

IFT-6561, Solution Intra Nov. 2003

1. (a) Soient $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ les observations triées. On a

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[x_i \leq x].$$

IFT-6561, Solution Intra Nov. 2003

1. (a) Soient $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ les observations triées. On a

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[x_i \leq x].$$

(b) On génère $U \sim U(0, 1)$ et on pose $X = x_{(i+1)}$ si $i/n \leq U < (i+1)/n$, i.e., $X = x_{(\lfloor nU \rfloor + 1)}$.

IFT-6561, Solution Intra Nov. 2003

1. (a) Soient $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ les observations triées. On a

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[x_i \leq x].$$

(b) On génère $U \sim U(0, 1)$ et on pose $X = x_{(i+1)}$ si $i/n \leq U < (i+1)/n$, i.e., $X = x_{(\lfloor nU \rfloor + 1)}$.

(c) On peut poser, par exemple,

$$\check{F}_n(x) = \begin{cases} \frac{i}{n} + \frac{x - x_{(i)}}{(x_{(i+1)} - x_{(i)})n} & \text{si } x_{(i)} \leq x \leq x_{(i+1)}, i < n \\ 1 - \frac{k}{n} \exp[-(x - x_{(n-k)})/\theta] & \text{si } x > x_{(n-k)}, \end{cases}$$

où $x_{(0)} = 0$, $k \in \{1, 2, 3\}$, et θ est choisi de manière à ce que la moyenne de \check{F}_n soit égale à celle des observations.

IFT-6561, Solution Intra Nov. 2003

1. (a) Soient $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ les observations triées. On a

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[x_i \leq x].$$

(b) On génère $U \sim U(0, 1)$ et on pose $X = x_{(i+1)}$ si $i/n \leq U < (i+1)/n$, i.e., $X = x_{(\lfloor nU \rfloor + 1)}$.

(c) On peut poser, par exemple,

$$\check{F}_n(x) = \begin{cases} \frac{i}{n} + \frac{x - x_{(i)}}{(x_{(i+1)} - x_{(i)})n} & \text{si } x_{(i)} \leq x \leq x_{(i+1)}, i < n-k, \\ 1 - \frac{k}{n} \exp[-(x - x_{(n-k)})/\theta] & \text{si } x > x_{(n-k)}, \end{cases}$$

où $x_{(0)} = 0$, $k \in \{1, 2, 3\}$, et θ est choisi de manière à ce que la moyenne de \check{F}_n soit égale à celle des observations.

(d) On génère $U \sim U(0, 1)$ et si $i/n \leq U < (i+1)/n$, on retourne

$$X = \begin{cases} x_{(i)} + (nU - i)(x_{(i+1)} - x_{(i)}) & \text{si } i < n - k, \\ x_{(n-k)} - \theta \ln[(1 - U)n/k] & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. (a) Il faut multiplier Y par le rapport de vraisemblance

$$\frac{f_{\alpha_0, \alpha_0}(B)}{f_{\alpha_1, \lambda_1}(B)} = \frac{\alpha_0^{\alpha_0} B^{\alpha_0-1} e^{-\alpha_0 B}}{\Gamma(\alpha_0)} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\lambda_1^{\alpha_1} B^{\alpha_1-1} e^{-\lambda_1 B}}.$$

2. (a) Il faut multiplier Y par le rapport de vraisemblance

$$\frac{f_{\alpha_0, \alpha_0}(B)}{f_{\alpha_1, \lambda_1}(B)} = \frac{\alpha_0^{\alpha_0} B^{\alpha_0-1} e^{-\alpha_0 B}}{\Gamma(\alpha_0)} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\lambda_1^{\alpha_1} B^{\alpha_1-1} e^{-\lambda_1 B}}.$$

(b) Si la performance dépend d'événements rares qui se produisent lorsqu'il y a beaucoup d'achalandage, augmenter l'achalandage peut réduire la variance en rendant ces événements moins rares.

3. Le processus $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard, i.e., stationnaire de taux 1.

Preuve: les axiomes d'un processus de Poisson sont que (a) les arrivées se font une à une et (b) le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps est indépendant de ce qui se passe en dehors de cet intervalle.

Puisque $\tilde{N}(x)$ est obtenu du processus original en changeant simplement l'échelle de temps, il vérifie aussi ces axiomes et est donc un processus de Poisson. De plus

$$E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))] = \Lambda(\Lambda^{-1}(x)) = x$$

et donc il est stationnaire de taux 1.

3. Le processus $\{\tilde{N}(x), x \geq 0\}$ est un processus de Poisson standard, i.e., stationnaire de taux 1.

Preuve: les axiomes d'un processus de Poisson sont que (a) les arrivées se font une à une et (b) le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps est indépendant de ce qui se passe en dehors de cet intervalle.

Puisque $\tilde{N}(x)$ est obtenu du processus original en changeant simplement l'échelle de temps, il vérifie aussi ces axiomes et est donc un processus de Poisson. De plus

$$E[\tilde{N}(x)] = E[N(\Lambda^{-1}(x))] = \Lambda(\Lambda^{-1}(x)) = x$$

et donc il est stationnaire de taux 1.

Pour générer les T_i , on génère les instants de saut X_i du processus standard \tilde{N} en posant

$X_0 = 0$ et $X_i = X_{i-1} - \ln(1 - U_i)$, puis $T_i = \Lambda^{-1}(X_i)$.

Facile si Λ^{-1} est facile à calculer.

4. 1. Algorithme séquentiel: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(i) = B(i - 1) + Z_i$ et calculer $S(i)$, pour $i = 1, \dots, 32$.

4. 1. Algorithme séquentiel: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(i) = B(i - 1) + Z_i$ et calculer $S(i)$, pour $i = 1, \dots, 32$.

2. Pont Brownien: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$,

4. 1. **Algorithme séquentiel**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(i) = B(i - 1) + Z_i$ et calculer $S(i)$, pour $i = 1, \dots, 32$.

2. **Pont Brownien**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(32) = \sqrt{32}Z_1$,

4. 1. **Algorithme séquentiel**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(i) = B(i - 1) + Z_i$ et calculer $S(i)$, pour $i = 1, \dots, 32$.

2. **Pont Brownien**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$,
poser $B(32) = \sqrt{32}Z_1$,
 $B(16) = B(32)/2 + \sqrt{8}Z_2$,

4. 1. **Algorithme séquentiel**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(i) = B(i - 1) + Z_i$ et calculer $S(i)$, pour $i = 1, \dots, 32$.

2. **Pont Brownien**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$,
poser $B(32) = \sqrt{32}Z_1$,
 $B(16) = B(32)/2 + \sqrt{8}Z_2$,
 $B(8) = B(16)/2 + \sqrt{4}Z_3$,

4. 1. **Algorithme séquentiel**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(i) = B(i - 1) + Z_i$ et calculer $S(i)$, pour $i = 1, \dots, 32$.

2. **Pont Brownien**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$,
poser $B(32) = \sqrt{32}Z_1$,

$$B(16) = B(32)/2 + \sqrt{8}Z_2,$$

$$B(8) = B(16)/2 + \sqrt{4}Z_3,$$

$$B(24) = [B(16) + B(32)]/2 + \sqrt{4}Z_4, \text{ etc.}$$

4. 1. **Algorithme séquentiel**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$, poser $B(i) = B(i - 1) + Z_i$ et calculer $S(i)$, pour $i = 1, \dots, 32$.

2. **Pont Brownien**: générer Z_1, \dots, Z_{32} i.i.d. $N(0, 1)$,
poser $B(32) = \sqrt{32}Z_1$,

$$B(16) = B(32)/2 + \sqrt{8}Z_2,$$

$$B(8) = B(16)/2 + \sqrt{4}Z_3,$$

$$B(24) = [B(16) + B(32)]/2 + \sqrt{4}Z_4, \text{ etc.}$$

L'avantage de la seconde méthode est qu'une fraction plus importante de la variance (et de la trajectoire) dépend des premières variables aléatoires générées. On pourra plus facilement réduire la variance en améliorant l'uniformité de ces premières variables (réduit la dimension effective).

5. (a)

$$\begin{aligned}\text{Var}[\bar{C}_n] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}[C_i, C_j] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k \right)\end{aligned}$$

et

$$\sigma_\infty^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}[\bar{C}_n] = \sigma^2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \right).$$

5. (a)

$$\begin{aligned}\text{Var}[\bar{C}_n] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}[C_i, C_j] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k \right)\end{aligned}$$

et

$$\sigma_\infty^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}[\bar{C}_n] = \sigma^2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \right).$$

(b) Sous la condition donnée, le TLCF vu en classe tient et on a le TLC

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{C}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{C}_n - \mu)}{\sigma_\infty} \Rightarrow N(0, 1).$$

si $\hat{\sigma}_n^2$ est un estimateur consistant pour la constante de variance σ_∞^2 définie en (a).

5. (a)

$$\begin{aligned}\text{Var}[\bar{C}_n] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}[C_i, C_j] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \rho_k \right)\end{aligned}$$

et

$$\sigma_\infty^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}[\bar{C}_n] = \sigma^2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \right).$$

(b) Sous la condition donnée, le TLCF vu en classe tient et on a le TLC

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{C}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{C}_n - \mu)}{\sigma_\infty} \Rightarrow N(0, 1).$$

si $\hat{\sigma}_n^2$ est un estimateur consistant pour la constante de variance σ_∞^2 définie en (a).

(c) “Batch means”: On divise les n observations en k lots de taille $\ell = n/k$. Soit

$$X_i = \frac{1}{\ell} \sum_{j=\ell(i-1)+1}^{\ell i} C_j$$

la moyenne pour le lot i . La moyenne globale est

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i = \bar{C}_n.$$

Pour calculer un IC, on suppose que les X_i sont indépendants et suivant la loi normale. La méthode est asymptotiquement valide si ces hypothèses deviennent vraies lorsque $n \rightarrow \infty$. La condition donnée en (b) implique la validité asymptotique lorsque $\ell \rightarrow \infty$.

6. (a) $\{C_i, i \geq 1\}$ est régénératif s'il existe une variable aléatoire $\tau_1 > 0$ telle que $\{C_{i+\tau_1}, i \geq 1\}$ est stochastiquement équivalent à $\{C_i, i \geq 1\}$ et indépendant de τ_1 et de $\{C_i, i \leq \tau_1\}$.

6. (a) $\{C_i, i \geq 1\}$ est régénératif s'il existe une variable aléatoire $\tau_1 > 0$ telle que $\{C_{i+\tau_1}, i \geq 1\}$ est stochastiquement équivalent à $\{C_i, i \geq 1\}$ et indépendant de τ_1 et de $\{C_i, i \leq \tau_1\}$.

(b) Soit $\{C_i, i \geq 1\}$ régénératif aux instants $\tau_j, j \geq 1$. Alors

$$v_\rho^\infty = E[V_\rho^\infty] = E[V_{\rho, N(\tau_1)}] + E[e^{-\rho\tau_1}] v_\rho^\infty$$

et donc

$$v_\rho^\infty = \frac{E[V_{\rho, N(\tau_1)}]}{1 - E[e^{-\rho\tau_1}]}.$$

6. (a) $\{C_i, i \geq 1\}$ est régénératif s'il existe une variable aléatoire $\tau_1 > 0$ telle que $\{C_{i+\tau_1}, i \geq 1\}$ est stochastiquement équivalent à $\{C_i, i \geq 1\}$ et indépendant de τ_1 et de $\{C_i, i \leq \tau_1\}$.

(b) Soit $\{C_i, i \geq 1\}$ régénératif aux instants $\tau_j, j \geq 1$. Alors

$$v_\rho^\infty = E[V_\rho^\infty] = E[V_{\rho, N(\tau_1)}] + E[e^{-\rho\tau_1}] v_\rho^\infty$$

et donc

$$v_\rho^\infty = \frac{E[V_{\rho, N(\tau_1)}]}{1 - E[e^{-\rho\tau_1}]}$$

(c) On veut un IC pour $\nu = E[X_j]/E[Y_j]$. Les v.a.

$$Z_j = X_j - \mu Y_j,$$

sont i.i.d. de moyenne 0 et variance

$$\sigma_z^2 = \text{Var}[Z_j] = \text{Var}[X_j] + \mu^2 \text{Var}[Y_j] - 2\mu \text{Cov}(X_j, Y_j).$$

On estime σ_z^2 par son équivalent empirique $\hat{\sigma}_z^2$ (voir notes). En appliquant le TLC aux Z_j , on obtient

$$\frac{\sqrt{n}\bar{Y}_n(\hat{\mu}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_z} = \frac{\sqrt{n}\bar{Z}_n}{\hat{\sigma}_z} \Rightarrow N(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$