $C_{11} = 1.025$, $C_{12} = 1.02$, $C_{13} = 1.015$, $C_{14} = 1.01$, $C_{15} = 1.005$, and $C_j = 1$ for $j = 16, \dots, 21$.

Interest rate process $\{R(t), t \geq 0\}$ obeys Vasicek model:

$$dR(t) = \kappa(\bar{r} - R(t))dt + \sigma dB(t), \quad R(0) = 0.05,$$

with $\bar{r} = 0.098397028$, $\kappa = 0.44178462$, $\sigma = 0.13264223$.

Discount factor from t_j to t_{j-1} : $D_j = \exp\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} R(y)dy\right]$.

Conditional on $R(t_{j-1})$, the pair $(R(t_j), D_j)$ has a known distribution.

Callable Bond

Bond issued at $t_0 = 0$, pays coupon $c = 0.0425$ at $t_i^c = (i - 1) + 0.172$ for $i = 1, \dots, d = 21$, plus principal of 1 at maturity date t_d^c .

Can be called back by issuer (if interest rate is low) at $t_i^c - 0.1666$, for $i = 11, \dots, d$. Owner then receives $c + C_j$ at t_j^c .

We have $C_{11} = 1.025$, $C_{12} = 1.02$, $C_{13} = 1.015$, $C_{14} = 1.01$, $C_{15} = 1.005$, and $C_j = 1$ for $j = 16, \dots, 21$.

Interest rate process $\{R(t), t \geq 0\}$ obeys Vasicek model:

$$dR(t) = \kappa(\bar{r} - R(t))dt + \sigma dB(t), \quad R(0) = 0.05,$$

with $\bar{r} = 0.098397028$, $\kappa = 0.44178462$, $\sigma = 0.13264223$.

Discount factor from t_j to t_{j-1} : $D_j = \exp\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} R(y)dy\right]$.

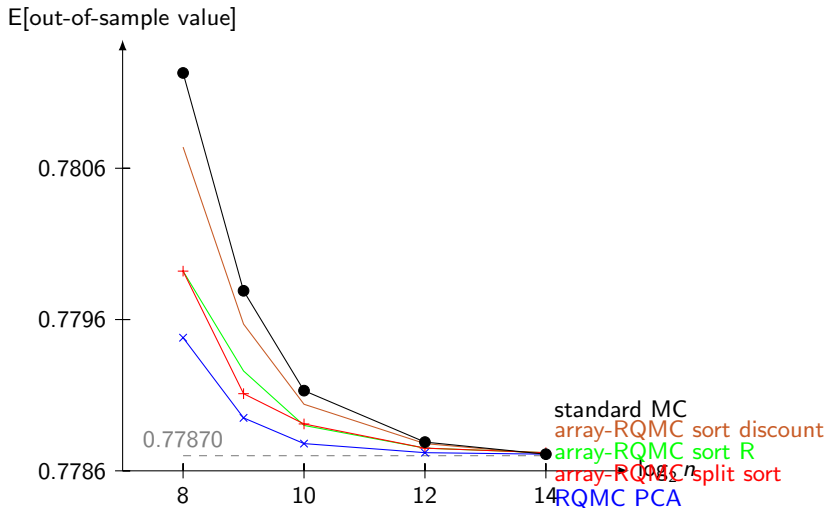
Conditional on $R(t_{j-1})$, the pair $(R(t_j), D_j)$ has a known distribution.

Value function: expected cost-to-go to the issuer, given interest rate R .

Basis functions for both LSM and TvR: $\{\psi_k(R) = R^k, k = 0, \dots, 3\}$.

Optimization of the Exercise Policy

Callable bond: expected out-of-sample value, with LSM.



Callable bond: expected out-of-sample value with optimization via TvR. ²⁶

