

PROCESSUS DE DECISION MARKOVIENS  
A ETAPES DISCRETES: APPLICATION  
A DES PROBLEMES DE REMPLACEMENT  
D'EQUIPEMENT

par

Pierre L'ECUYER

G-83-06

avril 1983



## TABLE DES MATIERES

	<u>PAGES</u>
TABLE DES ILLUSTRATIONS . . . . .	v
SOMMAIRE . . . . .	vi
1. INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Modèles de maintenance . . . . .	1
1.2 Exemple d'un modèle de remplacement . . . . .	3
1.3 Processus de renouvellement markoviens commandés . . . . .	5
1.4 Processus de décision markovien à étapes discrètes . . . . .	9
2. PROCESSUS DE DECISION MARKOVIEN A ETAPES DISCRETES: UN MODELE AVEC FACTEUR D'ACTUALISATION VARIABLE . . . . .	14
2.1 Introduction . . . . .	14
2.2 Définitions et notation . . . . .	20
2.3 Définition d'un PDMED . . . . .	23
2.4 Les opérateurs de la programmation dynamique . . . . .	29
2.5 Les modèles positifs et négatifs . . . . .	30
2.6 Le modèle contractant C . . . . .	34
2.7 Le modèle I . . . . .	39
2.8 Quelques propriétés de C et I . . . . .	43
2.9 Existence d'une stratégie optimale . . . . .	56
2.10 Coûts non bornés . . . . .	61

	<u>PAGES</u>
3. APPROXIMATIONS ET BORNES . . . . .	62
3.1 Introduction . . . . .	62
3.2 L'approximation en programmation dynamique . . . . .	64
3.3 Un algorithme générale utilisant l'approximation de la fonction de coût anticipé à chaque itération . . . . .	75
4. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT MARKOVIEU COMMANDE AVEC ACTUALISATION . . . . .	91
4.1 Introduction . . . . .	91
4.2 Définition d'un PRMC . . . . .	92
4.3 Les versions C et I du modèle de PRMC . . . . .	93
4.4 Modèle homogène . . . . .	94
4.5 Horizon fini . . . . .	95
4.6 Coût espéré moyen par unité de temps . . . . .	97
4.7 Processus de saut commandé . . . . .	97
5. FONCTIONS DE COUT MONOTONES ET POLITIQUES ISOTONES POUR DES PRMC . . . . .	99
5.1 Introduction . . . . .	99
5.2 Fonctions sous-modulaires, isotonie et antitonie . . . . .	101
5.3 Fonctions de coût anticipé monotones; politiques optimales isotones ou antitones . . . . .	108
5.4 Règles dichotomiques à seuil . . . . .	114
5.5 Exemple: Un problème de remplacement . . . . .	116
6. POLITIQUE DE REMPLACEMENT SEQUENTIELLE SUR HORIZON FINI . . . . .	121
6.1 Introduction . . . . .	121
6.2 Description du problème . . . . .	122

	<u>PAGES</u>
6.3 Formulation sous forme d'un modèle I de PRMC . . . . .	123
6.4 Une propriété de la fonction de coût anticipé . . . . .	125
6.5 La méthode des approximations successives . . . . .	126
6.6 Un exemple numérique . . . . .	131
6.7 Remarques . . . . .	148
7. UN MODELE DE REMPLACEMENT SELON L'AGE AVEC POSSIBILITE DE REPARATION MINIMALE LORS D'UNE PANNE . . . . .	150
7.1 Introduction . . . . .	151
7.2 Hypothèses et description du modèle de PRMC . . . . .	151
7.3 Politiques avec seuil de réparation . . . . .	156
7.4 Un cas où la politique optimale a une forme simple . . . . .	158
7.5 Un exemple numérique . . . . .	166
8. UNE POLITIQUE OPPORTUNISTE POUR UN SYSTEME A PLUSIEURS COMPOSANTE . . . . .	175
8.1 Systèmes à plusieurs composantes . . . . .	175
8.2 Formulation du problème . . . . .	179
8.3 Une réduction facilitant l'approximation . . . . .	183
8.4 Un exemple numérique . . . . .	184
CONCLUSION . . . . .	196
APPENDICE A . . . . .	199
APPENDICE B . . . . .	203
APPENDICE C . . . . .	204
APPENDICE D . . . . .	206
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	237

TABLE DES ILLUSTRATIONS

	<u>PAGES</u>
Figure 6.1 . . . . .	144
Figure 6.2 . . . . .	147
Figure 7.1 . . . . .	160
Figure 7.2 . . . . .	173
Figure 8.1 . . . . .	185
Figure 8.2 . . . . .	192
Tableau 8.1 . . . . .	190

## SOMMAIRE

Le but de cette thèse est d'obtenir des solutions complètes à des problèmes d'optimisation de politiques de remplacement préventif. Par "solution complète", on entend: a) poser le problème sans discrétiser a priori et sans restreindre l'espace des politiques admissibles, b) fournir des conditions d'existence de solutions optimales, c) obtenir un algorithme efficace permettant de résoudre le problème en approximant la stratégie optimale au lieu d'approximer le problème par discrétisation et d) obtenir des résultats numériques qui illustrent l'efficacité de l'algorithme.

Certains des problèmes qui nous intéressent ont déjà été posés dans la littérature, mais aucun d'entre eux n'a été résolu de façon satisfaisante. Nous avons voulu combler cette lacune. A cette fin, nous avons choisi d'utiliser des modèles de programmation dynamique stochastique. Puisqu'aucun des modèles existants n'était approprié pour résoudre nos problèmes, il a fallu en développer un nouveau et démontrer plusieurs résultats théoriques s'y rattachant. Il y a lieu de croire que ce nouveau modèle permettra de traiter, outre ceux considérés ici, de nombreux problèmes issus de domaines divers et ayant pour caractéristique commune de pouvoir être modélisés par des PDMED (processus de décision markoviens à étapes discrètes).

Nous introduisons, dans cette thèse, un modèle de PDMED avec actualisation, à espaces d'états et d'actions Boréliens, et pour lequel le facteur d'actualisation (permettant d'actualiser à "l'origine") associée à une étape du processus dépend de l'état du processus à cette étape. Ce modèle généralise les modèles de processus de renouvellement markoviens commandés avec actualisation déjà connus.

Deux versions du modèle, C et I, sont étudiés en détail. Le modèle C est contractant au sens habituel, tandis que le modèle I ne l'est pas. Ce dernier modèle peut admettre, par exemple, une stratégie sous laquelle les facteurs d'actualisation sont tous presque sûrement égaux à 1. En ce sens, il comporte une innovation majeure.

Plusieurs propriétés théoriques des modèles C et I, concernant la convergence de l'algorithme de la programmation dynamique et l'existence de politiques optimales ou  $\varepsilon$ -optimales, sont démontrées. On présente aussi quelques résultats ayant trait à la structure de la politique optimale et à la forme des fonctions de coût anticipé à considérer. On obtient des conditions suffisantes sous lesquelles on peut se limiter aux fonctions de coût anticipé monotones ainsi que des conditions suffisantes d'existence d'une politique optimale isotone ou antitone. Une généralisation de la règle de type "control-limit" est aussi donnée.

L'implantation d'un algorithme efficace pour obtenir des résultats numériques nécessite l'utilisation de méthodes de calcul scientifique



relativement élaborées. Nous proposons ici une version modifiée de la méthode des approximations successives où, à chaque itération, l'opérateur de la programmation dynamique n'est calculé que de façon approximative. La méthode d'approximation peut varier d'une itération à l'autre. Différentes méthodes d'approximation sont présentées, discutées, expérimentées et comparées. Quelques techniques permettant d'exercer un certain contrôle sur la qualité de la solution obtenue sont aussi proposées.

Trois problèmes de remplacement préventif sont posés et résolus en utilisant l'algorithme proposé. Deux de ces problèmes concernent une composante sujette à défaillance aléatoire suivant une loi de probabilité connue, l'autre concerne un système à plusieurs composantes identiques.

Pour chacun des trois problèmes, des exemples numériques sont résolus. Pour approximer la fonction de coût anticipé, à chaque itération, nous avons utilisé des fonctions splines, et nous sommes les premiers, à notre connaissance, à avoir expérimenté cette approche.



## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 Modèles de maintenance

On appelle problèmes de maintenance les problèmes d'optimisation des règles d'entretien, de réparation, d'inspection, de remplacement, etc.... d'un système.

La configuration du système étant fixée, on cherche à obtenir une stratégie d'entretien permettant, par exemple, de minimiser les coûts espérés d'opération ou de maximiser la disponibilité. Les décisions à prendre concernent, entre autres, le choix des méthodes et des dates d'inspections, les quantités optimales de pièces à garder en inventaire et les mesures d'entretien: quand faut-il réparer? Quand faut-il remplacer certaines pièces du système? Lesquelles? Quand faut-il remplacer le système au complet?

Plusieurs types de modèles de maintenance apparaissent dans la littérature scientifique. McCall (1965), Pierskalla et Voelker (1976) et Sherif et Smith (1981) ont passé en revue les principaux modèles connus. D'autre part, les volumes de Barlow et Proschan (1965, 1975) et de Gertsbakh (1977) constituent une excellente introduction à la théorie de la fiabilité et aux modèles de maintenance.

L'intérêt pour ce genre de modèles a pris naissance dans les domaines militaires et industriels. Cependant, les modèles de maintenance peuvent avoir de nombreuses applications pratiques dans ces domaines aussi variés que l'informatique (mise à jour des banques de données), la santé (entretien préventif du corps humain), l'écologie (maintien d'un équilibre dans les populations de plantes ou d'animaux), etc.

Certains modèles sont déterministes, mais les modèles stochastiques sont en général les plus réalistes. Il sont aussi, cependant, les plus difficiles à traiter.

Dans plusieurs cas, on spécifie à l'avance une classe restreinte de stratégies simples, puis on cherche la meilleure stratégie à l'intérieur de cette classe. Cette recherche consiste habituellement à optimiser les valeurs d'un petit nombre de paramètres.

Pour plusieurs modèles stochastiques plutôt simples, on peut montrer que la classe en question contient une stratégie optimale, et tout va bien. On pense, par exemple, à certains modèles de remplacement selon l'âge (voir Barlow et Proschan (1965), Fox (1966), Gertsbakh (1976)).

Mais pour plusieurs autres modèles, ce n'est pas le cas. Pensons, par exemple, aux modèles de type "remplacement périodique" ("Block replacement") (voir Gertsbakh (1977)). Ces modèles sont statiques,

dans le sens que certaines décisions sont prises d'avance, sans tenir compte de toutes les informations qui seront disponibles au moment d'agir. Ils fournissent, en général, des politiques sous-optimales. De plus, pour des systèmes complexes, il est souvent difficile de spécifier à l'avance une classe de stratégies simples et d'être certain que cette classe contienne au moins une stratégie permettant de s'approcher suffisamment de l'optimum (voir par exemple Vergin (1968) et Gertsbakh (1977, chap. 4)).

Pour obtenir une véritable stratégie optimale, il faut généralement utiliser un modèle dynamique. On obtient ce qu'on appelle un modèle de commande stochastique, en temps discret ou en temps continu. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser aux modèles de commande stochastique en temps continu, et plus particulièrement à ceux qui donnent lieu à des processus de décision à étapes discrètes.

## 1.2 Exemple d'un modèle de remplacement

Considérons l'exemple suivant, que nous reprendrons plus formellement au chapitre 7.

EXEMPLE 1.1 Il est souvent avantageux de remplacer une composante avant qu'elle ne tombe en panne, de façon à éviter les conséquences fâcheuses d'une panne durant le fonctionnement ou d'une détérioration excessive.

Pour une composante dont la distribution de durée de vie est connue et dont la seule mesure de détérioration est l'âge, une politique de remplacement "au plus tard à l'âge  $t_*$ " est souvent adoptée. Suivant une telle politique, la composante est remplacée lors de sa première panne si cette dernière survient avant l'âge  $t_*$  et à l'âge  $t_*$  dans le cas contraire (voir Barlow et Proschan (1965)).

A l'instar de Cléroux et al. (1979), supposons que lors d'une panne, on peut ou bien remplacer la composante, à un coût  $K > 0$ , ou bien effectuer une réparation minimale la ramenant en état de fonctionner, sans modifier son âge (c.-à-d. dans un état équivalent à celui où elle se trouvait juste avant la panne).

Une fois la composante réparée ou remplacée, on fixe la date du prochain remplacement planifié. Si aucune panne ne survient avant, la composante sera remplacée à cette date. Sinon, une nouvelle date sera fixée lors de la prochaine panne.

Le coût de la réparation minimale est une variable aléatoire dont la loi de probabilité (supposée connue) peut dépendre de l'âge de la composante et dont on peut observer la valeur avant de décider si on remplace ou si on répare. On peut considérer un coût de fonctionnement, un coût de panne et un taux de panne qui dépendent de l'âge de la composante (on suppose qu'ils sont connus) et supposer que tous les coûts sont actualisés au taux  $\rho > 0$ .

On cherche une stratégie, c.-à-d. une règle dynamique selon laquelle les décisions sont prises, qui permet de minimiser le coût espéré total actualisé sur horizon infini.

Pour résoudre ce problème, et plusieurs autres problèmes du même type, on utilisera un modèle de PRMC (Processus de Renouvellement Markovien Commandé).

Décrivons donc brièvement ce genre de modèle plus général et voyons comment les propriétés théoriques connues des modèles de PRMC ne suffisent pas pour nous permettre de trouver une solution optimale à l'exemple 1.1.

### 1.3 Processus de renouvellement markovien commandés

Un preneur de décisions observe un système à différents instants successifs  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ . A chacun de ces instants, l'état observé du système est un élément  $s$  de l'espace d'états  $S$ . A chaque instant  $\tau$  et état  $s$ , est associé un ensemble non vide  $A(\tau, s)$  qui constitue l'ensemble des actions admissibles dans l'état  $s$  à l'instant  $\tau$ . De plus, à chaque triplet instant-état-action  $(\tau, s, a)$  tel que  $\tau \geq 0$ ,  $s \in S$  et  $a \in A(\tau, s)$ , est associé un coût  $g(\tau, s, a)$  et une mesure de probabilité sur  $[0, \infty) \times S$  notée  $Q(\cdot | \tau, s, a)$ .

A l'instant  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , le système se trouve dans un état  $s_n$  appartenant à  $S$ . Après avoir observé  $(\tau_0, s_0, a_0, \dots, a_{n-1}, \tau_n, s_n)$ , le preneur de décisions choisit une action  $a_n$  dans  $A(\tau_n, s_n)$  et un coût  $g(\tau_n, s_n, a_n)$  est encouru à l'instant  $\tau_n$ . Un couple  $(\zeta, s)$  est ensuite généré aléatoirement selon la loi de probabilité  $Q(\cdot | \tau_n, s_n, a_n)$ .  $\zeta$  est l'intervalle de temps jusqu'au prochain instant d'observation, c.-à-d.  $\tau_{n+1} = \tau_n + \zeta$ , et  $s_{n+1} = s$  est le prochain état observé.

L'objectif du preneur de décisions est de minimiser une certaine fonction de coût, exprimée en général sous forme d'une espérance mathématique. Il peut s'agir du coût espéré moyen par unité de temps; du coût espéré total sur horizon fini; ou, si les coûts sont actualisés à un taux  $\rho > 0$ , du coût espéré total sur horizon infini, actualisé à l'instant  $\tau_0$ .

On doit évidemment s'assurer que cette espérance mathématique est bien définie. On voudra aussi savoir s'il existe une stratégie (règle dynamique permettant de choisir les actions) optimale, ou au moins  $\epsilon$ -optimale, et comment l'obtenir.

Si  $A(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  et  $Q(\cdot)$  ne dépendent pas de  $\tau$  (modèle stationnaire), si  $S$  et chaque  $A(s)$  sont des ensembles finis, et si  $Q$  satisfait certaines conditions de régularité (voir le modèle original de PRMC introduit par Jewell (1963)), toutes ces questions ne posent pas trop de difficulté.



Les conditions de régularité imposées à  $Q$ , sous leur forme la plus faible (voir Denardo (1967, ex. 4)), correspondent à exiger l'existence d'un nombre réel  $\alpha < 1$  tel que pour chaque état  $s$  et chaque action  $a$  dans  $A(s)$ , l'espérance mathématique du facteur d'actualisation associé à la prochaine étape,  $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\rho z} Q(dz, S|s,a)$ , soit inférieure ou égale à  $\alpha$ . Cela équivaut aussi à exiger l'existence d'un  $\delta > 0$  tel qu'à un instant d'observation donné, le temps espéré jusqu'au prochain instant d'observation soit toujours supérieur à  $\delta$ . Sous ces conditions, on peut se ramener au modèle de programmation dynamique contractant de Denardo (1967) ou à l'un des nombreux modèles contractants similaires.  $\alpha$  est appelé le facteur de contraction.

Sans ces conditions, la convergence de l'algorithme de la programmation dynamique n'est pas assurée.

Pour les modèles de maintenance qui nous intéressent, les conditions en question ne sont pas toujours satisfaites.

Fréquemment, l'espace d'états est non dénombrable. C'est le cas pour l'exemple 1.1, où  $S = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . En pratique, on peut discrétiser a priori, mais dans bien des cas, il est beaucoup plus naturel de résoudre le problème en conservant l'espace d'états original. Pour obtenir une solution numérique, on devra certainement utiliser une méthode d'approximation quelconque à un moment donné, mais ce ne sera pas nécessairement une discrétisation au sens habituel. De plus, on conserve une plus grande

flexibilité si la méthode d'approximation n'est pas fixée a priori. On pourra, par exemple, choisir différentes méthodes d'approximation à différentes étapes de la résolution du problème. Cet aspect sera rediscuté plus à fond au chapitre 3.

Souvent, par ailleurs, les conditions de régularité sur  $Q$  ne sont pas satisfaites et les propriétés des modèles contractants ne s'appliquent plus. C'est aussi le cas pour l'exemple 1.1. En effet, étant à l'instant  $\tau$ , on peut fixer la date du prochain remplacement planifié à  $\tau + d$  pour  $d > 0$  aussi petit que l'on veut, et le facteur d'actualisation espéré associé à la prochaine étape devient aussi près de 1 que l'on veut.

Une façon de contourner la difficulté pourrait consister à éliminer a priori une partie des actions. Par exemple, à l'instar de Fox (1967), on pourrait fixer une borne inférieure  $\delta > 0$  sur le délai jusqu'au prochain remplacement planifié. Si le taux de panne est borné, la condition de régularité sur  $Q$  serait alors satisfaite.

Pour le problème de remplacement selon l'âge traité par Fox (1967), cette approche était appropriée, mais elle ne l'est pas toujours en général. Pour l'exemple 1.1, rien ne justifie l'imposition d'une telle limite. Si la composante se trouve, par exemple, dans un état tel que le coût d'une réparation minimale est à peu près 0 et tel que son âge  $t$  est très près de la limite d'âge  $t_*$  (âge auquel il vaut mieux remplacer la composante même si elle n'est pas en panne), on choisira sans doute un délai  $d$  très petit. Et si  $t$  tend vers  $t_*$ , le  $d$  optimal peut tendre vers 0.

En outre, si, pour des considérations pratiques, on décide d'approximer le modèle en imposant arbitrairement une telle borne inférieure  $\delta$ , on devra certainement la choisir très petite. La borne  $\alpha$  sur le facteur de contraction espéré sera alors très près de 1, ce qui est fort peu souhaitable. En effet, l'algorithme de la programmation dynamique converge linéairement avec un rapport de convergence égal au facteur de contraction et la convergence devient donc très lente si ce facteur est très près de 1. De plus, à une étape de l'algorithme, on voudra calculer des bornes sur l'erreur entre la solution actuelle et la solution optimale. De telles bornes (Porteus (1975)) contiennent en général le facteur  $\alpha/(1-\alpha)$ , qui tend vers l'infini lorsque  $\alpha$  s'approche de 1.

Tout compte fait, un modèle de PRMC sans les conditions de régularité habituellement imposées à  $Q$  serait bien utile.

#### 1.4 Processus de décision markovien à étapes discrètes

Si on redéfinit "l'état" comme étant le couple  $x = (\tau, s)$ , un modèle de PRMC peut se ramener à un modèle de type PDMTD (Processus de Décision Markovien en Temps Discret). Le nouvel espace "d'états" est  $X = \mathbb{R}_+ \times S$  et le "temps" dans le PDMTD ne correspond pas au temps réel, mais seulement à un numéro d'étape. De plus, et c'est ce qui génère les plus sérieuses complications, le facteur d'actualisation entre deux instants d'observation successifs n'est pas constant, mais dépend du temps réel écoulé entre les deux étapes.

Le modèle général que nous allons présenter au chapitre 2, baptisé modèle de PDMED (Processus de Décision Markovien à Etapes Discrètes), est un modèle de type PDMTD avec actualisation pour lequel le numéro d'étape ne correspond pas nécessairement au temps réel, et pour lequel le facteur d'actualisation (permettant d'actualiser à "l'origine") associé à une étape du processus dépend de l'état du système à cette étape.

Ce modèle est très général. Les espaces d'états et d'actions sont Boréliens et les politiques admises sont des fonctions universellement mesurables. Les problèmes d'existence et de mesurabilité sont résolus en utilisant une approche similaire à celle proposée par Bertsekas et Shreve (1978, chap. 9) pour des PDMTD avec facteur d'actualisation constant.

Deux versions du modèle, C et I, sont étudiées en détail. Le modèle C est contractant au sens habituel et généralise les modèles de PDMTD et de PRMC avec actualisation déjà connus.

Par contre, le modèle I n'est pas contractant au sens habituel. Il peut admettre, par exemple, une stratégie sous laquelle les facteurs d'actualisation sont tous presque sûrement égaux à 1. En ce sens, il comporte une innovation majeure.

Plusieurs problèmes de maintenance, modélisés par des PRMC sans les conditions de régularité habituellement imposées à Q, pourront être

résolus en utilisant le modèle I. Le problème de l'exemple 1.1 est l'un de ceux-là.

Au chapitre 3, on propose une version modifiée de la méthode des approximations successives de la programmation dynamique. Habituellement, chaque itération de la méthode des approximations successives consiste à calculer  $T(V)$  où  $V$  est une fonction de "coût anticipé" et  $T$  est l'opérateur de la programmation dynamique. Dans l'algorithme du chapitre 3, la fonction  $T(V)$  est approximée par une fonction  $V_1$ . La méthode d'approximation peut changer d'une itération à l'autre.

A chaque itération, on peut calculer des bornes sur la qualité de la solution courante, en fonction de bornes sur l'erreur d'approximation de  $T(V)$  par  $V_1$  et de la différence entre  $V$  et  $V_1$ . Des conditions suffisantes de non optimalité d'une action lorsqu'on est dans un état donné sont aussi fournies.

De plus, différentes méthodes pour approximer  $T(V)$  (discrétisation; interpolation linéaire, polynômiale ou par des fonctions splines; approximation de moindres carrés, etc.) sont présentées et discutées.

Au chapitre 4, on propose un modèle de PRMC avec actualisation, qui généralise les modèles de PRMC avec actualisation déjà connus, et qui est un cas particulier du modèle de PDMED présenté au chapitre 2.

Au chapitre 5, on présente quelques résultats concernant la structure de la politique optimale et de la forme des fonctions de coût anticipé à considérer. On obtient des conditions suffisantes sous lesquelles on peut se limiter à ne considérer que les fonctions de coût anticipé monotones. On obtient aussi des conditions suffisantes d'existence d'une politique optimale isotone {antitone} ainsi que des conditions suffisantes pour que l'algorithme de la programmation dynamique fournisse une suite de politiques non-aléatoires isotones {antitones} convergeant vers une politique optimale non-aléatoire isotone {antitone}. Une telle caractérisation peut faciliter l'obtention d'une politique optimale.

On introduit ensuite la notion de "règle dichotomique à seuil", qui généralise la règle de type "control-limit" au cas où l'espace d'état n'est que partiellement ordonné, et on donne des conditions suffisantes pour qu'il existe une politique optimale qui soit une règle dichotomique à seuil.

Tous les développements sont faits dans le cadre du modèle de PRMC présenté au chapitre 4.

Aux chapitres 6, 7 et 8, on utilise le modèle de PRMC et ses propriétés pour étudier trois problèmes de remplacement. Dans chaque cas, des illustrations numériques sont données et des solutions explicites sont obtenues par le biais de l'algorithme du chapitre 3.

Le problème considéré au chapitre 6 concerne le remplacement préventif d'une composante qui évolue sur un intervalle de temps fini. L'exemple 1.1 est repris et traité en détail au chapitre 7. Finalement, au chapitre 8, on s'intéresse à un système à plusieurs composantes identiques, stochastiquement indépendantes, et dont la distribution de durée de vie est connue. La structure des coûts est telle que des économies d'échelle sont possibles lors du remplacement des composantes. La politique optimale obtenue est du type "opportuniste".





## CHAPITRE 2

### PROCESSUS DE DECISION MARKOVIEN A ETAPES DISCRETES:

#### UN MODELE AVEC FACTEUR D'ACTUALISATION VARIABLE

##### 2.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre un modèle de PDMED (Processus de Décision Markovien à Etapes Discrètes). Shreve et Bertsekas (1979) ont proposé un cadre mathématique pour l'étude d'un modèle de PDMED avec espaces d'états et d'actions boréliens et facteur d'actualisation constant. Ils ont montré qu'en admettant les politiques universellement mesurables, on pouvait obtenir tous les résultats de base de la programmation dynamique sous leur forme la plus forte.

Le modèle étudié ici est similaire au leur, sauf qu'ici, le facteur d'actualisation (permettant d'actualiser à "l'origine") dépend de l'état du système. Cette modification permet de traiter les modèles de PRMC (Processus de Renouvellement Markovien Commandé), auxquels nous allons nous intéresser plus spécifiquement au chapitre 4. Par contre, elle donne lieu à de nouvelles difficultés et l'algorithme de la programmation dynamique ne demeure valide que sous certaines hypothèses supplémentaires.

Un PDMED est défini sur un espace d'états  $X$  et un espace d'actions  $A$ . Pour chaque état  $x \in X$ , l'ensemble  $A(x)$  des actions (décisions) que

l'on peut choisir lorsqu'on (le système) se trouve dans l'état  $x$  est un sous-ensemble non vide de  $A$ . Etant dans un état  $x \in X$  et ayant choisi une action  $a \in A(x)$ , on doit payer une somme  $g(x,a)$  pour l'étape présente, tandis que le prochain état  $x'$ , c.a.d. celui dans lequel on va se retrouver à la prochaine étape, est généré aléatoirement selon une mesure de probabilité  $Q(\cdot|x,a)$ . Une action  $a' \in A(x')$  sera alors choisie, un coût  $g(x',a')$  sera encouru, et ainsi de suite. Les actions sont choisies séquentiellement selon une règle appelée "stratégie", le choix d'une action à une étape donnée pouvant dépendre de l'état observé à cette étape, de même que des états observés et des actions choisies lors des étapes précédentes. Le problème consiste à obtenir une stratégie qui minimise le coût total espéré pour un nombre infini d'étapes, actualisé au début de l'étape initiale.

Les PDM (Processus de Décision Markovien) furent popularisés surtout par Bellman, dans ses nombreux travaux sur la programmation dynamique (voir Bellman (1957 a et b)). Howard (1960), puis Blackwell (1965 a et b) les ont placé dans un cadre plus formel.

Pour la plupart des modèles de PDME avec actualisation (voir par exemple Bertsekas et Shreve (1978, chap. 9)), le coefficient d'actualisation d'une étape à l'autre est une constante  $\alpha$ . Un coût encouru à l'étape  $n$  est actualisé à l'origine (étape 0) à l'aide du facteur  $\alpha^n$ . Schäl (1972) (1975) a proposé un modèle où le facteur d'actualisation de l'étape courante à l'étape précédente dépend de l'état courant du système, de l'état observé à l'étape précédente et de l'action choisie

à l'étape précédente. Un coût encouru à l'étape courante est actualisé à l'instant initial en le multipliant par un facteur qui dépend donc de toute l'histoire du processus jusqu'à l'instant courant.

Nous proposons ici un modèle dans lequel le coût encouru à l'étape courante est actualisé à "l'origine" (point abstrait qui ne correspond pas nécessairement à l'étape 0) en le multipliant par un facteur  $\beta(x)$  ne dépendant que de l'état courant  $x$ . Cette propriété "markovienne" du facteur d'actualisation est essentielle à la validité des preuves que nous allons présenter. Le modèle proposé n'est pas un cas particulier de celui de Schäl. D'abord, ce dernier a fait plusieurs hypothèses de continuité que nous ne faisons pas ici. Nous faisons par ailleurs d'autres hypothèses qui nous permettent d'utiliser les propriétés des applications contractantes et d'obtenir des résultats allant bien au delà de ce qu'à obtenu Schäl (tous ceux du chapitre 3, par exemple).

Afin de s'assurer que l'objectif du problème est bien défini, lorsque l'espace d'états ou l'espace d'actions est non dénombrable, on doit régler certaines questions d'existence et de mesurabilité (voir Bertsekas et Shreve (1978), section 1.2). Plusieurs approches ont déjà été suggérées en ce sens:

Denardo (1967) propose d'utiliser la notion d'intégrale extérieure. Toutefois, les propriétés théoriques de cette intégrale donnent lieu à certaines pathologies et de nouvelles difficultés surgissent lors du traitement d'un modèle à état partiellement observé (Bertsekas et Shreve (1978), Appendice A et Chap. 10).

Striebel (1975) propose par ailleurs d'utiliser la notion d'infimum  $p$ -essentiel. Mais cette approche donne lieu à de sérieuses complications (Bertsekas et Shreve (1978), p. 10).

Dans le modèle Borélien introduit par Blackwell (1965 a et b),  $X$  et  $A$  sont des espaces Boréliens, la fonction de coût  $g$  et le noyau de transition  $Q$  sont Borel-mesurables, et seules les stratégies Borel-mesurables sont admissibles. Pour chaque  $\varepsilon > 0$  et chaque mesure de probabilité  $p$  sur  $X$ , on peut montrer l'existence d'une stratégie donnant lieu à un coût anticipé ne différant du coût anticipé optimal que d'au plus  $\varepsilon$  pour  $p$ - presque tout état initial. Une telle stratégie, appelée  $p$ - $\varepsilon$ -optimale, est moins attrayante qu'une stratégie  $\varepsilon$ -optimale pour tout état initial, mais rien ne nous assure de l'existence d'une stratégie de ce dernier type, ni même de l'existence d'une stratégie qui soit  $p$ - $\varepsilon$ -optimale pour chaque  $p$ . La mesure  $p$  étant généralement inconnue, il devient théoriquement plus difficile de justifier l'utilisation de l'algorithme de la programmation dynamique pour construire une stratégie  $\varepsilon$ -optimale.

Blackwell et al (1974) ont par la suite démontré qu'en élargissant l'espace des stratégies afin d'admettre celles qui sont analytiquement mesurables, on peut, dans le cas où les coûts sont tous non positifs, obtenir une stratégie  $\varepsilon$ -optimale pour tout état initial.

Shreve et Bertsekas (1978, 1979) ont fait un pas de plus en élargissant davantage la classe des stratégies. Au lieu d'exiger d'une

stratégie qu'elle soit Borel-mesurable ou analytiquement mesurable, on exige seulement qu'elle soit universellement mesurable. Ces auteurs ont démontré que cette classe de stratégies est suffisamment riche pour que l'existence d'une stratégie partout  $\varepsilon$ -optimale [optimale si l'infimum est atteint pour chaque état et à chaque étape de l'algorithme de la programmation dynamique] soit assurée dans chacun des trois cas suivants:

- a) les coûts sont tous  $\geq 0$  (Modèle P);
- b) les coûts sont tous  $\leq 0$  (Modèle N);
- c) la fonction de coût est bornée et il existe un facteur d'actualisation constant inférieur à 1 (Modèle D).

Afin d'assurer l'existence de stratégies optimales ou  $\varepsilon$ -optimales qui soient Borel-mesurables, plusieurs auteurs dont Maitra (1968), Hinderer (1970), Furukawa (1972), Schäl (1972, 1975, a et b), Freedman (1974), Himmelberg et al. (1974) et Haneveld (1980) ont par ailleurs imposé différentes hypothèses de compacité et de semi-continuité. Ces hypothèses sont cependant plus restrictives que celles de Shreve et Bertsekas.

Les modèles de PD MED présentés ici sont placés dans un cadre similaire à celui proposé par ces derniers auteurs.

Au paragraphe 2.2, on rappelle quelques définitions et on convient de la notation.

Le modèle de PDMED est défini au paragraphe 2.3. Dans le cas où les coûts sont tous positifs ou tous négatifs, on peut facilement se ramener au modèle de Bertsekas et Shreve (1978, chap. 9) et obtenir directement certains résultats (propositions 2.1-2.3).

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à deux versions du modèle de PDMED, baptisées C et I. Le modèle C est un modèle contractant au sens habituel (Denardo (1967), Van Hee et Wessels (1978)), c.-à.-d. que l'opérateur de la programmation dynamique associé à chaque politique est contractant, pour un facteur de contraction uniforme sur l'espace des politiques admissibles. Son étude ne pose pas de difficultés sérieuses. Ses propriétés principales s'obtiennent en adaptant judicieusement les techniques déjà utilisées pour des modèles similaires.

Le modèle I ne satisfait pas, pour sa part, une telle hypothèse de contraction. Il peut admettre, par exemple, une stratégie sous laquelle les facteurs d'actualisation sont tous presque sûrement égaux à 1. En ce sens, il comporte une innovation majeure et son étude sera beaucoup plus ardue que celle du modèle C.

L'existence d'une politique  $\varepsilon$ -optimale [optimale, sous certaines conditions], la convergence de l'algorithme de la programmation dynamique (méthode des approximations successives) et quelques autres propriétés des modèles C et I sont démontrées au paragraphe 2.9.

## 2.2 Définitions et notations

### 2.2.1 Introduction

Le lecteur trouvera dans ce paragraphe quelques conventions de notation, de même que plusieurs définitions ayant trait aux espaces Boréliens et aux mesures de probabilité qu'on peut leur associer. Un certain nombre de résultats connexes sont énoncés en appendice A. Pour plus de détails, on peut se référer au chapitre 7 de Bertsekas et Shreve (1978), qui traite ce sujet de façon beaucoup plus élaborée. Nous supposons le lecteur familier avec les notions classiques de topologie, théorie de la mesure et théorie des probabilités.

### 2.2.2 Notation

Le symbole  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels  $\{1,2,3,\dots\}$  et  $\mathbb{N}_0$  désigne le même ensemble auquel on a ajouté 0.  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des réels muni de la topologie usuelle et  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  muni de la plus faible topologie contenant les intervalles  $[-\infty, a)$ ,  $(b, \infty]$  et  $(a, b)$   $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_+^*$  désignent les parties non négatives de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^*$  respectivement.

Si  $S$  est un ensemble quelconque,  $\mathcal{P}(S)$  désigne l'ensemble des parties de  $S$ . Une relation d'ordre partiel sur un ensemble quelconque est

toujours notée  $\leq$ . Si  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^*$ , les fonctions  $f^+$  et  $f^-$  sont définies par  $f^+(s) = \max(0, f(s))$  et  $f^-(s) = \max(0, -f(s)) \forall s \in S$ . Si  $g: S \rightarrow \mathbb{R}^*$  [ $c \in \mathbb{R}^*$ ], on dit que  $f \geq g$  [ $f \geq c$ ] si  $f(s) \geq g(s)$  [ $f(s) \geq c$ ]  $\forall s \in S$ . Si  $A$  est un autre ensemble et  $D \subseteq S \times A$ , alors  $\{s \in S \mid \exists a \in A \text{ } \forall (s, a) \in D\}$  est noté  $\text{proj}_S(D)$  et  $\forall a \in A$ ,  $D_a$  désigne la tranche  $\{s \in S \mid (s, a) \in D\}$ . Si  $S$  est partiellement ordonné, on dit que  $f$  est croissante [décroissante] selon  $s$  sur  $S$  si  $s_1, s_2 \in S$  et  $s_1 \leq s_2$  implique que  $f(s_1) \leq [\geq] f(s_2)$ .

Si  $E$  est un énoncé quelconque,  $\mathbb{1}_E$  est alors une fonction indicatrice prenant la valeur 1 si l'énoncé  $E$  est vrai et 0 sinon.

On conviendra par ailleurs que  $\prod_{i=1}^0 (\dots) = 1$  et  $\sum_{i=1}^0 (\dots) = 0$ .

Le symbole  $\equiv$  désigne une égalité par définition.

### 2.2.3 Espaces Boréliens

Si  $X$  est un espace topologique,  $\mathcal{B}(X)$  désigne la tribu de Borel sur  $X$ , i.e. la plus petite tribu contenant tous les ouverts de  $X$ . S'il existe un espace métrique complet séparable  $Y$  et un élément de  $\mathcal{B}(Y)$  homéomorphe à  $X$ , on dit que  $X$  est un espace Borélien. Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces Boréliens et si  $Y$  est non dénombrable, les projections sur  $X$  des éléments de  $\mathcal{B}(X \times Y)$  sont appelés sous-ensembles analytiques de  $X$ .  $\mathcal{A}(X)$  désigne la plus petite tribu contenant les sous-ensembles analytiques de  $X$  et les



éléments de  $A(X)$  sont dits analytiquement mesurables. Si  $X$  est un espace Borélien, l'espace de toutes les mesures de probabilité sur  $(X, \mathcal{B}(X))$ , muni de la topologie faible, est aussi un espace Borélien (Bertsekas et Shreve (1978, section 7.4.2)) et on le dénote par  $\mathbb{P}(X)$ .  $\mathcal{U}(X)$  désigne l'ensemble  $\{E \subseteq X \mid \inf\{p(B) \mid E \subseteq B \in \mathcal{B}(X)\} + \inf\{p(B) \mid X-E \subseteq B \in \mathcal{B}(X)\} = 1 \ \forall p \in \mathbb{P}(X)\}$ . Les éléments de  $\mathcal{U}(X)$  forment une tribu et sont dits universellement mesurables. On a  $\mathcal{B}(X) \subseteq A(X) \subseteq \mathcal{U}(X)$ .

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces Boréliens,  $D \subseteq X$  et  $f: D \rightarrow Y$ . Si  $D \in \mathcal{B}(X) [A(X), \mathcal{U}(X)]$  et  $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X) [A(X), \mathcal{U}(X)] \ \forall B \in \mathcal{B}(Y)$ ,  $f$  est dite B-mesurable [A-mesurable, U-mesurable]. Si  $p \in \mathbb{P}(X)$  et  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  est U-mesurable, les intégrales stochastiques  $\int f^+ dp$  et  $\int f^- dp$  sont alors bien définies sur l'espace de mesure  $(X, \mathcal{U}(X), p)$ . Si l'une ou l'autre de ces intégrales est finie, on pose  $\int f dp \equiv \int f^+ dp - \int f^- dp$ .

Si  $X$  est un espace Borélien,  $D$  un sous-ensemble analytique de  $X$  et  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^*$ , on dit que  $f$  est semi-analytique inférieurement (s.a.i.) si  $\{x \in D \mid f(x) < c\}$  est analytique  $\forall c \in \mathbb{R}$ . Si  $X$  est un espace métrisable,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  et  $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$  est fermé  $\forall c \in \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.).

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques séparables. Un noyau stochastique  $Q$  sur  $Y|X$  est une famille de mesures de probabilité  $\{Q(\cdot|x) \in \mathbb{P}(Y), x \in X\}$ . Si  $\{x \in X \mid Q(\cdot|x) \in \underline{P}\} \in \mathcal{B}(X) [A(X), \mathcal{U}(X)] \ \forall \underline{P} \in \mathcal{B}(\mathbb{P}(Y))$ , on dit que  $Q$  est B-mesurable [A-mesurable, U-mesurable].  $Q$  est dit continu si  $f: X \rightarrow \mathbb{P}(Y)$  définie par  $f(x) = Q(\cdot|x)$  est continue.

### 2.3 Définition d'un PDMED

Un modèle de PDMED est défini à l'aide d'une structure  $(X, A, \Gamma, Q, g, \beta)$ .  $X$  et  $A$  sont deux espaces Boréliens appelés respectivement l'espace d'états et l'espace d'actions.  $\Gamma$  est un sous ensemble analytique de  $X \times A$  tel que  $\forall x \in X$ , la coupe  $A(x) \equiv \Gamma_x \equiv \{a \in A \mid (x, a) \in \Gamma\}$  est non vide.  $Q$  est un noyau stochastique Borel-mesurable sur  $X \mid X \times A$ ,  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction semi-analytique inférieurement et  $\beta: X \rightarrow (0, 1]$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

Cette structure correspond à un système qui évolue par étapes, séquentiellement, de façon suivante. Un preneur de décisions observe le système à différentes étapes, notées  $0, 1, 2, \dots$ , jusqu'à l'infini, et à chacune de ces étapes, il choisit une action. A l'étape 0, le système se trouve dans l'état  $x_0 \in X$  et une action  $a_0 \in A(x_0)$  est choisie. De même, pour chaque  $n \in \mathbb{N}_0$ , le système se trouve dans un certain état  $x_n \in X$  à la  $n^{\text{e}}$  étape. Après avoir observé  $x_n$  et en tenant possiblement compte de tout ce qui s'est passé lors des étapes précédentes (i.e. de  $x_0, a_0, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}$ ), le preneur de décisions choisit une action  $a_n \in A(x_n)$ . Un coût  $g(x_n, a_n)$  est encouru à l'étape  $n$  et un état  $x_{n+1} \in X$  est ensuite généré aléatoirement selon la mesure de probabilité  $Q(\cdot \mid x_n, a_n)$ . Le facteur d'actualisation associé à l'étape  $n$  est  $\beta(x_n)$ . Plus précisément, le coût encouru à l'étape  $n$  actualisé à "l'origine" est  $c_n \equiv \beta(x_n) g(x_n, a_n)$ . Notons que "l'origine" ne correspond pas nécessairement à l'étape 0 et ne correspond, pour l'instant, à rien de concret.

Le preneur de décisions voudra choisir une "stratégie" de façon à minimiser le coût espéré total, actualisé à l'origine. Le mot "stratégie", de même que cette espérance mathématique qui nous sert de fonction objectif, seront définis de façon plus précise et plus formelle dans les lignes qui suivent. Il faudra, entre autres choses, que cette espérance existe.

$g$  s'appelle la fonction de coût,  $Q$  le noyau de transition et  $\beta$  la fonction d'actualisation. Cette structure est stationnaire puisque  $g$ ,  $Q$  et  $\beta$  ne dépendent pas du numéro d'étape, et markovienne puisque les fonctions  $g$ ,  $Q$  et  $\beta$  associées à l'étape  $n$  ne dépendent que de  $x_n$  et  $a_n$ , et pas, pour  $x_n$  et  $a_n$  fixés, de ce qui s'est passé lors des étapes précédentes.

Soient  $H^1 \equiv \prod_{i=1}^{\infty} (X \times A)$  et  $H \equiv \{(x_0, a_0, \dots, x_i, a_i, \dots) \in H^1 \mid (x_i, a_i) \in \Gamma \forall i\}$ . De même, pour chaque  $n \in \mathbb{N}_0$ , soient  $H_n^1 \equiv (X \times A)^n \times X$  et  $H_n \equiv \{h_n = (x_0, a_0, \dots, a_{n-1}, x_n) \in H_n^1 \mid (x_i, a_i) \in \Gamma \text{ pour } i=0, \dots, n-1\}$ . A chaque  $h \in H^1$  et  $n \in \mathbb{N}_0$ , correspond un  $h_n \in H_n^1$  qui est la projection de  $h$  sur  $H_n^1$ .

Pour chaque  $h \in H$ , posons

$$c_n \equiv \beta(x_n) g(x_n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.1)$$

$c_n$  représente le coût encouru à l'étape  $n$ , actualisé à l'origine. Puisque  $\beta$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable et que  $g$  est semi-analytique inférieurement, chaque  $c_n$  est  $A(H_n)$ -mesurable (voir A.1 de l'appendice A).

Une politique  $\mu$  est un noyau stochastique  $\mathcal{U}$ -mesurable sur  $A|X$  tel que  $\mu(A(x)|x) = 1 \quad \forall x \in X$ . Une politique  $\mu$  est dite non aléatoire (NA) si chaque mesure  $\mu(\cdot|x)$  est dégénérée en un seul point de  $A(x)$ . Dans ce dernier cas, on peut considérer  $\mu$  comme une application  $\mathcal{U}$ -mesurable  $\mu: X \rightarrow A$  telle que  $\mu(x) \in A(x) \quad \forall x \in X$ . Soient  $U$  et  $U_{NA}$  l'ensemble des politiques et l'ensemble des politiques non aléatoires respectivement.

Une stratégie est une suite  $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots)$  telle que chaque  $\mu_n$  est un noyau stochastique  $\mathcal{U}$ -mesurable sur  $A|H_n^1$  tel que  $\mu_n(A(x_n)|h_n) = 1 \quad \forall h_n \in H_n^1$ . Si  $\mu_n(\cdot|h_n) \equiv \mu_n(\cdot|x_n) \quad \forall h_n \in H_n^1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  (i.e. si chaque  $\mu_n$  est une politique), on dit que  $\pi$  est une stratégie markovienne. Soient  $\Pi$  et  $\Pi_m$  l'ensemble des stratégies et l'ensemble des stratégies markoviennes respectivement. Une stratégie markovienne est dite stationnaire par rapport aux étapes (SE) si  $\mu_n$  est indépendant de  $n$  (c.-à-d.  $\mu_n \equiv \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ). Une stratégie SE correspond en fait à une politique. Une stratégie  $\pi \in \Pi$  est dite non-aléatoire (NA) si chaque mesure  $\mu_n(\cdot|h_n)$  est dégénérée. A chaque politique  $\pi \in \Pi$  et état initial  $x \in X$ , on peut associer un processus stochastique en temps discret dont l'espace des réalisations est  $H$ , de la façon suivante:

Par A.3 de l'appendice A, il existe une mesure de probabilité unique  $P_{\pi, x}$  sur  $(H^1, \mathcal{B}(H^1))$  satisfaisant:

$$P_{\pi, X}(x_0=x) = 1 \quad (2.2)$$

$$P_{\pi, X}(a_i \in A | h_i) = \mu_i(A | h_i) \quad (2.3)$$

$$P_{\pi, X}(x_{i+1} \in X | h_i, a_i) = Q(X | x_i, a_i) \quad \forall a_i \in A \quad (2.4)$$

pour chaque  $i \in \mathbb{N}_0$ ,  $h_i \in H_i^1$ ,  $A \in \mathcal{B}(A)$  et  $X \in \mathcal{B}(X)$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe aussi une mesure de probabilité unique  $P_{\pi, X}^n$  sur  $(H_n^1, \mathcal{B}(H_n^1))$  satisfaisant (2.2)-(2.4) pour  $i=0, \dots, n-1$  et c'est la distribution marginale de  $P_{\pi, X}$ . De plus, par (2.3), il est clair que  $P_{\pi, X}$  est concentrée sur  $H$ . On peut donc considérer  $P_{\pi, X}$  et  $P_{\pi, X}^n$  comme des mesures de probabilité sur  $(H, \mathcal{B}(H))$  et  $(H_n, \mathcal{B}(H_n))$  respectivement.  $\{(x_n, a_n), n \in \mathbb{N}_0\}$  est bien un processus stochastique défini sur l'espace de probabilité  $(H, \mathcal{B}(H), P_{\pi, X})$ .

DEFINITION. La structure  $(X, A, \Gamma, Q, g, \beta)$  définit un modèle de PDMED si la condition suivante est satisfaite:

CONDITION  $\Delta$ :  $\forall \pi \in \Pi$  et  $\forall x \in X$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$  est bien définie  $P_{\pi, X}$  - presque

partout et  $\int_H (\sum_{i=0}^{\infty} c_i) dP_{\pi, X}$  est bien définie.

Ici, une quantité est dite "bien définie" si elle prend une valeur dans  $\mathbb{R}^*$ . Différentes versions du modèle de PDMED seront introduites plus loin. Pour chacune de ces versions, on devra s'assurer que la condition  $\Delta$  est bien satisfaite. Si  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$  est bien définie  $P_{\pi, X}$  - presque - partout, alors (Rudin, 1974, p. 29, parag. 1.37)  $\int_H (\sum_{i=0}^{\infty} c_i)^+ dP_{\pi, X}$  et  $\int_H (\sum_{i=0}^{\infty} c_i)^- dP_{\pi, X}$  sont bien définies. De plus, si l'une de ces

deux intégrales est finie, alors  $\int_H (\sum_{i=0}^{\infty} c_i) dP_{\pi, X} \equiv \int_H (\sum_{i=0}^{\infty} c_i)^+ dP_{\pi, X} +$

$$\int_H (\sum_{i=0}^{\infty} c_i)^- dP_{\pi, X}.$$

La fonction  $\beta$  constitue la différence majeure entre le modèle présenté ici et celui de Bertsekas et Shreve (1978, chap. 9). Chez ces derniers auteurs, un coût encouru à l'étape  $n$  est actualisé à l'étape 0 à l'aide du facteur  $\alpha^n$ , où  $\alpha$  est une constante. Leur modèle peut se ramener au modèle de PDMED défini ici. Il suffit, comme l'illustre l'exemple 2.1, d'élargir l'espace d'états de façon à inclure le numéro d'étape dans l'état.

#### EXEMPLE 2.1: Processus de Décision Markovien en Temps Discret.

Soient  $S$  et  $A$  deux espaces Boréliens appelés respectivement espace d'état et espace d'actions,  $\Gamma'$  un sous-ensemble analytique de  $S \times A$  tel que  $A(x) \equiv \Gamma'_S$  est non vide  $\forall s \in S$ ,  $Q'$  un noyau stochastique Borel-mesurable sur  $S | S \times A$ ,  $g' : \Gamma' \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction s.a.i. bornée et  $\alpha \in (0, 1)$ . La structure  $(S, A, \Gamma', Q', g', \alpha)$  correspond à un système qui évolue séquentiellement de la même façon que pour un modèle de PDMED, sauf pour l'actualisation. Ici, un coût encouru à l'étape  $n$  est actualisé à l'étape  $n-1$  à l'aide du facteur  $\alpha$ . Pour nous ramener à un modèle de PDMED, posons  $X = \mathbb{N}_0 \times S$ ,  $\Gamma = \mathbb{N}_0 \times \Gamma'$ ,  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta : X \rightarrow (0, 1]$  définies par  $g(n, s, a) \equiv g'(s, a)$  et  $\beta(n, s) = \alpha^n$  et soit  $Q$  le noyau stochastique Borel-mesurable sur  $X | X \times A$  défini par  $Q(\underline{X} | n, x, a) \equiv Q'(X_{-n+1} | x, a) \forall \underline{X} \in \mathcal{B}(X)$ , où  $\underline{X}_{-n+1} \in \mathcal{B}(S)$  désigne la tranche  $\{s \in S | (n+1, s) \in \underline{X}\}$ . Puisque  $g'$  est

bornée, le théorème de convergence dominée nous assure que la condition  $\Delta$  est satisfaite  $\square$

Revenant à notre modèle de PD MED général, pour chaque  $x$  dans  $X$ , soient

$$V_{\pi}(x) \equiv \frac{1}{\beta(x)} \int_H \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i \right) dP_{\pi, x} \quad \forall \pi \in \Pi \quad (2.5)$$

$$V_{*}(x) \equiv \inf_{\pi \in \Pi} V_{\pi}(x). \quad (2.6)$$

$V_{\pi}(x)$  et  $V_{*}(x)$  représentent respectivement le coût espéré associé à la stratégie  $\pi$  et le coût espéré optimal, sur horizon infini, actualisé à l'étape 0. Des fonctions  $V_{\pi} : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  et  $V_{*} : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  sont ainsi définies. On dit que  $\pi$  est optimale [ $\varepsilon$ -optimale] en  $x$  si  $V_{\pi}(x) = V_{*}(x)$  [ $V_{\pi}(x) \leq V_{*}(x) + \varepsilon$ ]. On omet "en  $x$ " lorsque  $\pi$  possède la propriété  $\forall x \in X$ . Une politique  $\mu \in U$  est dite optimale [ $\varepsilon$ -optimale, optimale à  $x$ ,  $\varepsilon$ -optimale à  $x$ ] si la stratégie SE  $\pi = (\mu, \mu, \dots)$  l'est. Si  $\mu \in U$  et  $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ ,  $V_{\pi}$  est aussi désignée par  $V_{\mu}$  et si  $x \in X$ ,  $P_{\pi, x}$  est aussi notée  $P_{\mu, x}$ .

Rappelons qu'un modèle pour lequel le coût encouru à l'étape  $n$  est fonction non seulement de  $(x_n, a_n)$ , mais aussi de  $x_{n+1}$ , peut se ramener au modèle précédent. Il suffit, comme il est d'usage courant, de remplacer la fonction de coût par son espérance mathématique conditionnelle à  $(x_n, a_n)$ . Par exemple, si  $c : \Gamma \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de coût et  $c(x_n, a_n, x_{n+1})$  désigne le coût encouru à l'étape  $n$ , on peut remplacer  $c$  par  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(x, a) = \int_X c(x, a, x') Q(dx' | x, a). \quad (2.7)$$

Puisque nous utilisons l'espérance mathématique comme critère d'optimisation, ce remplacement ne modifie en rien la fonction  $V_\pi$  de coût anticipé associé à chaque politique  $\pi$ , ni la fonction  $V_*$ . Bref, il n'y a aucune perte de généralité à ne considérer qu'une fonction  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  comme nous l'avons fait initialement.

#### 2.4 Les opérateurs de la programmation dynamique

Soit  $\mathcal{B}$  l'espace des fonctions  $V : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  et  $\forall V \in \mathcal{B}$ , soit  $\|V\| \equiv \sup_{x \in X} |V(x)|$ .  $\mathcal{B}_0 \equiv \{V \in \mathcal{B} \mid \|V\| < \infty\}$ , muni de la norme  $\|\cdot\|$ , est un espace de Banach. Posons  $\mathcal{B}_U \equiv \{V \in \mathcal{B} \mid V \text{ est } U\text{-mesurable}\}$  et  $\mathcal{B}_\Gamma \equiv \{V \in \mathcal{B}_U \mid V \text{ est s.a.i.}\}$ .

Pour chaque  $V \in \mathcal{B}_U$  et  $(x, a) \in \Gamma$ , posons

$$H(V)(x, a) \equiv g(x, a) + \frac{1}{\beta(x)} \int_X \beta(x') V(x') Q(dx' \mid x, a). \quad (2.8)$$

Pour chaque  $\mu \in U$ , on définit l'opérateur  $T_\mu : \mathcal{B}_U \rightarrow \mathcal{B}$  par

$$T_\mu(V)(x) \equiv \int_A H(V)(x, a) \mu(da \mid x) \quad (2.9)$$

L'opérateur  $T : \mathcal{B}_U \rightarrow \mathcal{B}$  est défini par

$$T(V)(x) \equiv \inf_{a \in A(x)} H(V)(x, a). \quad (2.10)$$

Ce sont là les opérateurs de la programmation dynamique habituels.



Par (2.8)-(2.10),  $T_\mu$  et  $T$  sont monotones, c.-à-d.  $V_1 \geq V_2 \Rightarrow T_\mu(V_1) \geq T_\mu(V_2)$  et  $T(V_1) \geq T(V_2)$ . De plus, on a  $T(V) \leq T_\mu(V) \forall \mu \in U$  et  $\forall V \in B_U$ .

Par A.4 de l'appendice A, on a  $T_\mu(V) \in B_U$ . Donc, si  $\mu_i \in U$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ , on peut composer les  $T_{\mu_i}$ .  $T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{n-1}}(V)$  désignera désormais  $T_{\mu_0}(T_{\mu_1}(\cdots(T_{\mu_{n-1}}(V))\cdots))$  et  $T_\mu^n$  désignera  $T_\mu \cdots T_\mu$ , c.-à-d.  $T_\mu$  composé  $n$  fois.

Si  $V \in B_U$ , il n'est pas certain que  $T(V) \in B_U$ . Mais par A.1, A.6 et A.7a de l'appendice, on a  $T(V) \in B_1, \forall V \in B_1$ . Sur  $B_1$ ,  $T^n$  désignera la composition de l'opérateur  $T$   $n$  fois avec lui-même, c.-à-d.  $T^0(V) = V$  et  $T^n(V) = T(T^{n-1}(V)) \forall n \in \mathbb{N}, \forall V \in B_1$ .

## 2.5 Les modèles positifs et négatifs

Blackwell (1965 a et b) et Strauch (1966) ont introduit les modèles positifs et négatifs de programmation dynamique en temps discret. Il s'agit des cas où  $g \geq 0$  et  $g \leq 0$  respectivement. Ces deux cas correspondent aux modèles (P) et (N) de Bertsekas et Shreve (1978, chap. 9). Pour ces deux modèles, il n'est pas nécessaire que le facteur d'actualisation  $\alpha$  soit inférieur à 1. Ainsi, si  $g \geq 0$  [ $g \leq 0$ ] dans le modèle de PDMD du paragraphe 2.3, on peut se ramener au modèle (P) [(N)] de Bertsekas et Shreve en incluant l'actualisation dans la fonction de coût, le nouveau facteur d'actualisation devenant égal à 1. Dans les deux cas, le théorème de convergence monotone nous assure que la condition  $\Delta$

satisfaite. Les 3 propositions qui suivent sont donc des corollaires directs des résultats de Bertsekas et Shreve (1978, chap. 9).

Nous utiliserons désormais la convention suivante: lorsqu'un énoncé est précédé d'abréviations désignant une ou plusieurs version(s) du modèle, cela indique qu'il s'applique à la (aux) version(s) correspondante(s).

Soit  $V_0 \equiv 0$  et soit

$$\mathbb{B}_2 \equiv \begin{cases} \{V \in \mathbb{B}_1 \mid V \geq 0\} & \text{pour le modèle P} \\ \{V \in \mathbb{B}_1 \mid V \leq 0\} & \text{pour le modèle N.} \end{cases}$$

PROPOSITION 2.1 (P,N)

- a)  $\forall \pi \in \Pi$  et  $\forall x \in X$ , il existe une stratégie markovienne  $\bar{\pi} \in \Pi_m$  telle que  $V_{\bar{\pi}}(x) = V_{\pi}(x)$ .
- b)  $V_{\star} = T(V_{\star})$ .
- c)  $\mu \in U \Rightarrow V_{\mu} = T_{\mu}(V_{\mu})$ .

PROPOSITION 2.2 (P)

- a)  $V \in \mathbb{B}_2$  et  $V \geq T(V) \Rightarrow V \geq V_{\star}$ .

- b)  $V \in \mathbb{B}_2$  et  $V \geq T_\mu(V) \Rightarrow V \geq V_\mu$ .
- c)  $\mu$  est une politique optimale  $\Leftrightarrow V_\star = T_\mu(V_\star)$ .
- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V_0) \leq V_\star$ .
- e)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \mu_\varepsilon \in U_{NA}$  une politique  $\varepsilon$ -optimale.
- f) Si  $\forall x \in X$ , il existe une stratégie optimale à  $x$ , alors il existe une politique optimale  $\mu \in U_{NA}$ .
- g) Il existe une politique optimale  $\mu \in U_{NA}$  si et seulement si  $\forall x \in X$ , l'infimum dans
- $$T(V_\star)(x) = \inf_{a \in A(x)} H(V_\star)(x, a)$$
- est atteint.
- h) S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\{a \in A(x) | H(T^{n_0}(V_0))(x, a) \leq \lambda\}$  soit compact  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$  et  $\forall n \geq n_0$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V_0) = V_\star,$$

il existe une suite  $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\} \subset U_{NA}$  telle que  $T_{\mu_n}(T^{n_0}(V_0)) = T^{n+1}(V_0) \forall n \geq n_0, \exists \mu \in U_{NA}$  telle que  $\mu(x)$  est un point d'accumulation de  $\{\mu_n(x), n \in \mathbb{N}\}$  pour chaque  $x \in X$  tel que  $V_\star(x) < \infty$  et toute politique  $\mu$  ayant ces propriétés est optimale<sup>(1)</sup>. L'algorithme

---

(1) Cet énoncé est légèrement plus fort que proposition 9.17 de Bertsekas et Shreve (1978). Il se démontre comme la proposition 2.11c.

de la programmation dynamique nous permet donc théoriquement, dans ce cas, d'obtenir une politique optimale.

Cette condition est vérifiée, en particulier<sup>(2)</sup>, si chaque  $A(x)$  est fini, ou bien si  $\Gamma$  est compact,  $\beta \cdot g$  est semi-continue inférieurement sur  $\Gamma$  et  $Q$  est continu sur  $\Gamma$ . De plus, sous cette dernière éventualité, on peut choisir  $\mu$  Borel-mesurable.

PROPOSITION 2.3 (N)

- a)  $V \in \mathbb{B}_2$  et  $V \leq T(V) \Rightarrow V \leq V_*$ .
- b)  $V \in \mathbb{B}_2, \mu \in U$  et  $V \leq T_\mu(V) \Rightarrow V \leq V_\mu$ .
- c)  $\pi \in \Pi$  est optimale  $\Leftrightarrow V_\pi = T(V_\pi)$ .
- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V_0) = V_*$
- e)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \pi_\varepsilon = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$  une stratégie NA  $\varepsilon$ -optimale telle que chaque  $\mu_n(\cdot | h_n)$  ne dépend que de  $x_0$  et  $x_n$ . De plus, si  $\forall x \in X, \exists$  une stratégie  $\varepsilon$ -optimale à  $x$ , alors il existe une stratégie optimale  $\pi_* = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$  (possiblement aléatoire), telle que chaque  $\mu_n(\cdot | h_n)$  ne dépend que de  $x_0$  et  $x_n$ .

---

(2) Voir Schäl (1975a) pour d'autres variantes.

- f) Si  $\Gamma$  est ouvert,  $-\beta \cdot g$  semi-continue inférieurement sur  $\Gamma$  et le noyau  $Q$  continu sur  $\Gamma$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  une politique  $\varepsilon$ -optimale  $\mu \in U_{NA}$  Borel-mesurable. (3)

L'algorithme de la programmation dynamique (méthode des approximations successives) consiste à choisir une fonction  $V \in \mathbf{B}_2$  et à calculer successivement  $T(V)$ ,  $T^2(V)$ , ...,  $T^n(V)$ , .... Pour  $V \equiv 0$ , on vient de voir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V) = V_*$ , i.e. l'algorithme converge, lorsque les coûts sont tous négatifs, mais cela n'est vrai que sous certaines conditions si les coûts sont positifs. Lorsque l'algorithme converge, les propositions précédentes ne nous disent rien sur la vitesse de convergence et ne fournissent aucune borne sur la différence entre  $T^n(V_0)$  et  $V_*$  ni sur la différence entre  $V_{\mu_n}$  et  $V_*$ .

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons définir d'autres versions du modèle de PD MED et obtenir, pour ces versions, des résultats plus forts que ceux obtenus pour les modèles P et N.

## 2.6 Le modèle contractant C.

Pour chaque  $(x,a) \in \Gamma$ , posons

$$\alpha(x,a) \equiv \frac{1}{\beta(x)} \int_x \beta(x') Q(dx'|x,a). \quad (2.11)$$

---

(3) Schäl (1975a) propose aussi plusieurs autres variantes de cet énoncé.

C'est le facteur d'actualisation espéré entre l'étape courante et la prochaine étape, sachant qu'on se trouve présentement dans l'état  $x$  et qu'on a choisi l'action  $a$ .

En supposant qu'il existe  $\alpha_1$ ,  $g_0$  et  $g_1$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $g_0 \leq 0$ ,  $g_1 \geq 0$  et tels que

$$\alpha(x,a) \leq \alpha_1 \quad (2.12)$$

$$g_0 \leq g(x,a) \leq g_1 \quad (2.13)$$

$\forall (x,a) \in \Gamma$ , on obtient une version du modèle de PDMED que nous baptisons C. Comme nous le verrons bientôt, cette version satisfait les hypothèses de contraction de Denardo (1967). C'est un modèle contractant au sens de Van Hee et Wessels (1978).

EXEMPLE 2.2: Considérons un processus de renouvellement markovien commandé sur horizon infini, avec actualisation, à l'instar de Jewell (1963) et Denardo (1967, ex. 4).  $S$  est un ensemble fini d'états,  $A$  un ensemble fini d'actions, et pour chaque  $s \in S$ ,  $A(s)$  est un sous-ensemble de  $A$ .  $Q$  est un noyau stochastique  $\mathcal{B}$ -mesurable sur  $[0, \infty) \times S | S \times A$ ,  $g: S \times A \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de coût, bornée puisque définie sur un ensemble fini, et  $\rho > 0$  et le taux d'actualisation. On pose  $X \equiv [0, \infty) \times S$  et  $\Gamma \equiv \{(\tau, s, a) \in X \times A | a \in A(s)\}$ .

Ce modèle correspond à un système qui évolue en temps continu. Se trouver au point  $(\tau, s) \in X$  signifie être dans l'état  $s$  à l'instant  $\tau$ .

Se trouvant en un point  $(\tau_n, s_n)$  à l'étape  $n$ , on choisit une action  $a_n \in A(s_n)$  et le système passera au point  $x_{n+1} = (\tau_n + \zeta, s_{n+1})$  à l'étape  $n+1$ , le couple  $(\zeta, s_{n+1})$  étant généré aléatoirement selon la mesure de probabilité  $Q(\cdot | s_n, a_n)$ . Le coût encouru pour l'étape  $n$  (à l'instant  $\tau_n$ ) est  $g(s_n, a_n)$  et on actualise ce coût à l'instant 0 en le multipliant par  $\beta(x_n) = e^{-\rho\tau_n}$ . On cherche à minimiser le coût espéré total actualisé. On a ici un processus de saut, commandé aux instants de sauts  $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$  (mais pas commandé de façon continue). La condition (2.12), que l'on peut réécrire

$$\alpha(s, a) \equiv \int_{[0, \infty) \times S} e^{-\rho\zeta} Q(d\zeta, ds' | s, a) \leq \alpha_1 \quad (2.14)$$

équivalut à exiger l'existence d'une valeur  $d > 0$  telle que l'espérance mathématique du délai entre deux instants de sauts successifs soit toujours supérieure ou égale à  $d$ . Cette dernière condition est vérifiée, en particulier, dans le cas d'un processus de saut à taux de saut borné. Notons qu'on peut facilement généraliser cet exemple en admettant des espaces d'états et d'actions boréliens. Nous y reviendrons plus loin. ■

#### LEMME 2.4 (C)

Sous les conditions (2.12) et (2.13), la condition  $\Delta$  est satisfaite.

Preuve. Soit  $g_m \equiv \max(|g_0|, |g_1|)$ . Pour chaque  $\pi \in \Pi$  et  $x \in X$ , on a

$$\begin{aligned} \int_H \left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \right) dP_{\pi, x} &= \int_H \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\beta(x_n) g(x_n, a_n)| \right) dP_{\pi, x} \\ &\leq g_m \sum_{n=0}^{\infty} \int_{H_n} \beta(x_n) dP_{\pi, x}^n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Montrons, par induction, que  $\forall_n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\int_{H_n} \beta(x_n) dP_{\pi, X}^n \leq (\alpha_1)^n \beta(x) \quad (2.16)$$

Pour  $n=0$ , le résultat est trivial par définition de  $\beta$ . En supposant qu'il est vrai pour  $n-1$ , on obtient, en utilisant (2.12)

$$\begin{aligned} & \int_{H_n} \beta(x_n) dP_{\pi, X}^n \\ &= \int_{H_{n-1}} \beta(x_{n-1}) \left[ \frac{1}{\beta(x_{n-1})} \int_A \int_X \beta(x_n) Q(dx_n | x_{n-1}, a_{n-1}) \mu_{n-1}(da_{n-1} | h_{n-1}) \right] dP_{\pi, X}^{n-1} \\ &\leq \int_{H_{n-1}} \beta(x_{n-1}) \left[ \int_A \alpha_1 \mu_{n-1}(da_{n-1} | h_{n-1}) \right] dP_{\pi, X}^{n-1} \\ &\leq \alpha_1 \int_{H_{n-1}} \beta(x_{n-1}) dP_{\pi, X}^{n-1} \leq \alpha_1 (\alpha_1)^{n-1} \beta(x) = (\alpha_1)^n \beta(x). \end{aligned}$$

De (2.15) et (2.16), on a

$$\int_H \left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \right) dP_{\pi, X} \leq \frac{g_m \beta(x)}{1-\alpha_1} < \infty.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  est donc intégrable, ce qui implique (Rudin (1974, Théorem 1.38))

que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge presque partout, est aussi intégrable et

$$\int_H \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \right) dP_{\pi, X} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_H c_n dP_{\pi, X} < \infty \quad \blacksquare \quad (2.17)$$

La proposition suivante nous assure que  $T$  et  $T_\mu$ ,  $\forall \mu \in U$ , sont des applications contractantes.



PROPOSITION 2.5 (C)

$\forall V_1, V_2 \in \mathcal{B}_U$ , on a

$$\|T(V_2) - T(V_1)\| \leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\| \quad (2.18)$$

et

$$\|T_\mu(V_2) - T_\mu(V_1)\| \leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\| \quad \forall \mu \in U \quad (2.19)$$

Preuve.

Soient  $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_U$ ,  $\mu \in U$  et  $x \in X$ . On a

$$\begin{aligned} |T_\mu(V_2)(x) - T_\mu(V_1)(x)| &\leq \int_A \int_X |V_2(x') - V_1(x')| \frac{\beta(x')}{\beta(x)} Q(dx' | x, a) \mu(da | x) \\ &\leq \int_A \|V_2 - V_1\| \alpha_1 \mu(da | x) \\ &\leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\| \end{aligned}$$

ce qui démontre (2.19). De plus, par A.7 de l'appendice A,  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \mu \in U_{NA}$  telle que  $T_\mu(V_1) \leq T(V_1) + \varepsilon$ . On a alors,  $\forall x \in X$  et en utilisant (2.19):

$$\begin{aligned} (T(V_2) - T(V_1))(x) &\leq (T(V_2) - T_\mu(V_1))(x) + \varepsilon \\ &\leq (T_\mu(V_2) - T_\mu(V_1))(x) + \varepsilon \\ &\leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai  $\forall \varepsilon > 0$  et puisqu'on peut inverser les rôles de  $V_1$  et  $V_2$ , on obtient (2.18) ■

Avant de poursuivre l'étude du modèle C, introduisons une nouvelle version de notre modèle de PD MED, baptisée I.

## 2.7 Le modèle I

Nous avons vu que la condition (2.12) nous empêche, pour l'exemple 2.2, de pouvoir choisir une action pour laquelle le délai espéré jusqu'au prochain instant de saut soit arbitrairement petit. Cela peut s'avérer contraignant pour certaines applications.

EXEMPLE 2.3 Supposons qu'on a affaire, dans l'exemple 2.2, à un système dont on ne peut inférer "l'état" que par des inspections. Supposons aussi que la durée des inspections est nulle ou négligeable (par exemple, s'il s'agit d'un moteur d'avion, le temps est compté en heures de vol, de sorte que l'horloge" est arrêtée durant les inspections). A un instant donné, on décide de procéder à une inspection sommaire. Selon le résultat de cette inspection (état observé), on peut décider (action choisie) ou bien d'agir sur le système, ou bien de procéder à une inspection plus complète. Dans ce dernier cas, suite au résultat de l'inspection complète (nouvel état observé et nouvelle étape), on choisira une nouvelle action. On aura alors deux étapes au même instant, i.e. un délai nul entre deux sauts successifs. Ainsi, en choisissant de procéder à une seconde inspection, on viole la condition (2.12)■

La version I du modèle est celle obtenue sous les conditions suivantes: il existe  $\tilde{\mu} \in U_{NA}$ ,  $\delta_1, K_1, K_2, g_1 \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\alpha(x, \tilde{\mu}(x)) \leq \delta_1 < 1 \quad \forall x \in X \quad (2.20)$$

$$K_1 + K_2 > 0 \quad (2.21)$$

$$K_1 + K_2 \alpha(x, a) \leq g(x, a) \quad \forall (x, a) \in \Gamma \quad (2.22)$$

$$g(x, \tilde{\mu}(x)) \leq g_1 \quad \forall x \in X \quad (2.23)$$

$$\int_X \mathbb{1}_{\beta(x') > \beta(x)} Q(dx' | x, a) = 0 \quad \forall (x, a) \in \Gamma. \quad (2.24)$$

Les conditions (2.20) et (2.23) ont pour but d'assurer l'existence d'une stratégie pour laquelle le coût espéré total actualisé soit fini. A noter que (2.22) n'exclut pas la possibilité de coûts négatifs (si  $K_1 < 0$  et  $K_2 > -K_1$ ). Grâce à (2.24), la suite des facteurs d'actualisation associés aux différentes étapes sera presque sûrement décroissante. Toutefois, cette décroissance n'est pas stricte. Plus précisément, à une étape donnée, il n'est pas exclu que l'on puisse choisir une action sous laquelle le facteur d'actualisation associé au prochain état soit égal à celui associé à l'état présent avec probabilité 1. En contrepartie, la condition (2.22) a pour effet de rendre non attrayante toute stratégie autre que celles sous lesquelles la suite  $\{\beta(x_n), n \in \mathbb{N}\}$  converge vers 0 presque sûrement.

Nous devons maintenant vérifier que I satisfait la condition  $\Delta$ .

LEMME 2.6 (I)

Pour chaque  $\pi \in \Pi$  et  $x \in X$ , la condition  $\Delta$  est satisfaite et on a

$$V_{\pi}(x) \equiv \frac{1}{\beta(x)} \int_H \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i \right) dP_{\pi,x} = \frac{1}{\beta(x)} \sum_{i=0}^{\infty} \int_H c_i dP_{\pi,x}. \quad (2.25)$$

Preuve

Pour chaque  $h \in H$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a, par (2.22):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i^- &= \sum_{i=0}^n \beta(x_i) g^-(x_i, a_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \beta(x_i) \max(0, -K_1 - K_2 \alpha(x_i, a_i)). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Soit  $\Phi \equiv \{i \in \mathbb{N}_0 \mid i \leq n \text{ et } -K_1 - K_2 \alpha(x_i, a_i) > 0\}$ . Soit  $\nu$  la cardinalité de  $\Phi$ ;  $i(1), i(2), \dots, i(\nu)$  la suite de ses éléments, ordonnés par ordre croissant, et soit  $i(\nu+1) \equiv n+1$ . Si  $\Phi = \emptyset$ , alors  $\sum_{i=0}^n c_i^- \leq 0$ . Pour avoir

$P_{\pi,x}[\Phi \neq \emptyset] \neq 0$ , il est nécessaire que  $K_1 < 0$  et  $K_2 > 0$  (puisque  $K_1 + K_2 \geq 0$  et  $\alpha(x_i, a_i) \leq 1$  p.s.). On a donc

$$\begin{aligned} \int_H \left( \sum_{i=0}^n c_i^- \right) dP_{\pi,x} &\leq \int_H \left[ \sum_{j=1}^{\nu} \beta(x_{i(j)}) (-K_1 - K_2 \alpha(x_{i(j)}, a_{i(j)})) \right] dP_{\pi,x} \\ &= \int_H \left[ \sum_{j=1}^{\nu} (-K_1 \beta(x_{i(j)}) - K_2 \beta(x_{i(j)+1})) \right] dP_{\pi,x} \\ &\leq \int_H \left[ \sum_{j=1}^{\nu} (-K_1 \beta(x_{i(j)}) - K_2 \beta(x_{i(j)+1})) \right] dP_{\pi,x} \\ &\leq \int_H \max \left[ 0, -K_1 - (K_1 + K_2) \sum_{j=2}^{\nu} \beta(x_{i(j)}) \right] dP_{\pi,x} \\ &\leq \max(0, -K_1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

puisque  $K_1 + K_2 \geq 0$ . Ceci étant vrai  $\forall x \in \mathbb{N}$ , on obtient

$$\int_H \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i^- \right) dP_{\pi, X} \leq \max(0, -K_1) < \infty. \quad (2.28)$$

Ainsi,  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^-$  converge  $P_{\pi, X}$  - presque partout, ce qui implique que

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i$  est  $P_{\pi, X}$  - presque partout bien définie et égale à

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^+ - \sum_{i=0}^{\infty} c_i^-$ . On a donc, en utilisant le théorème de convergence

monotone,

$$\begin{aligned} \beta(x) V_{\pi}(x) &\equiv \int_H \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i \right) dP_{\pi, X} = \int_H \left( \sum_{i=0}^{\infty} (c_i^+ - c_i^-) \right) dP_{\pi, X} \\ &= \int_H \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i^+ \right) dP_{\pi, X} - \int_H \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i^- \right) dP_{\pi, X} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_H c_i^+ dP_{\pi, X} - \sum_{i=0}^{\infty} \int_H c_i^- dP_{\pi, X} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_H c_i dP_{\pi, X} \end{aligned}$$

et cela complète la preuve ■

On peut remarquer que pour le modèle I,  $T$  n'est pas nécessairement une application contractante. Nous allons cependant montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $T^n$  soit contractant  $\forall n \geq n_0$ .

D'autre part, si  $\mu \in U$ , il n'existe pas nécessairement un  $n_0$  tel que  $T_{\mu}^{n_0}$  soit contractant. Des conditions suffisantes pour l'existence d'un tel  $n_0$  seront données à la proposition 2.9.

## 2.8 Quelques propriétés de C et I.

Nous allons étudier plus en détail les modèles C et I. Notre objectif, dans ce paragraphe, est d'obtenir des propriétés semblables à celles données par les propositions 2.1 et 2.3 pour les modèles P et N. D'autres propriétés, de même qu'un algorithme permettant d'obtenir une politique  $\varepsilon$ -optimale seront donnés dans les paragraphes subséquents.

Pour une stratégie donnée  $\pi \in \Pi$ , il est possible qu'il n'existe pas de stratégie markovienne  $\tilde{\pi}$  qui soit aussi bonne que  $\pi$  pour chaque état initial, i.e. telle que  $V_{\tilde{\pi}}(x) \leq V_{\pi}(x) \quad \forall x \in X$ . Cependant, pour un état initial donné, il en existe toujours une, comme nous l'assure la proposition suivante, dont la preuve est une adaptation directe de celle de Strauch (1966).

### PROPOSITION 2.7 (C, I)

Pour chaque  $\pi \in \Pi$  et  $x \in X$ , il existe une stratégie markovienne  $\tilde{\pi} \in \Pi_m$  telle que  $V_{\tilde{\pi}}(x) = V_{\pi}(x)$ . On a donc

$$V_{*}(x) = \inf_{\pi \in \Pi_m} V_{\pi}(x) \quad (2.30)$$

Preuve. Pour chaque  $i \in \mathbb{N}_0$ , soient  $p_i$  et  $q_i$  les lois marginales de  $P_{\pi, x}$  sur  $X \times A$  et  $X$  correspondant à  $(x_i, a_i)$  et  $x_i$  respectivement. Par A.2 de l'appendice, il existe  $\hat{\mu}_i$  un noyau stochastique Borel-mesurable sur  $A|X$  tel que  $\forall \underline{X} \in \mathcal{B}(X)$  et  $\underline{A} \in \mathcal{B}(A)$ ,

$$p_i(\underline{X} \times \underline{A}) = \int_{\underline{X}} \hat{\mu}_i(\underline{A}|s) q_i(dx). \quad (2.31)$$

Puisque  $p_i(\Gamma) = 1$ , on a  $\hat{\mu}_i(\underline{A}(x)|x) = 1$  pour  $q_i$ - presque tout  $x \in X$ . En modifiant  $\hat{\mu}_i$  sur un ensemble de mesure  $q_i$ - nulle si nécessaire, on peut obtenir un noyau  $\mathcal{U}$ -mesurable  $\bar{\mu}_i$  satisfaisant (2.31) et tel que  $\bar{\mu}_i(\underline{A}(x)|x) = 1 \forall x \in X$ .  $\bar{\pi} \equiv (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$  définit alors une stratégie markovienne. Pour chaque  $i$ , soit  $\bar{p}_i$  la loi marginale de  $P_{\bar{\pi}, x}$  analogue à  $p_i$ . Par (2.17) et (2.25), on a

$$V_{\pi}(x) = \frac{1}{\beta(x)} \sum_{i=0}^{\infty} \int_H c_i dP_{\pi, x} = \frac{1}{\beta(x)} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{X \times A} c_i dp_i$$

et

$$V_{\bar{\pi}}(x) = \frac{1}{\beta(x)} \sum_{i=0}^{\infty} \int_H c_i dP_{\bar{\pi}, x} = \frac{1}{\beta(x)} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{X \times A} c_i d\bar{p}_i.$$

Pour compléter la preuve, il suffit donc de montrer que  $p_i \equiv \bar{p}_i \forall i \in \mathbb{N}_0$ .

Nous ferons cela par induction sur  $i$ . Pour  $i=0$ ,  $\underline{X} \in B(X)$ ,  $\underline{A} \in B(A)$ , on a, par (2.2) et (2.31),

$$\begin{aligned} \bar{p}_0(\underline{X} \times \underline{A}) &= \bar{\mu}_0(\underline{A}|x) \mathbb{1}_{x \in \underline{X}} \\ &= \int_{\underline{X}} \hat{\mu}_0(\underline{A}|x) q_0(dx) \\ &= p_0(\underline{X} \times \underline{A}). \end{aligned}$$

En supposant  $\bar{p}_{i-1} \equiv p_{i-1}$ , par (2.31), (2.3-2.4) et puisque  $Q$  est Borel-mesurable, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{p}_i(\underline{X} \times \underline{A}) &= \int_{X \times A} \int_{\underline{X}} \bar{\mu}_i(\underline{A}|x') Q(dx'|x, a) \bar{p}_{i-1}(dx, da) \\ &= \int_{X \times A} \int_{\underline{X}} \hat{\mu}_i(\underline{A}|x') Q(dx'|x, a) p_{i-1}(dx, da) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_X \hat{\mu}_i(A|x^i) q_i(dx^i) \\
&= p_i(\underline{X} \times \underline{A})
\end{aligned}$$

et cela complète la preuve ■

Définissons maintenant, pour chacune des versions C et I du modèle,  $\mathbb{B}_2$ , un sous-ensemble fermé de l'espace des fonctions  $V: X \rightarrow \mathbb{R}$  bornées et semi-analytiques inférieurement.

$$\mathbb{B}_2 \begin{cases} \{V \in \mathbb{B}_1 \mid \frac{g_0}{1-\alpha_1} \leq V(x) \leq \frac{g_1}{1-\alpha_1} \forall x \in X\} \text{ pour le modèle C} \\ \{V \in \mathbb{B}_1 \mid K_1 + \min(0, K_2) \leq V(x) \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} \forall x \in X\} \text{ pour le modèle I.} \end{cases}$$

Dans les deux cas,  $\mathbb{B}_2$  est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach  $\mathbb{B}_0$ .

$\mathbb{B}_2$  est aussi fermé par rapport à l'opérateur  $T$ , comme nous l'assure la proposition suivante.

PROPOSITION 2.8. (C, I)

$$V \in \mathbb{B}_2 \Rightarrow T(V) \in \mathbb{B}_2$$

Preuve. Soit  $V \in \mathbb{B}_2$ . A.1 de l'appendice A nous assure que  $V(x,a) \in \Gamma$ , la fonction à intégrer dans la définition de  $H(V)(x,a)$  est s.a.i.. Il suffit alors d'appliquer A.6 et A.7a pour montrer que  $T(V) \in \mathbb{B}_1$ .

Pour le modèle I, soit  $\tilde{\mu}$  satisfaisant (2.20) et (2.23). Pour chaque  $x$  dans  $X$ , on a



$$\begin{aligned}
T(V)(x) &\leq T_{\tilde{\mu}}(V)(x) = g(x, \tilde{\mu}(x)) + \frac{1}{\beta(x)} \int \beta(x') V(x') Q(dx' | x, \tilde{\mu}(x)) \\
&\leq g_1 + \frac{g_1}{1-\delta_1} \alpha(x, \tilde{\mu}(x)) \leq g_1 + \frac{g_1}{1-\delta_1} \delta_1 = \frac{g_1}{1-\delta_1} .
\end{aligned} \tag{2.32}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
T(V)(x) &= \inf_{a \in A(x)} \left[ g(x, a) + \frac{1}{\beta(x)} \int \beta(x') V(x') Q(dx' | x, a) \right] \\
&\geq \inf_{a \in A(x)} \left[ K_1 + K_2 \alpha(x, a) + (K_1 + \min(0, K_2)) \alpha(x, a) \right] \\
&\geq \inf_{a \in A(x)} \left[ K_1 + \min(0, K_2) \alpha(x, a) + (K_1 + K_2) \alpha(x, a) \right] \\
&\geq K_1 + \min(0, K_2)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

car  $\alpha(x, a) \leq 1$  et  $K_1 + K_2 > 0$ . On a donc bien  $T(V) \in \mathbb{B}_2$ .

Pour le modèle C, l'inégalité (2.32) s'obtient de la même façon, en choisissant n'importe quel  $\tilde{\mu} \in U$  et en y remplaçant  $\delta_1$  par  $\alpha_1$ . De façon similaire,

$$\begin{aligned}
T(V)(x) &= \inf_{a \in A(x)} \left[ g(x, a) + \frac{1}{\beta(x)} \int \beta(x') V(x') Q(dx' | x, a) \right] \\
&\geq \inf_{a \in A(x)} \left[ g_0 + \frac{g_0}{1-\alpha_1} \alpha(x, a) \right] \\
&\geq g_0 + \frac{g_0}{1-\alpha_1} \alpha_1 = \frac{g_0}{1-\alpha_1}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

et on a donc bien  $T(V) \in \mathbb{B}_2$  ■

La proposition suivante nous assure que pour  $n$  suffisamment grand,  $T^n$  est  $n$ -contractant. Pour  $\mu$  donné,  $T_\mu^n$  l'est aussi sous certaines conditions. La partie b sera utilisée pour démontrer la proposition 2.11.

PROPOSITION 2.9 (I)

Soit  $\alpha_1 \in (0,1)$ . Si  $V_1, V_2 \in \mathbb{B}_2$  et

$$n_0 \equiv \frac{\frac{g_1}{1-\delta_1} - K_1 - \min(0, K_2)}{\alpha_1(K_1+K_2)} \quad (2.35)$$

a) Alors  $\forall n \geq n_0$ , on a

$$\|T^n(V_2) - T^n(V_1)\| \leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\|. \quad (2.36)$$

b) Soient  $\mu \in U$ ,  $\varepsilon \geq 0$  et  $n_1 \in \mathbb{N}$  tels que

$$n_1 \geq n_0 + \frac{\varepsilon}{\alpha_1(K_1+K_2)} \quad (2.37)$$

$$T_\mu^{n_1}(K_1 + \min(0, K_2)) \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} + \varepsilon. \quad (2.38)$$

Alors  $\forall n \geq n_1$  et  $V_1, V_2 \in \mathbb{B}_3$ , on a

$$\|T_\mu^n(V_2) - T_\mu^n(V_1)\| \leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\|. \quad (2.39)$$

Preuve. a) Soit  $\varepsilon_1 > 0$ . Par A.7, il existe une suite

$\{\mu_i \in U_{NA}, i=0, \dots, n-1\}$  telle que  $\forall i$ ,

$$T_{\mu_i}(T^{n-i-1}(V_1)) \leq T(T^{n-i-1}(V_1)) + \frac{\varepsilon_1}{n}. \quad (2.40)$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{n-1}}(V_1) &\leq T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{n-2}} \left( T(V_1) + \frac{\varepsilon_1}{n} \right) \\
&\leq T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{n-2}} \left( T(V_1) \right) + \frac{\varepsilon_1}{n} \\
&\leq T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{n-3}} \left( T^2(V_1) + \frac{\varepsilon_1}{n} \right) + \frac{\varepsilon_1}{n} \\
&\leq T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{n-3}} \left( T^2(V_1) \right) + \frac{2\varepsilon_1}{n} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\leq T^n(V_1) + \varepsilon_1 \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} + \varepsilon_1 .
\end{aligned} \tag{2.41}$$

En posant  $\mu_i \equiv \mu_{n-1} \quad \forall i \geq n$  et  $\pi \equiv (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots) \in \Pi_m$ ,

on a aussi, par (2.2-2.4) et (2.21-2.24):

$$\begin{aligned}
T_{\pi}^n(V_1)(x) &= \frac{1}{\beta(x)} \int_H \left[ \sum_{i=0}^{n-1} c_i + \beta(x_n) V_1(x_n) \right] dP_{\pi, x} \\
&\geq \frac{1}{\beta(x)} \int_H \left[ K_1 \beta(x_0) + K_2 \beta(x_n) + (K_1 + K_2) \sum_{i=1}^{n-1} \beta(x_i) + (K_1 + \min(0, K_2)) \beta(x_n) \right] dP_{\pi, x} \\
&\geq K_1 + \min(0, K_2) + (K_1 + K_2) \frac{1}{\beta(x)} \sum_{i=1}^n \int_H \beta(x_i) dP_{\pi, x} \\
&\geq K_1 + \min(0, K_2) + n(K_1 + K_2) \frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_n) dP_{\pi, x} .
\end{aligned} \tag{2.42}$$

En combinant (2.41) et (2.42), on obtient

$$\frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_n) dP_{\pi, x} \leq \frac{\frac{g_1}{1-\delta_1} + \varepsilon_1 - K_1 - \min(0, K_2)}{n(K_1 + K_2)} \tag{2.43}$$

d'où

$$\begin{aligned}
T^n(V_2)(x) - T^n(V_1)(x) &\leq T^n(V_2)(x) - T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{n-1}}(V_1)(x) + \varepsilon_1 \\
&\leq T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{n-1}}(V_2)(x) - T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{n-1}}(V_1)(x) + \varepsilon_1 \\
&\leq \frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_n) \|V_2 - V_1\| dP_{\pi, x} + \varepsilon_1 \\
&\leq \frac{\frac{g_1}{1-\delta_1} + \varepsilon_1 - K_1 - \min(0, K_2)}{n(K_1 + K_2)} \|V_2 - V_1\| + \varepsilon_1 \\
&\leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\| + \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{n(K_1 + K_2)}\right). \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Puisque ceci demeure vrai  $\forall \varepsilon_1 > 0$  et puisqu'on peut inverser les rôles de  $V_1$  et  $V_2$ , on obtient (2.36).

b) En posant  $\pi = (\mu, \mu, \dots)$  on obtient, de la même façon que (2.42),

$$T_{\mu}^{n_1}(K_1 + \min(0, K_2)) \geq K_1 + \min(0, K_2) + n_1(K_1 + K_2) \frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_{n_1}) dP_{\pi, x}. \tag{2.45}$$

De (2.38), (2.45), (2.35) et (2.37), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_{n_1}) dP_{\pi, x} &\leq \frac{\frac{g_1}{1-\delta_1} + \varepsilon - K_1 - \min(0, K_2)}{n_1(K_1 + K_2)} \\
&\leq \frac{\alpha_1 n_0}{n_1} + \frac{\varepsilon}{n_1(K_1 + K_2)} \leq \alpha_1 \tag{2.46}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|T_\mu^{n_1}(V_2) - T_\mu^{n_1}(V_1)\| &= \frac{1}{\beta(x)} \int_H (V_2(x_{n_1}) - V_1(x_{n_1})) \beta(x_{n_1}) dP_{\pi, x} \\
&\leq \|V_2 - V_1\| \frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_{n_1}) dP_{\pi, x} \\
&\leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\|.
\end{aligned}$$

Comme on peut inverser les rôles de  $V_1$  et  $V_2$  et puisque cela est vrai  $\forall x \in X$ , on obtient (2.39) pour  $n=n_1$ . Si  $n > n_1$ , on a

$$\begin{aligned}
\|T_\mu^n(V_2) - T_\mu^n(V_1)\| &= \|T_\mu^{n-n_1}(T_\mu^{n_1}(V_2) - T_\mu^{n_1}(V_1))\| \\
&\leq \|T_\mu^{n_1}(V_2) - T_\mu^{n_1}(V_1)\| \leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\| \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Par A.1 de l'appendice A,  $\mathbb{B}_2$  est bien un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach  $\mathbb{B}_0$ . Par le Théorème du point fixe, appendice B, et les propositions 2.5, 2.8 et 2.9, on obtient:

LEMME 2.10 (C,I)

a)  $\exists ! \tilde{V}_* \in \mathbb{B}_2$  tel que  $T(\tilde{V}_*) = \tilde{V}_*$ . De plus,  $\forall V \in \mathbb{B}_2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(V) - \tilde{V}_*\| = 0.$$

b) Soit  $\mu \in U$ . Pour I, on suppose en outre que les hypothèses de la proposition 2.9b sont satisfaites. Alors  $\exists ! \tilde{V}_\mu \in \mathbb{B}_2$  tel que

$$T_\mu(\tilde{V}_\mu) = \tilde{V}_\mu. \text{ De plus, } \forall V \in \mathbb{B}_2, \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_\mu^n(V) - \tilde{V}_\mu\| = 0.$$

Ainsi, pour ces deux modèles, l'algorithme de la programmation dynamique converge uniformément sur  $X$ . Il reste à montrer que  $\tilde{V}_\mu = V_\mu$  et  $\tilde{V}_* = V_*$ .

L'énoncé de la Proposition 2.11 s'inspire de résultats de Strauch (1966), Schäl (1975a) et Bertsekas et Shreve (1978), obtenus pour des modèles comparables, mais les démonstrations données ici sont différentes.

PROPOSITION 2.11 (C,I)

Soit  $V \in \mathbb{B}_2$ . On a alors

- a)  $T(V)=V \Leftrightarrow V=V_*$
- b)  $T(V)\leq V \Rightarrow V_*\leq V$
- c)  $T(V)\geq V \Rightarrow V_*\geq V$
- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(V)-V_*\| = 0$
- e)  $V_* \in \mathbb{B}_2$ .

Soit  $\mu \in U$ . Alors

- f)  $\mu$  est une politique optimale  $\Leftrightarrow T_\mu(V_*) = V_* \Leftrightarrow T(V_\mu) = V_\mu \in \mathbb{B}_2$ .

Soit  $\mu \in U$ . Pour I, on suppose en outre que les hypothèses de la Proposition 2.9b sont satisfaites pour un certain triplet  $(\alpha_1, \varepsilon, n_1)$ .

On a alors

- g)  $T_\mu(V) = V \Leftrightarrow V = V_\mu$
- h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_\mu^n(V) - V_\mu\| = 0$
- i)  $V_\mu \in \mathbb{B}_2$ .

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 2.12 (I)

S'il existe  $\beta_1 > 0$  tel que

$$p \equiv P_{\pi, X} \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta(x_n) \geq \beta_1 \right] > 0 \quad (2.47)$$

alors  $V_{\pi}(x) = \infty$ .

Preuve.

Si un tel  $\beta_1$  existe, on obtient, de (2.20, 2.22 et 2.24):

$$\begin{aligned} \int_H \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) dP_{\pi, X} &\geq \int_H \left[ K_1 \beta(x_0) + K_2 \alpha(x_n, a_n) + (K_1 + K_2) \sum_{i=0}^n \beta(x_i) \right] dP_{\pi, X} \\ &\geq \beta(x) (K_1 + \min(0, K_2)) + n(K_1 + K_2) \int_H \beta(x_n) dP_{\pi, X} \\ &\geq \beta(x) (K_1 + \min(0, K_2)) + n(K_1 + K_2) p \beta_1 \end{aligned} \quad (2.48)$$

et

$$V_{\pi}(x) = \frac{1}{\beta(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) dP_{\pi, X} = \infty \quad \blacksquare$$

Preuve de la proposition.

Pour démontrer g, h et i, il suffit, par le lemme 2.10, de montrer que  $\tilde{V}_{\mu} = V_{\mu}$ . Posons  $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ . Pour  $V \in \mathbb{B}_2$ , on a  $\forall x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\mu}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu}^n(V)(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(x)} \int_H \left[ \sum_{i=0}^n c_i + \beta(x_n) V(x_n) \right] dP_{\pi, X}. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et puisque chaque  $\beta(x_n)V(x_n)$  est intégrable et dans  $\mathbb{B}_2$ , on a

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(x)} \int \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) dP_{\pi, x} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_n) V(x_n) dP_{\pi, x} \\
&= V_\mu(x) + \frac{1}{\beta(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \beta(x_n) V(x_n) dP_{\pi, x}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Pour le modèle C,

$$\left| \frac{1}{\beta(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \beta(x_n) V(x_n) dP_{\pi, x} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1)^n \|V\| = 0 \tag{2.50}$$

par (2.16) et donc

$$\tilde{V}_\mu(x) = V_\mu(x) . \tag{2.51}$$

Pour le modèle I, puisque  $V$  et  $\tilde{V}_\mu$  sont dans  $\mathbb{B}_2$ , elles sont bornées et par (2.49),  $V_\mu$  est aussi bornée. Donc, par le lemme 2.12, on a

$$P_{\pi, x} \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta(x_n) = 0 \right] = 1 \text{ et par (2.49),}$$

$$\tilde{V}_\mu(x) = V_\mu(x) . \tag{2.51}$$

Pour démontrer a, d et e, il suffit par le lemme 2.10 de montrer que  $\tilde{V}_* = V_*$ . Pour chaque  $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ ,  $V \in \mathbb{B}_2$  et  $x \in X$ , on a par (2.17) et (2.25):

$$\begin{aligned}
V_\pi(x) &= \frac{1}{\beta(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) dP_{\pi, x} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{n-1}} (V)(x) - \frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_n) V(x_n) dP_{\pi, x} \right] .
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Pour le modèle I, par le lemme 2.12 et (2.52), ou bien  $V_\pi(x) = \infty$ , ou bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \beta(x_n) dP_{\pi, x} = 0. \text{ Pour le modèle C,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_n) V(x_n) dP_{\pi, x} = 0 \text{ par (2.50). Dans tous les cas on obtient:}$$



$$\begin{aligned}
V_{\pi}(x) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{n-1}}(V)(x) \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V)(x) = \tilde{V}_*(x)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

et donc

$$V_*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} V_{\pi}(x) \geq \tilde{V}_*(x) . \tag{2.54}$$

Il reste à montrer l'inégalité dans l'autre sens. Pour le modèle I, on peut choisir, dans l'ordre,  $\alpha_1 \in (0,1)$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $n_1 \in \mathbb{N}$  satisfaisant

(2.37). Soit  $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ . Par A.7,  $\exists \mu \in U_{NA}$  tel que

$$T_{\mu}(\tilde{V}_*) \leq T(\tilde{V}_*) + \frac{\varepsilon_1}{n_1} . \tag{2.55}$$

Puisque  $T(\tilde{V}_*) = \tilde{V}_*$ , on obtient

$$\begin{aligned}
T_{\mu}(\tilde{V}_*) &\leq \tilde{V}_* + \frac{\varepsilon_1}{n_1} \\
T_{\mu}^2(\tilde{V}_*) &\leq T_{\mu}(\tilde{V}_*) + \frac{\varepsilon_1}{n_1} \leq \tilde{V}_* + \frac{2\varepsilon_1}{n_1} \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
T_{\mu}^{n_1}(\tilde{V}_*) &\leq T_{\mu}(\tilde{V}_*) + \frac{n_1-1}{n_1}\varepsilon_1 \leq \tilde{V}_* + \varepsilon_1 .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

et par monotonie,

$$T_{\mu}^{n_1}(K_1 + \min(0, K_2)) \leq T_{\mu}^{n_1}(\tilde{V}_*) \leq \tilde{V}_* + \varepsilon_1 \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} + \varepsilon_1 .$$

Par la proposition 2.9b, on obtient donc

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{2n_1}(\tilde{V}_*) &\leq T_{\mu}^{n_1}(\tilde{V}_* + \varepsilon_1) \leq T_{\mu}^{n_1}(\tilde{V}_*) + \alpha_1 \varepsilon_1 \leq \tilde{V}_* + \varepsilon_1 + \alpha_1 \varepsilon_1 \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
T_{\mu}^{in_1}(\tilde{V}_*) &\leq \dots \leq \dots \leq \tilde{V}_* + \sum_{j=1}^i \alpha_1^{j-1} \varepsilon_1 .
\end{aligned} \tag{2.57}$$

De (2.57) et de l'énoncé h que nous avons déjà démontré, on tire

$$V_{\mu} = \lim_{i \rightarrow \infty} T_{\mu}^{i n_1}(\tilde{V}_{*}) \leq \tilde{V}_{*} + \frac{\varepsilon_1}{1 - \alpha_1} . \quad (2.58)$$

Ceci étant vrai  $\forall \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ , on peut conclure que

$$V_{*} \equiv \inf_{\pi \in \Pi} V_{\pi} \leq V_{\mu} \leq \tilde{V}_{*} . \quad (2.59)$$

On peut faire le même raisonnement pour le modèle C en prenant  $\alpha_1 = \delta_1$ ,  $n_1 = 1$  et en utilisant la proposition 2.5. Cela complète la preuve de a, d et e. Les propriétés b et c viennent de d et de la monotonie de l'opérateur T. Il reste à démontrer f.

Soit  $\mu \in U$  une politique optimale. On a  $V_{\mu} = V_{*} \in \mathbb{B}_2$ . Comme dans la preuve de g, h et i, puisque  $V_{\mu} = V_{*}$  est bornée, on a  $\forall V \in \mathbb{B}_2$  et  $x \in X$ :

$$\begin{aligned} V_{\mu}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu}^n(V)(x) - \frac{1}{\beta(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \beta(x_n) V(x_n) dP_{\pi, x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu}^n(V)(x) . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Pour le modèle I, par la proposition 2.8, on a

$$K_1 + \min(0, K_2) \leq T(K_1 + \min(0, K_2)) \leq T_{\mu}(K_1 + \min(0, K_2))$$

et par monotonie de  $T_{\mu}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} K_1 + \min(0, K_2) &\leq T_{\mu}(K_1 + \min(0, K_2)) \\ &\vdots \\ &\leq T_{\mu}^n(K_1 + \min(0, K_2)) \\ &\vdots \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} T_{\mu}^i(K_1 + \min(0, K_2)) = V_{\mu} = V_{*} \leq \frac{g_1}{1 - \delta_1} . \end{aligned}$$

La condition (2.38) est donc toujours satisfaite quelque soient  $n_1$  et  $\varepsilon_1$  et on peut donc choisir  $\alpha_1$ ,  $n_1$  et  $\varepsilon_1$  satisfaisant les hypothèses de la proposition 2.9b. Pour  $C$  et  $I$ , on a donc par g  $T_\mu(V_\mu) = V_\mu$ , c.-à-d.  $T_\mu(V_\star) = V_\star$ .

Si  $T_\mu(V_\star) = V_\star$ , alors  $\forall n_1 \in \mathbb{N}$ , par monotonie de  $T_\mu$ , on a  $T_\mu^{n_1}(K_1 + \min(0, K_2)) \leq T_\mu^{n_1}(V_\star) = V_\star \leq \frac{g_1}{1-\delta_1}$  de sorte (2.38) est satisfaite

$\forall \varepsilon \geq 0$ . Par h, on a donc

$$V_\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\mu^n(V_\star) = V_\star = T(V_\star) = T(V_\mu)$$

et  $V_\mu \in \mathbb{B}_2$ .

Si  $T(V_\mu) = V_\mu \in \mathbb{B}_2$ , alors par a,  $V_\mu = V_\star$  et  $\mu$  est donc une politique optimale ■

Nous venons d'établir des conditions d'optimalité pour une stratégie SE, mais il est bien connu qu'une stratégie optimale n'existe pas toujours.

## 2.9 Existence d'une stratégie optimale.

Des conditions d'existence d'une stratégie optimale ou  $\varepsilon$ -optimale sont données par les deux propositions suivantes. La Proposition 2.13a correspond au corollaire 9.12.1 de Bertsekas et Shreve (1978) tandis que 2.13b et 2.14 correspondent à la Proposition 9.19 de la même source.

L'énoncé 2.13c est une généralisation des théorèmes 12 et 14 de Shreve et Bertsekas (1979). En effet, les hypothèses de semi-continuité sont éliminées et celles de compacité sont affaiblies. De plus, la preuve du théorème 14 de Shreve et Bertsekas ne vaut que pour le cas où  $T(V) \geq V$ . L'énoncé 2.13d correspond à une variante du corollaire 9.17.2 de Bertsekas et Shreve (1978), dont il existe par ailleurs plusieurs autres variantes pour le modèle général de Programmation Dynamique en temps discret (voir Schäl (1975a)).

PROPOSITION 2.13 (C, I)

- a) Il existe une politique optimale  $\mu \in U_{NA} \Leftrightarrow$  l'infimum dans
- $$\inf_{a \in A(x)} H(V_*)(x)$$
- est atteint  $\forall x \in X$ .
- b) Si  $\forall x \in X$ , il existe une stratégie optimale à  $x$ , alors il existe une politique optimale NA.
- c) Soit  $V \in \mathcal{B}_2$ . S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$U_n(V)(x, \lambda) \equiv \{a \in A(x) \mid H(T^n(V))(x, a) \leq \lambda\} \quad (2.61)$$

est compact  $\forall n \geq n_0$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  et  $\forall x \in X$ , alors  $\exists$  une suite

$$\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\} \subset U_{NA} \text{ telle que } T_{\mu_n}(T^n(V)) = T^{n+1}(V)$$

$\forall n \geq n_0$  et  $\exists \mu \in U_{NA}$  tel que  $\mu(x)$  est un point d'accumulation

de  $\{\mu_n(x), n \in \mathbb{N}\} \forall x \in X$ . De plus, chaque  $\mu$  de cette forme est une politique optimale. Il existe donc, dans ce cas, au moins une

stratégie NA SE optimale et l'algorithme de la Programmation Dynamique nous permet théoriquement d'en obtenir une.

- d) Cette condition est vérifiée, en particulier, si chaque  $A(x)$  est fini, ou bien si chaque  $A(x)$  est compact,  $g \cdot \beta$  et  $V$  sont semi-continues inférieurement et  $Q$  est continu sur  $X \times A$ . De plus, sous cette dernière éventualité, on peut choisir  $\mu$   $\mathcal{B}$ -mesurable.

Preuve.

- a) En utilisant A.7, on voit que l'infimum est atteint si et seulement s'il existe  $\mu \in U_{NA}$  tel que  $T_\mu(V_\star) = T(V_\star) = V_\star$ . Par la proposition 2.11 f, cela est vrai si et seulement si  $\mu$  est une politique optimale.
- b) Pour chaque  $x \in X$ , soit  $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi_m$  une stratégie markovienne optimale à  $x$ . Par le Théorème de convergence monotone et par (2.53), on a

$$\begin{aligned} V_\star(x) &= V_\pi(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_n})(V_\star)(x) \\ &= T_{\mu_0} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_n} (V_\star) \right] (x) \\ &\geq T_{\mu_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V_\star) \right) (x) = T_{\mu_0} (V_\star)(x) \geq T(V_\star)(x) = V_\star(x). \end{aligned}$$

Ainsi,  $V_\star(x) = T_{\mu_0}(V_\star)(x)$  et l'infimum dans  $\inf_{a \in A(x)} H(V_\star)(x)$  est donc

atteint. Par a, la conclusion suit.

- c) Soient  $n \geq n_0$  et  $x \in X$ . Soit  $\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$  une suite réelle décroissante convergant vers  $T^{n+1}(V)(x)$ . Pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ ,  $U_n(V)(x, \lambda_i)$  est compact, non vide et  $U_n(V)(x, \lambda_{i+1}) \subseteq U_n(V)(x, \lambda_i)$ .  $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_n(V)(x, \lambda_i)$  est donc compact, non vide et tout point de cette intersection permet

d'atteindre l'infimum dans  $\inf_{a \in A(x)} H(T^n(V))(x, a)$ . Par A.7,  $\forall n \geq n_0$ ,

il existe donc  $\mu_n \in U_{NA}$  tel que  $T_{\mu_n}(T^n(V)) = T^{n+1}(V)$ .

Par la Proposition 2.11d,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_1 \geq n_0$  tel que

$\|T^n(V) - V_*\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$ . Soit  $n_2 \geq n_1$ .  $\forall n \geq n_2$ ,

$$\begin{aligned} T_{\mu_n}^{n_2}(T^{n_2}(V)) &\leq T_{\mu_n}(T^n(V) + 2\varepsilon) \leq T_{\mu_n}(T^n(V)) + 2\varepsilon \\ &\leq T^{n+1}(V) + 2\varepsilon \leq V_* + 3\varepsilon \end{aligned} \quad (2.62)$$

et donc

$$\mu_n(x) \in U_{n_2}(V)(x, V_*(x) + 3\varepsilon) \quad \forall x \in X. \quad (2.63)$$

Par le Théorème de Urysohn [Bertsekas et Shreve (1978, p. 106)],

$A$  est homéomorphe à un sous-ensemble du cube de Hilbert  $H = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]$ .

Il suffit donc de considérer le cas où  $A \subseteq H$ .  $\forall n \geq n_0$ , on peut alors écrire  $\mu_n = (\mu_n^1, \mu_n^2, \dots)$  où  $\mu_n^i: X \rightarrow [0, 1] \quad \forall i \in \mathbb{N}$ . Définissons récursivement  $\mu^i: X \rightarrow [0, 1]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , par (inspiré de Schäl (1974, lemme 4)):

$$\mu^1(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n^1(x),$$

$$\mu^i(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\mu_n^i(x) \mid n \geq m \text{ et } \mu_n^j + \frac{1}{m} > \mu^j \quad \forall j \leq i-1\}$$

pour  $i=2, 3, \dots$  et posons  $\mu = (\mu^1, \mu^2, \dots)$ .  $\forall x \in X$ ,  $\mu(x)$  est un point d'accumulation de la suite  $\{\mu_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ .

Soit  $x \in X$ . Par (2.63) et puisque  $U_{n_2}(V)(x, V_*(x) + 3\varepsilon)$  est compact, on a

$$\mu(x) \in U_{n_2}(V)(x, V_*(x) + 3\varepsilon) \subseteq A(x). \quad (2.64)$$

i.e.

$$H(T^{n_2}(V))(x, \mu(x)) \leq V_*(x) + 3\varepsilon.$$

Comme ceci est vrai  $\forall n_2 \geq n_1$  et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$T_{\mu}(V_*)(x) = H(V_*)(x, \mu(x)) = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} H(T^{n_2}(V))(x, \mu(x)) \leq V_*(x) + 3\varepsilon.$$

Puisque c'est vrai  $\forall x \in X$  et  $\forall \varepsilon > 0$ , il s'ensuit que  $T_{\mu}(V_*) = V_*$ , d'où par la Proposition 2.11f, la politique  $\mu$  est optimale.

- d) Si chaque  $A(x)$  est fini, il est clair que l'hypothèse de c est satisfaite. Dans l'autre cas, par A.5 de l'appendice A,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n(V)$  est semi-continue inférieurement, de même que  $H(T^n(V))$ . Ainsi, pour  $x$  fixé et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\{(x, a) \in \Gamma \mid H(T^n(V))(x, a) \leq \lambda\}$  est fermé, de sorte que par A.5d,  $U_n(V)(x, \lambda)$  est compact. De plus, par A.5d, dans la preuve de c, on peut choisir chaque  $\mu_n$   $\mathcal{B}$ -mesurable, de sorte que  $\mu$  l'est aussi ■

Lorsqu'une politique optimale NA existe, on note,  $\forall x \in X$ ,

$$A_*(x) \equiv \{a \in A(x) \mid H(V_*)(x, a) = V_*(x)\}. \quad (2.65)$$

C'est l'ensemble des actions optimales pour l'état  $x$ .

On sait que pour chaque  $x \in X$  et  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une stratégie  $\varepsilon$ -optimale à  $x$ . Le résultat suivant est un peu plus fort.

PROPOSITION 2.14 (C,I)

$\forall \varepsilon > 0$ , il existe une stratégie  $\varepsilon$ -optimale NA SE.

Preuve. Nous en avons construit une dans la preuve de la Proposition 2.11a ■

2.10 Coûts non bornés

Pour C et I, nous avons supposée la fonction de coût  $g$  bornée.

On pourrait cependant se satisfaire de conditions plus faibles, pouvant permettre des fonctions de coût non bornées. Il s'agit d'utiliser une norme pondérée, comme par exemple:

$$\|V\|_w = \sup_{x \in X} |V(x)/w(x)| \quad \forall V \in \mathbb{B} \quad (2.66)$$

où  $w: X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est fixée, au lieu de la norme sup habituelle. Pour plus de détails sur cette approche et d'autres approches similaires, voir vanNunen et Wessels (1979), Schellhaas (1979) et les références qui y sont citées.



## CHAPITRE 3

### APPROXIMATIONS ET BORNES

#### 3.1 Introduction

Souvent, l'espace d'états ou l'espace d'actions du PD MED qui nous intéresse est infini et on ne peut pas appliquer l'algorithme de la programmation dynamique sans utiliser une certaine forme d'approximation. De plus, si l'un de ces espaces est multidimensionnel, la "malédiction de la dimension" nous empêche même, habituellement, de le discrétiser convenablement. C'est là le problème fondamental de la programmation dynamique.

Dans ce chapitre, un algorithme des approximations successives approximatif est proposé. Il s'agit d'une version légèrement modifiée de la méthode des approximations successives ("value iteration") de la programmation dynamique. Chaque étape de cette dernière méthode consiste grosso-modo à calculer  $T(V)$  à partir d'une fonction  $V$  de  $\mathbb{B}_2$  obtenue à l'étape précédente. Dans l'algorithme proposé,  $T(V)$  n'est pas calculé de façon exacte, mais approximé par une fonction  $V_1$ . La méthode d'approximation utilisée n'est pas précisée. En ce sens, l'algorithme demeure très général. Mais si on veut obtenir des bornes sur la qualité de la solution fournie par l'algorithme, on doit supposer que des bornes sur l'erreur d'approximation de  $T(V)$  par  $V_1$  sont disponibles à chaque itération. En d'autres termes, on doit disposer de valeurs  $\delta^+$  et  $\delta^-$  telles que

$$-\delta^- \leq T(V) - V_1 \leq \delta^+ \quad (3.1)$$

Ces valeurs peuvent changer d'une itération à l'autre et nous verrons, dans les exemples traités aux chapitres 6-8, comment les calculer ou les estimer. Si  $V_1$  est dans  $B_2$ , l'écart entre les frontières de  $B_2$  fournit des valeurs a priori pour  $\delta^+$  et  $\delta^-$ .

Pour les modèles C et I du chapitre 2, des bornes sur la fonction de coût anticipé optimale  $V_*$  sont disponibles après chaque itération de l'algorithme. Ces bornes dépendent des valeurs courantes de  $V$ ,  $V_1$ ,  $\delta^+$  et  $\delta^-$ . Si la suite des valeurs de  $\delta^+$  et  $\delta^-$  choisies aux différentes itérations tend vers 0, alors l'écart entre ces bornes tend aussi vers 0, de sorte que la suite des valeurs de  $V_1$  converge uniformément vers  $V_*$ . Des conditions suffisantes de non-optimalité d'une action  $a$  lorsqu'on est dans un état donné  $x$  (c.à.d. pour que  $a \notin A_*(x)$ ) sont aussi données à chaque itération. Ces conditions peuvent nous permettre, dans certains cas, de réduire l'ensemble  $\Gamma$  sans que la valeur de  $V_*$  soit modifiée, donnant lieu à un nouveau modèle pour lequel l'obtention d'une politique optimale exigera moins de calculs.

Par ailleurs, à une itération donnée, on peut choisir  $\epsilon_0 > 0$  et une politique  $\mu$  dans  $U_{NA}$  telle que

$$T_\mu(V_1) \leq T(V_1) + \epsilon_0 \quad (3.2)$$

Si  $T_\mu$  est contractant, une borne sur l'écart entre  $V_\mu$  et  $V_*$  est alors disponible. On est alors assuré que la politique  $\mu$  est au moins  $\epsilon$ -optimale, où  $\epsilon$  est la valeur de cette borne. Dans le cas du modèle C,

$T_\mu$  est toujours contractant. Dans le cas du modèle I, dans la plupart des applications pratiques, on peut habituellement choisir  $\mu$  tel que  $T_\mu$  soit contractant.

Des conditions suffisantes pour que l'algorithme proposé nous permette d'obtenir une politique  $\epsilon$ -optimale en un nombre fini d'itérations sont aussi fournies pour le modèle C.

### 3.2 L'approximation en programmation dynamique

Avant d'introduire les détails de l'algorithme proposé, nous allons faire un bref tour d'horizon des travaux concernant l'approximation en programmation dynamique. Nous ne prétendons pas fournir une énumération exhaustive; il ne s'agit, en fait, que de se donner des points de repère.

Lorsqu'on décide d'approximer un modèle par un autre modèle, on s'attend habituellement (a) à ce qu'il soit plus facile d'obtenir une "bonne politique" pour le nouveau modèle et (b) à ce que la "bonne politique" ainsi obtenue soit aussi une "bonne politique" pour le modèle original.

Un premier type d'approximation consiste à s'arrêter après un nombre fini d'itérations de la méthode des approximations successives. Pour un PDMTD sur horizon infini avec espaces d'états et d'actions finis, MacQueen (1966) a montré comment on pouvait obtenir des bornes sur  $V_*$  après chaque itération de la méthode des approximations successives (calcul exact de  $T(V)$  à chaque itération). Denardo a aussi obtenu de

telles bornes pour des modèles contractants plus généraux et Porteus (1971, 1975) a amélioré les bornes de MacQueen. Hinderer (1978) et Hübner (1980) se sont intéressés à des modèles de PDMD sur horizon fini  $N$ , approximé soit par extrapolation à partir d'un modèle sur horizon plus court ( $< N$ ) soit par interpolation à partir de la solution du modèle sur horizon infini. Ils ont obtenu des bornes sur  $V_*$  de même que sur la différence entre  $V_*$  et la fonction de coût anticipé associée à la politique retenue par le modèle d'approximation.

Pour un PDMTD sur horizon infini avec actualisation, la distance entre ces bornes converge vers 0 de façon géométrique en fonction du nombre d'itérations. Ces bornes peuvent servir à déterminer une règle d'arrêt pour l'algorithme. On peut aussi, comme l'avait suggéré MacQueen (1967), les utiliser pour identifier et éliminer en cours de route des actions non optimales (voir théorème 3.2 b).

Une autre classe de méthodes d'approximation comprend les méthodes qui approximent le modèle original en modifiant soit l'espace d'états, soit l'espace d'actions, soit les deux à la fois.

Dans certains cas, on peut approximer le modèle original par un plus "gros" modèle. Cela peut être justifiable, par exemple, si une version continue d'un modèle est plus facile à analyser que la version discrète originale. Hinderer (1978) s'est intéressé à ce genre de modification pour le cas d'un modèle de PDMD sur horizon fini et a obtenu des bornes sur la qualité de l'approximation.

Il est cependant plus courant d'approximer le modèle original par un plus "petit" modèle. Typiquement, on remplace les espaces d'états et d'actions par des sous-ensembles des espaces originaux.

Fox (1971) a introduit un schéma d'approximation pour un PDMD contractant à espace d'états dénombrable. Il s'agit essentiellement de choisir un sous-ensemble fini  $X_n = \{1, \dots, n\}$  de l'espace d'états  $X$  et de ne considérer que les fonctions de coût anticipé  $V$  qui sont nulles sur le complément de  $X_n$ . Fox a établi que sous certaines conditions, la suite des fonctions de coût anticipé optimal associées aux modèles d'approximation converge ponctuellement vers  $V_*$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. White (1979, 1980) et Whitt (1979b) ont par la suite obtenu des bornes sur la différence entre la fonction  $V_*$  du modèle original et la fonction  $V_\mu$  associée à une politique optimale pour le modèle approximatif déterminé par  $X_n$ . Ces bornes dépendent essentiellement de la matrice sous-stochastique des probabilités de transition multipliées par le facteur de contraction.

Whitt (1979a) a généralisé le schéma de Fox. L'espace d'états peut être non dénombrable et on dispose a priori de deux fonctions  $\underline{V}$  et  $\bar{V}$  telles que  $\underline{V} \leq V_* \leq \bar{V}$ . Pour chaque sous-ensemble  $X_n$  de l'espace d'états, si on ne considère que les fonctions  $V$  qui sont égales à  $\underline{V}$  [à  $\bar{V}$ ] sur le complément de  $X_n$ , on obtient un modèle approximatif dont la fonction de coût anticipé optimale  $V^-$  [ $V^+$ ] est une borne inférieure [supérieure] pour  $V_*$ . De plus, si on élargit  $X_n$ , les nouvelles bornes obtenues sont au moins aussi bonnes que les précédentes. Des conditions sont aussi données sous lesquelles la suite des fonctions de coût

anticipé optimal associées à une suite de modèles approximatifs converge ponctuellement vers  $V_*$ .

Fox (1973) a aussi introduit un schéma d'approximation basé sur la discrétisation de l'espace d'états. L'idée de discrétisation n'était pas nouvelle (voir Bellman et Dreyfus (1962)) mais Fox fut le premier à établir des conditions de convergence de la procédure. Un schéma similaire proposé par Bertsekas (1975) discrétise à la fois l'espace d'états et l'espace d'actions. Sous certaines hypothèses de compacité et de continuité au sens de Lipschitz, Bertsekas a démontré la convergence de sa procédure. Par convergence, on entend ici que l'extension sur l'espace d'états original de la fonction de coût anticipé optimale du problème discrétisé, de même que la fonction de coût anticipé associée à l'extension sur le modèle original d'une politique optimale pour le problème discrétisé convergent toutes deux vers  $V_*$  lorsque le maillage devient de plus en plus fin.

Whitt (1978) a par la suite introduit une procédure générale pour comparer des modèles de programmation dynamique. Les modèles considérés sont les modèles monotones contractants de Denardo (1967) et incluent, entre autres, les modèles de PDMTD avec actualisation. Typiquement, pour discrétiser un modèle de programmation dynamique, on définit d'abord une partition finie de l'espace d'états. A chacune des parties, on associe un état représentatif et on choisit un sous-ensemble fini des actions admissibles pour tous les états de cette partie. On obtient un PDMTD à espaces d'états et d'actions finis, dont les autres éléments (probabilités de transition et fonction de coût) sont définis de façon naturelle et qui

constitue le modèle d'approximation. La procédure de Whitt permet de comparer un modèle d'approximation avec le modèle original et fournit des bornes sur (a) la distance entre la fonction  $V_*$  du modèle original et l'extension à l'espace d'états original de la fonction de coût anticipé optimale du modèle approximatif et (b) la distance entre  $V_*$  et la fonction de coût anticipé  $V_\mu$  associée à l'extension  $\mu$  sur le modèle original d'une politique  $\tilde{\mu}$  optimale pour le modèle approximatif. Pour une suite de modèles approximatifs, des conditions sous lesquelles la suite de ces distances converge vers 0 sont aussi données.

Les bornes en question devraient, éventuellement, pouvoir servir de guides pour le choix d'une bonne discrétisation.

Hinderer (1978) a raffiné légèrement les bornes de Whitt en considérant des bornes asymétriques.

Hahnewald-Bush et Nollau (1978, 1981) ont présenté des travaux analogues, portant sur des procédures d'agrégation d'états pour le cas d'espaces d'états dénombrables.

Récemment, Langen (1981) a introduit des conditions suffisantes pour qu'une suite de modèles d'approximation d'un PD MED (modèle de Schäl (1975a)) converge vers le modèle original, au sens de la convergence continue de la suite des fonctions de coût anticipé optimales. Langen n'obtient pas de bornes sur la qualité de l'approximation, mais ses conditions sont plus générales que celles de Whitt (1978). Elles correspondent à exiger la convergence au sens de Kuratowski des espaces d'états

et d'actions et la convergence continue de l'application  $A(\cdot)$  désignant les actions admissibles, du noyau de transition, de la fonction de coût et de la fonction d'actualisation vers les quantités correspondantes du modèle original. La convergence est aussi démontrée sous un autre jeu de conditions, impliquant (pour un problème de minimisation) la convergence semi-continue inférieure des fonctions définissant le modèle.

Langen montre par ailleurs comment les procédures de discrétisation de Whitt peuvent cadrer dans son schéma.

D'autres approches utilisent plus directement la théorie classique de l'approximation et forment une troisième classe de méthodes. Le modèle original n'est pas remplacé a priori par un autre modèle, mais à chaque itération de l'algorithme de la programmation dynamique, on approxime la fonction de coût anticipé  $T(V)$  par une fonction  $V_1$ . Il y a évidemment plusieurs façons d'effectuer cette approximation. Le schéma général consiste à paramétrer  $V_1$ , puis à calculer les "meilleures valeurs possibles" pour les paramètres. La fonction  $V_1$  ainsi obtenue devient le nouveau  $V$  pour la prochaine itération, et ainsi de suite.

Un schéma un peu plus spécifique consiste à approximer  $T(V)$  par une combinaison linéaire de fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_N$  connues a priori. On pose

$$V_1 = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i \quad (3.3)$$

Connaître la fonction  $V_1$  se réduit alors à connaître les coefficients  $a_1, \dots, a_N$ .



Pour un modèle unidimensionnel, Bellman et Dreyfus (1962) ont proposé l'utilisation des  $N$  premiers polynômes de Legendre. La fonction  $T(V)$  est d'abord évaluée en  $N$  points distincts et  $V_1$  n'est rien d'autre que le polynôme d'interpolation de degré  $N-1$  passant par ces  $N$  points. De façon similaire, on peut aussi utiliser les polynômes de Tchebychev ou toute autre famille de polynômes orthogonaux.

Cette procédure se généralise facilement au cas où l'espace d'états est multidimensionnel, en utilisant des produits tensoriels (Mond et Shisha (1966) et Morin (1978)).  $T(V)$  est interpolée par  $V_1$  où

$$V_1(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \dots \sum_{i_m=1}^{N_m} a_{i_1 \dots i_m} \tilde{\phi}_{i_1}(x_1) \dots \tilde{\phi}_{i_m}(x_m) \quad (3.4)$$

et chaque  $\tilde{\phi}_{i_j}$  est un polynôme. L'évaluation de  $T(V)$  doit se faire en  $N = \prod_{j=1}^m N_j$  points.

Malheureusement, c'est bien connu (de Boor (1978, chap.2)), l'interpolation polynômiale est en général une méthode d'approximation peu satisfaisante. En effet, les polynômes d'interpolation ont tendance à osciller; et ce comportement oscillatoire s'accroît généralement lorsqu'on augmente le degré du polynôme. De plus, l'allure globale du polynôme d'interpolation dépend beaucoup trop des propriétés locales de la fonction: si la fonction à approximer est mal conditionnée quelque part dans l'intervalle d'approximation, alors l'approximation sera mauvaise partout.

Afin d'obtenir une approximation plus acceptable, on peut interpoler plutôt par une fonction polynômiale par morceaux.

Le cas extrême d'une fonction polynômiale par morceaux est une fonction constante par morceaux; et le schéma de discrétisation de Fox (1973) équivaut essentiellement à approximer  $T(V)$ , à chaque itération, par une fonction de ce type. Si on veut que  $V_1$  soit au moins continue, le cas le plus simple est l'interpolation par une ligne brisée, c.-à-d. linéaire par morceaux. On obtient souvent, en utilisant une fonction constante par morceaux ou linéaire par morceaux, une approximation plus acceptable que celle obtenue par l'interpolation polynomiale. Toutefois, pour une approximation plus "lisse" et généralement plus efficace, on peut choisir des morceaux de polynômes de degré supérieur à 1.

A l'heure actuelle, les méthodes les plus populaires pour interpoler ou approximer une fonction unidimensionnelle sont basées sur les fonctions splines cubiques, qui sont des fonctions cubiques par morceaux et partout deux fois continûment différentiables.

Parmi toutes les fonctions de  $C^2[a,b]$  (deux fois continûment différentiables sur  $[a,b]$ ) interpolant une fonction donnée sur un intervalle  $[a,b]$ , la fonction spline cubique "naturelle" d'interpolation (définie comme étant l'unique fonction spline cubique d'interpolation dont la dérivée seconde est nulle en  $a$  et en  $b$ ) est la fonction  $g$  qui minimise  $\int_a^b (g''(x))^2 dx$ . En d'autres mots, parmi les fonctions de  $C^2[a,b]$ , le choix de cette fonction minimise le comportement oscillatoire de l'interpolation.

En général, une fonction spline d'ordre  $k$  est formée de  $L-1$  polynômes de degré  $k-1$  qui se rejoignent en des points appelés noeuds et qui (si les noeuds sont distincts) est partout  $k-2$  fois continûment différentiable, Chaque fonction spline peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $L+k-2$  fonctions spéciales appelées B-splines, qui ne dépendent que de la position des noeuds. Chacune de ces fonctions B-splines a un support très réduit de sorte qu'en tout point au plus  $k$  d'entre elles sont non-nulles. Cette propriété facilite grandement l'évaluation d'une fonction spline en terme de combinaison linéaire de B-splines. De plus, les fonctions B-splines définies à partir de noeuds non nécessairement distincts forment une base de l'espace des fonctions polynômiales par morceaux. Pour plus de détails sur les fonctions splines, voir de Boor (1978).

Daniel (1976) fut le premier, semble-t-il, à faire le lien entre les fonctions splines et la programmation dynamique. Il suggéra d'approximer la fonction de coût d'un programme dynamique déterministe en l'interpolant, à chaque itération, par une fonction spline d'ordre  $k$  dont les noeuds se situent aux points d'évaluation. Sa suggestion peut aussi s'étendre aux programmes stochastiques dont la fonction de coût anticipé est suffisamment "lisse". Si  $k$  est assez petit, une telle méthode d'approximation exige une quantité de calculs beaucoup moins grande que l'interpolation polynômiale, tout en n'exigeant pas plus de mémoire. C'est ce que montre Daniel (1976).

Des sous-routines FORTRAN présentées dans de Boor (1978) permettent d'obtenir la fonction spline d'interpolation, étant donnés  $N$  points d'évaluation et les valeurs correspondantes de la fonction, sous forme de combinaison linéaire de fonctions B-splines. D'autres sous-routines permettent de transformer cette représentation par des B-splines en représentation sous forme polynômiale par morceaux. Les méthodes numériques sous-jacentes sont très stables.

En général, il n'est pas nécessaire que les noeuds soient placés aux points d'interpolation, ils peuvent aussi être placés ailleurs. Différentes méthodes ont été proposées pour choisir l'emplacement des noeuds d'une fonction spline d'interpolation ou pour choisir, lorsque c'est possible, l'emplacement des points d'évaluation. Des sous-routines FORTRAN ont même été écrites à cet effet (voir de Boor (1978, chap. 12-13)).

Tout comme l'interpolation polynômiale, cette procédure d'interpolation par des fonctions splines se généralise au cas où l'espace d'états est multidimensionnel en utilisant des produits tensoriels (voir l'équation (3.4) et de Boor (1978) pour le cas de deux dimensions).

L'interpolation par une fonction spline est un moyen très efficace pour approximer une fonction "lisse", mais seulement si les valeurs connues de la fonction initiale aux points d'évaluation sont exactes, ou à peu près exactes. Si, comme c'est souvent le cas en pratique, le calcul de  $T(V)$  à chacun des  $N$  points d'évaluation est entaché d'une erreur non négligeable (on dit qu'il y a du "bruit" dans l'information), l'interpolation n'est plus une méthode appropriée, car elle a tendance à

mplifier le bruit. Cela est encore pire lorsque certains points d'évaluation sont très rapprochés (de Boor (1978, chap. 13)).

Lorsqu'il y a trop de bruit, il vaut donc mieux approximer  $T(V)$  autrement. On peut l'approximer par une méthode de moindres carrés, par exemple, en utilisant un nombre de paramètres inférieur au nombre de points d'évaluation.

Un algorithme de de Boor et Rice (1968), implanté dans la sous-routine ICSVKU du logiciel IMSL, calcule une fonction d'approximation spline cubique de moindres carrés pour un ensemble de points d'évaluation donnés. Le nombre de noeuds est choisi a priori (généralement beaucoup plus petit que le nombre de points d'évaluation) mais l'algorithme détermine la position des noeuds de façon à minimiser la somme des carrés des erreurs aux points d'évaluation.

Aux chapitres 6 à 8, nous allons expérimenter l'utilisation de ces méthodes d'interpolation et d'approximation par des fonctions splines pour résoudre certains problèmes de programmation dynamique stochastique.

En ce qui a trait aux programmes dynamiques à espaces d'états multidimensionnels, les méthodes d'approximation connues à ce jour demeurent en général peu satisfaisantes. Si le nombre de dimensions est petit (2 à 4), il y a tout lieu de croire que l'utilisation d'une méthode d'éléments finis puisse donner des résultats acceptables.

Par ailleurs, plusieurs auteurs, dont Höllig (1981), Dahmen (1980) et Dahmen et Micchelli (1981a et b), se sont intéressés récemment aux fonctions B-splines multivariées, introduites par de Boor (1976). Ces fonctions diffèrent des produits tensoriels de fonctions splines unidimensionnelles et pourraient être à la base d'une nouvelle approche permettant d'obtenir des fonctions d'approximation multivariées globalement lisses et extrêmement flexibles. Beaucoup de travail reste à faire dans ce domaine, mais il semble que ce soit là une avenue très prometteuse.

### 3.3 Un algorithme général utilisant l'approximation de la fonction de coût anticipé à chaque itération

Nous proposons ici un algorithme des approximations successives qui, à chaque itération, ne calcule  $T(V)$  que de façon approximative. La méthode d'approximation de  $T(V)$  n'est pas spécifiée, elle devra être choisie par l'utilisateur. Les propriétés de l'algorithme seront étudiées par le biais de quelques théorèmes.

Introduisons d'abord la notation suivante:

pour chaque paire de fonctions  $V_1, V_2$  dans  $B_1$ , on pose

$$\Delta(V_1, V_2) \equiv \max(0, \sup_{x \in X} (V_1 - V_2)(x)) \quad (3.5)$$

Pour démontrer le prochain théorème, nous aurons besoin du lemme 3.1. Il y a une certaine relation entre ce lemme, la proposition 4.6 de Bertsekas et Shreve (1978) et le théorème 1 de Porteus (1971). Mais

Les hypothèses apparaissant dans ces trois énoncés sont différentes. Nous n'avons pas affaire, ici, à un "processus de décision séquentiel actualisé" au sens de Porteus, tandis que l'hypothèse C de Bertsekas et Shreve (1978, p. 52) n'est pas vérifiée.

### Lemme 3.1

a) Soient  $\underline{V} \leq \bar{V}$  deux éléments de  $\mathbb{B}_0 \cap \mathbb{B}_1$ ,  $\mathbb{B}_3 \equiv \{V \in \mathbb{B}_0 \cap \mathbb{B}_1 \mid \underline{V} \leq V \leq \bar{V}\}$ , un opérateur  $\phi : \mathbb{B}_3 \rightarrow \mathbb{B}_3$  et  $\alpha$  dans  $[0, 1)$  tels que pour chaque paire  $V_2 \geq V_1$  dans  $\mathbb{B}_3$ , on a

$$0 \leq \phi(V_2) - \phi(V_1) \leq \alpha \|V_2 - V_1\|. \quad (3.6)$$

Alors, il existe  $\tilde{V}$  dans  $\mathbb{B}_3$  tel que pour chaque  $V$  dans  $\mathbb{B}_3$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(V) = \tilde{V} \quad (3.7)$$

et

$$\frac{-\alpha}{1-\alpha} \Delta(V, \phi(V)) \leq \tilde{V} - \phi(V) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(\phi(V), V). \quad (3.8)$$

### Preuve

a) Montrons d'abord que  $\phi$  est contractant sur  $\mathbb{B}_3$ . Soient  $V_1, V_2$  dans  $\mathbb{B}_3$ . Pour chaque  $x$  dans  $X$ , posons  $V_3(x) \equiv \max(V_1(x), V_2(x))$ .  $V_3$  est dans  $\mathbb{B}_3$ , et par (3.6),

$$\phi(V_1) - \phi(V_2) \leq \phi(V_3) - \phi(V_2) \leq \alpha \|V_3 - V_2\| \leq \alpha \|V_1 - V_2\|.$$

Comme on peut inverser  $V_1$  et  $V_2$ , on obtient

$$\|\phi(V_1) - \phi(V_2)\| \leq \alpha \|V_1 - V_2\|. \quad (3.9)$$

Puisque  $\mathbb{B}_3$  est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach  $\mathbb{B}_0$ , le théorème du point fixe de l'appendice B nous assure donc qu'il existe  $\tilde{V}$  dans  $\mathbb{B}_3$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(V) = \tilde{V} \quad \forall V \in \mathbb{B}_3.$$

Soit  $V$  dans  $\mathbb{B}_3$  et soit  $\gamma_1$  dans  $\mathbb{B}_1$ , définie par

$$\gamma_1(x) \equiv \min(\bar{V}(x) - V(x), \Delta(\phi(V), V)) \geq 0.$$

On a  $\phi(V) - V \leq \bar{V} - V$  puisque  $\phi(V)$  est dans  $\mathbb{B}_3$  et  $\phi(V) - V \leq \Delta(\phi(V) - V)$  par définition de  $\Delta$ . Ainsi,  $\phi(V) - V \leq \gamma_1$  et puisque  $\gamma_1 \leq \bar{V} - V$ , on obtient

$$\phi(V) \leq V + \gamma_1 \in \mathbb{B}_3. \quad (3.10)$$

A noter que nous avons dû introduire la fonction  $\gamma_1$  parce que rien ne nous assure que  $V + \Delta(\phi(V), V)$  soit dans  $\mathbb{B}_3$ , de sorte que nous ne pouvons pas utiliser directement une preuve comme celle du lemme 5 de Portens (1971).

En utilisant (3.10) et (3.6), on obtient:

$$\begin{aligned} \phi^2(V) &\equiv \phi(\phi(V)) \leq \phi(V + \gamma_1) \\ &\leq \phi(V) + \alpha \|\gamma_1\| \\ &\leq V + (1 + \alpha) \|\gamma_1\|. \end{aligned}$$



Montrons par récurrence que pour chaque  $n$  dans  $\mathbb{N}$

$$\phi^{n+1}(V) \leq \phi(V) + \left( \sum_{i=1}^n \alpha^i \right) \|\gamma_1\| \leq V + \left( \sum_{i=0}^n \alpha^i \right) \|\gamma_1\|. \quad (3.11)$$

Nous venons de le vérifier pour  $n=1$ . En supposant que

$$\phi^n(V) \leq V + \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \right) \|\gamma_1\|, \text{ soit } \gamma_n \text{ dans } \mathbb{B}_1 \text{ défini par}$$

$$\gamma_n(x) \equiv \min ((\bar{V}-V)(x), \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \right) \|\gamma_1\|) \geq 0.$$

Puisque  $\phi^n(V)$  est dans  $\mathbb{B}_3$ , on a  $\phi^n(V) - V \leq \bar{V} - V$ . Ainsi,  $\phi^n(V) - V \leq \gamma_n$ , et puisque  $V + \gamma_n \leq \bar{V}$ , on a

$$\phi^n(V) \leq V + \gamma_n \in \mathbb{B}_3.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \phi^{n+1}(V) &= \phi(\phi^n(V)) \leq \phi(V + \gamma_n) \\ &\leq \phi(V) + \alpha \|\gamma_n\| \\ &\leq \phi(V) + \left( \sum_{i=1}^n \alpha^i \right) \|\gamma_1\| \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &\leq V + \gamma_1 + \left( \sum_{i=1}^n \alpha^i \right) \|\gamma_1\| \\ &\leq V + \left( \sum_{i=0}^n \alpha^i \right) \|\gamma_1\| \end{aligned} \quad (3.13)$$

ce qui démontre (3.11). En prenant la limite dans (3.12) on obtient

$$\tilde{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{n+1}(V) \leq \phi(V) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(\phi(V), V).$$

On montre de façon similaire que

$$\tilde{V} \geq \phi(V) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(V, \phi(V))$$

d'où l'on obtient (3.8).

THEOREME 3.2 (C,I)

Soient  $\alpha_1 \in (0,1)$  et  $n_0$  vérifiant (2.35) dans le cas du modèle I;  $\alpha_1$  satisfaisant (2.12) et  $n_0 = 1$  dans le cas du modèle C. Soient  $V$  et  $V_1$  dans  $\mathbb{B}_2$ ,  $\delta^+$  et  $\delta^-$  dans  $\mathbb{R}_+$  tels que

$$-\delta^- \leq T(V) - V_1 \leq \delta^+ \quad (3.14)$$

et posons

$$\varepsilon^+ \equiv n_0 \delta^+ + (n_0 - 1) \Delta(V_1, V) \quad (3.15)$$

$$\varepsilon^- \equiv n_0 \delta^- + (n_0 - 1) \Delta(V, V_1) \quad (3.16)$$

Alors:

$$a) \quad V_* \begin{cases} \geq V_1 - \varepsilon^- - \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V, V_1 - \varepsilon^-) \\ \leq V_1 + \varepsilon^+ + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V_1 + \varepsilon^+, V) \end{cases} \quad (3.17)$$

b) Pour chaque  $\varepsilon_0 > 0$ , on peut choisir  $\mu$  dans  $U_{NA}$  tel que

$$T_\mu(V) \leq V_1 + \varepsilon_0. \quad (3.18)$$

S'il existe  $\alpha$  dans  $[0,1)$  tel que

$$T_{\mu}(V_3) - T_{\mu}(V_2) \leq \alpha \|V_3 - V_2\| \quad (3.19)$$

pour chaque paire  $V_3 \geq V_2$  dans  $B_0 \cap B_1$ , alors

$$\begin{aligned} V_{*} &\leq V_{\mu} \\ &\leq V_{*} + \varepsilon^{-} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V, V_1 - \varepsilon^{-}) + \varepsilon_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(V_1 + \varepsilon_0, V). \end{aligned} \quad (3.20)$$

### Preuve

a) Par induction sur  $n_0$ , montrons que

$$-\varepsilon^{-} \leq T^{n_0}(V) - V_1 \leq \varepsilon^{+}. \quad (3.21)$$

Pour  $n_0=1$ , il suffit d'examiner les définitions pour se convaincre du résultat. En supposant qu'il est vrai pour  $n_0=n-1 \geq 1$ , montrons qu'il est vrai pour  $n_0=n$ . On a

$$\begin{aligned} T^n(V) - V_1 &\leq T^n(V) - T^{n-1}(V) + T^{n-1}(V) - V_1 \\ &\leq (T^n(T(V)) - T^n(V)) + (n-1)\delta^{+} + (n-2)\Delta(V_1, V) \\ &\leq \Delta(T(V), V) + (n-1)\delta^{+} + (n-2)\Delta(V_1, V) \\ &\leq \Delta(T(V), V_1) + \Delta(V_1, V) + (n-1)\delta^{+} + (n-2)\Delta(V_1, V) \\ &\leq n\delta^{+} + (n-1)\Delta(V_1, V) = \varepsilon^{+}. \end{aligned}$$

L'autre inégalité se démontre de façon similaire.

Par ailleurs, si  $V_2 \geq V_1$  sont deux fonctions de  $B_2$ , on a par les propositions 2.5 et 2.9:

$$0 \leq T^{n_0}(V_2) - T^{n_0}(V_1) \leq \alpha_1 \|V_2 - V_1\| \quad (3.22)$$

Le lemme 3.1 s'applique donc (avec  $B_3 \equiv B_2$ ,  $\phi \equiv T^{n_0}$  et  $\tilde{V} = V_*$ ), d'où l'on obtient

$$V_* \left\{ \begin{array}{l} \geq T^{n_0}(V) - \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V, T^{n_0}(V)) \\ \leq T^{n_0}(V) + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(T^{n_0}(V), V) . \end{array} \right. \quad (3.23)$$

En utilisant (3.21) dans (3.23), on obtient facilement (3.17)

b) Le premier énoncé découle de la proposition A.7. Dans (3.20), la première inégalité est triviale, par la définition de  $V_*$ . Reste à démontrer la seconde. Par A.1 et A.6 de l'appendice A, on voit d'abord que  $T_\mu(V) \in B_1$  pour chaque  $V$  dans  $B_1$ . Dans le cas du modèle C, on a aussi  $T_\mu: B_2 \rightarrow B_2$ . Dans le cas du modèle I, posons  $\underline{V} \equiv K_1 + \min(0, K_2)$ ,  $\bar{V} = \frac{g_1 + (1+\alpha)\|\underline{V}\|}{1-\alpha}$  et  $B_3$  tel que défini au lemme 3.1. Pour chaque  $V$  dans  $B_3$ , on a  $T_\mu(V) \geq T_\mu(\underline{V}) \geq T(\underline{V}) \geq \underline{V}$  et en utilisant (3.19), (2.8-2.9) et (2.23-2.24),

$$\begin{aligned} T_\mu(V) &= T_\mu(\underline{V}) + T_\mu(V) - T_\mu(\underline{V}) \\ &\leq g_1 + \|\underline{V}\| + \alpha\|V - \underline{V}\| \\ &\leq g_1 + \|\underline{V}\| + \alpha(\|\bar{V}\| + \|\underline{V}\|) \\ &\leq (g_1 + (1+\alpha)\|\underline{V}\|) \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = \bar{V} . \end{aligned}$$

On a donc  $T_\mu : B_3 \rightarrow B_3$ . Dans les deux cas, on peut appliquer le lemme 3.1 ( $B_3 \equiv B_2$  dans le cas du modèle C et  $B_3$  tel que nous venons de le définir dans le cas du modèle I,  $\phi \equiv T_\mu$  et  $\tilde{V} \equiv \tilde{V}_\mu$ ). De plus, on peut montrer que  $\tilde{V}_\mu = V_\mu$  de la même façon que dans la preuve de la proposition 2.11. On obtient donc, puisque  $V$  est dans  $B_2$  qui est sous-ensemble de  $B_3$ ,

$$V_\mu \leq T_\mu(V) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(T_\mu(V), V) . \quad (3.24)$$

En utilisant (3.18) dans (3.24), on a

$$V_\mu \leq V_1 + \varepsilon_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(V_1 + \varepsilon_0, V)$$

et par la première inégalité de (3.17), on obtient la deuxième inégalité de (3.20). □

Le prochain théorème est de MacQueen (1967) et permet parfois d'éliminer des actions non optimales.

### THEOREME 3.3 (C,I)

Si  $\underline{V}$  et  $\bar{V}$  sont dans  $B_2$ ,  $\underline{V} \leq V_* \leq \bar{V}$ ,  $x \in X$  et  $H(\underline{V})(x, a) > \bar{V}(x)$ , alors  $a \notin A_*(x)$ .

#### Preuve

$$H(\underline{V})(x, a) > \bar{V}(x) \Rightarrow H(V_*)(x, a) > V_*(x) \Rightarrow a \notin A_*(x). \quad \square$$

Les théorèmes 3.2 et 3.3 suggèrent l'algorithme qui suit. Plus loin, les théorèmes 3.4 et 3.5 donneront des conditions suffisantes a) pour que l'algorithme génère une suite de fonctions de  $B_2$  qui converge uniformément vers  $V_*$  et b) pour que l'algorithme fournisse une politique  $\varepsilon$ -optimale en un nombre fini d'itérations. Quelques remarques suivront.

ALGORITHME (C,I)

1. Calculer  $\alpha_1$  et  $n_0$  satisfaisant les hypothèses du théorème 3.2.  
Poser  $B_3 := B_2$ . Fixer un nombre maximum d'itérations et choisir  $\varepsilon > 0$ .  
Choisir  $V$  dans  $B_3$  comme première approximation de  $V_*$ .
2. Evaluer  $T(V)$  en un nombre fini de points.  
Choisir  $V_1$  dans  $B_3$ , une approximation de  $T(V)$ . On pourra, si désiré, répéter cette étape plusieurs fois, en posant  $V := V_1$  avant chaque répétition.
3. Obtenir  $\delta^- \geq 0$  et  $\delta^+ \geq 0$  tels que

$$-\delta^- \leq T(V) - V_1 \leq \delta^+ \quad (3.25)$$

et calculer  $\varepsilon^-$  et  $\varepsilon^+$  selon (3.15-3.16).

Les inégalités (3.17) permettent de déterminer des bornes pour  $V_*$ .

Critère d'arrêt 1: On peut décider de s'arrêter lorsque l'écart entre ces bornes est suffisamment petit (inférieur à un seuil fixé au départ, par exemple). On aura alors calculé  $V_*$  avec la précision

désirée. Par contre, si l'on veut être certain d'avoir obtenu une politique  $\epsilon$ -optimale, on devra satisfaire le critère d'arrêt 2.

4. Choisir une politique  $\mu$  dans  $U_{NA}$  et obtenir  $\epsilon_0 \geq 0$  tel que

$$T_\mu(V) \leq V_1 + \epsilon_0. \quad (3.26)$$

S'il existe  $\alpha$  dans  $[0,1)$  tel que

$$T_\mu(V_3) - T_\mu(V_2) \leq \alpha \|V_3 - V_2\| \quad (3.27)$$

pour chaque paire  $V_3 \geq V_2$  dans  $B_0 \cap B_1$  et si

$$\epsilon^- + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V, V_1 - \epsilon^-) + \epsilon_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(V_1 + \epsilon_0, V) \leq \epsilon, \quad (3.28)$$

alors  $\mu$  est une politique  $\epsilon$ -optimale.

Critère d'arrêt 2: On s'arrête lorsqu'on a obtenu une politique  $\epsilon$ -optimale.

5. Critère d'arrêt 3: Si le nombre maximum d'itérations est atteint, on s'arrête.

6. Poser 
$$\underline{V} := V_1 - \epsilon^- - \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V, V_1 - \epsilon^-) \quad (3.29)$$

$$\bar{V} := V_1 + \epsilon^+ + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V_1 + \epsilon^+, V) \quad (3.30)$$

$$B_3 := \{V \in B_3 \mid \underline{V} \leq V \leq \bar{V}\} \quad (3.31)$$

$$V := V_1 \quad (3.32)$$

7. Rajustement de l'ensemble  $\Gamma$  (étape facultative).

Chaque  $(x,a)$  dans  $\Gamma$  tel que  $H(\underline{V})(x,a) > \bar{V}(x)$  peut être éliminé de  $\Gamma$ , puisque par le théorème 3.3,  $a \notin A_*(x)$ . On peut souvent réduire ainsi de façon appréciable l'ensemble  $\Gamma$ .

8. Reformulation du modèle (étape facultative).

Si  $\Gamma$  a été réduit à l'étape précédente, reformuler le modèle et choisir de nouvelles valeurs de  $\alpha_1$  et  $n_0$  satisfaisant les hypothèses du théorème 3.2

9. Retourner à l'étape 2. □

THEOREME 3.4 (C,I)

Soient  $V_0$  dans  $B_2$  et  $\{(\delta_n^-, \delta_n^+, V_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times B_2, n \in \mathbb{N}\}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^+ = 0$  et telle que

$$-\delta_n^- \leq T(V_{n-1}) - V_n \leq \delta_n^+ \text{ pour chaque } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - V_*\| = 0$ .

Preuve

Soit  $\varepsilon > 0$ . On peut choisir  $i$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $(\alpha_1)^i < \frac{\varepsilon}{2\|\bar{V} - \underline{V}\|}$  où  $\underline{V}$  et  $\bar{V}$  sont les frontières de  $B_2$ ,

puis  $k > i$  tel que  $\max(\delta_j^-, \delta_j^+) < \frac{(1-\alpha_1)\varepsilon}{2n_0} \quad \forall j \geq n_0(k-i)$ .

Pour chaque  $n$  supérieur à  $n_0 k$ , on obtient alors, en utilisant (2.18, 2.36, 2.8-2.10 et 2.24),



$$\begin{aligned}
\|V_n - V_*\| &\leq \|V_* - T^{i n_0}(V_{n-i n_0})\| + \|T^{i n_0}(V_{n-i n_0}) - V_n\| \\
&\leq \|T^{i n_0}(V_*) - T^{i n_0}(V_{n-i n_0})\| + \sum_{j=1}^i \|T^{j n_0}(V_{n-j n_0}) - T^{(j-1) n_0}(V_{n-(j-1) n_0})\| \\
&\leq (\alpha_1)^i \|V_* - V_{n-i n_0}\| + \sum_{j=1}^i (\alpha_1)^{j-1} \|T^{n_0}(V_{n-j n_0}) - V_{n-(j-1) n_0}\| \\
&\leq (\alpha_1)^i \|\bar{V} - V\| + \sum_{j=1}^i (\alpha_1)^{j-1} \sum_{r=1}^{n_0} \|T^r(V_{n-(j-1) n_0+r}) - T^{r-1}(V_{n-(j-1) n_0+r-1})\| \\
&< \varepsilon/2 + \frac{1}{1-\alpha_1} n_0 \frac{(1-\alpha_1)\varepsilon}{2n_0} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Donc, pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $k$  tel que pour chaque  $n$  supérieur à  $n_0 k$ , on a  $\|V_n - V_*\| < \varepsilon$ .  $\square$

### THEOREME 3.5 (C)

Pour le modèle C, si la suite des valeurs de  $\delta^-$  et la suite des valeurs de  $\delta^+$  obtenues dans l'algorithme tendent toutes deux vers 0, et si  $\varepsilon_0/(1-\alpha_1) < \varepsilon$ , alors une politique  $\varepsilon$ -optimale est obtenue en un nombre fini d'itérations.

#### Preuve

Par le théorème précédent, la suite des valeurs de  $\|V - V_*\|$  tend vers 0, ainsi que la suite des valeurs de  $\|T(V) - V\|$  (car  $\|T(V) - V\| \leq \|T(V) - V_*\| + \|V_* - V\| \leq 2\|V - V_*\|$ ). De même pour la suite des valeurs de  $\|V_1 - V\|$ , car

$\|V_1 - V\| \leq \|T(V) - V\| + \|T(V) - V_1\| \leq \|T(V) - V\| + \max(\delta^-, \delta^+)$ . Donc, puisque  $|\Delta(V, V_1)|$  et  $|\Delta(V_1, V)|$  sont bornés par  $\|V_1 - V\|$ , les valeurs de  $\varepsilon^-$  et de  $\varepsilon^+$  tendent aussi vers 0. L'expression de gauche dans (3.28) est inférieure ou égale (en prenant  $\alpha = \alpha_1$ ) à

$$\varepsilon^- + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}(\Delta(V, V_1) + \varepsilon^-) + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V_1, V) + \frac{\varepsilon_0}{1-\alpha_1} \quad (3.34)$$

Le dernier terme de (3.34) est strictement inférieur à  $\varepsilon$  et la suite des valeurs des autres termes tend vers 0. Cette expression deviendra donc, à une certaine itération, inférieure à  $\varepsilon$ .  $\square$

#### REMARQUES

Cet algorithme possède beaucoup de flexibilité.

La méthode d'approximation de  $T(V)$  à l'étape 2 n'est pas spécifiée.

On pourra utiliser à cet effet l'une ou l'autre des méthodes dont nous avons parlé au paragraphe 3.2. On peut aussi changer de méthode d'une itération à l'autre.

L'obtention de  $\delta^-$  et  $\delta^+$  à l'étape 3 est habituellement l'un des points les plus difficiles. Des valeurs finies de  $\delta^-$  et  $\delta^+$  existent toujours: au pire, on peut prendre l'écart entre les bornes de  $\mathbb{B}_3$ . Mais on s'attendra en général à mieux.

Dans certains cas (nous en reparlerons au chapitre 5), il est possible de démontrer que  $V_*$  est monotone et qu'on peut se restreindre, à chaque itération de l'algorithme, aux fonctions de  $\mathbb{B}_3$  qui sont monotones. Si c'est le cas, et si c'est aussi possible de calculer  $T(V)$  ponctuellement

de façon assez précise (avec une erreur inférieure à  $\varepsilon_1$ , par exemple), on pourra généralement obtenir de meilleures valeurs pour  $\delta^-$  et  $\delta^+$ .

Par exemple, si  $X$  est l'intervalle réel  $[a, b]$ , on peut calculer la valeur de  $T(V)$  en  $n$  points  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , choisir la fonction  $V_1$  définie sur  $[a, b]$  par

$$V_1(x) = \begin{cases} T(V)(x) & \text{si } x = x_i \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{T(V)(x_{i+1}) + T(V)(x_i)}{2} & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \end{cases}$$

et poser

$$\delta^- = \delta^+ = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left| \frac{T(V)(x_{i+1}) - T(V)(x_i)}{2} \right| + \varepsilon_1 .$$

Cette approche se généralise naturellement au cas où  $X$  est un hyper-rectangle borné dans  $\mathbb{R}^m$ . Il existe aussi d'autres situations où il est possible, en utilisant différentes astuces, de calculer des valeurs raisonnables pour  $\delta^-$  et  $\delta^+$ .

Par contre, dans plusieurs situations, les meilleures valeurs que l'on puisse obtenir sont beaucoup plus grandes que l'erreur réelle d'approximation. On sera tenté, parfois, d'utiliser certaines heuristiques afin d'obtenir non pas de véritables bornes, mais une "estimation raisonnable" de l'erreur qu'on a pu faire en approximant  $T(V)$  par  $V_1$ . Par exemple, une fois l'approximation effectuée, on peut réévaluer  $T(V)$  en un certain nombre de points intermédiaires et calculer l'erreur réelle d'approximation  $T(V) - V_1$  en chacun de ces points. Si ces points sont assez nombreux, choisis de façon raisonnable, et si le comportement de  $T(V) - V_1$  n'est pas trop

"bizarre", on devrait obtenir ainsi, en prenant la plus petite et la plus grande de ces erreurs, des valeurs assez proches de  $\delta^-$  et  $\delta^+$ .

La plupart du temps, la méthode utilisée pour approximer  $T(V)$  est convergente, du moins lorsque  $T(V)$  est continue (c.à-d. si l'erreur dans l'évaluation ponctuelle de  $T(V)$  est négligeable et si le nombre de points d'évaluation tend vers l'infini, alors l'erreur maximum d'approximation tend vers 0), et en vertu du théorème 3.4 cela devrait à tout le moins nous rassurer. En effet, s'il est possible, à chaque itération, d'approximer  $T(V)$  aussi finement que désiré, on peut calculer  $V_*$  avec autant de précision qu'on veut.

En pratique, quand la fonction  $V_1$  ne change à peu près plus lorsqu'on raffine le maillage des points d'évaluation, cela indique en général que  $T(V)-V_1$  est assez près de zéro et c'est rassurant.

En ce qui concerne le calcul des valeurs  $\Delta(\cdot, \cdot)$ , si l'espace d'états est continu, il faudra parfois se contenter d'évaluer le supremum en se basant sur un nombre fini de points. Mais pas toujours. Dans bien des cas, les fonctions  $V$  et  $V_1$  seront connues par leurs expressions algébriques et il sera possible de calculer les quantités  $\Delta(\cdot, \cdot)$  de façon très précise.

Pour ce qui est de l'évaluation de  $\varepsilon_0$ , on peut faire le même genre de remarque que pour  $\delta^-$  et  $\delta^+$ . Là aussi, on devra bien souvent se contenter "d'estimations" heuristiques et, bien qu'ayant "toutes les raisons de croire" que la politique obtenue sera  $\varepsilon$ -optimale, nous n'en aurons pas, dans un tel cas, l'assurance absolue.

Dans le cas du modèle C, s'il est possible d'approximer  $T(V)$  aussi finement que désiré et de choisir  $\mu$  tel que  $T_\mu(V) - T(V)$  soit aussi petit que désiré, alors, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , on peut obtenir une politique  $\varepsilon$ -optimale.

Théoriquement, il peut arriver dans le cas du modèle I qu'aucun  $\alpha$  inférieur à 1 ne satisfasse (3.27). Dans ce cas, aucune borne sur  $V_\mu - V_*$  n'est disponible.

Le rajustement de l'ensemble  $\Gamma$  à l'étape 7 a pour objet de faciliter le calcul ultérieur de  $T(V)$  et, éventuellement, de permettre une reformulation du modèle à l'étape 8. Cette reformulation pourra même nous faire passer, dans certains cas, d'un modèle I à un modèle C, améliorant les bornes considérablement.

Des exemples numériques illustrant l'utilisation de cet algorithme seront présentés aux chapitres 6 à 8.



CHAPITRE 4  
PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT MARKOVIEU COMMANDE,  
AVEC ACTUALISATION.

4.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre un modèle général de PRMC (Processus de Renouvellement Markovien Commandé) avec actualisation. Ce modèle est un cas particulier du modèle de PDMED présenté au chapitre 2.

Les PRMC furent introduits plus ou moins simultanément par Jewell (1963), Howard (1963 et 1964), Schweitzer (1963) et de Cani (1964). Denardo (1967, exemple 4) et Ross (1970, chap. 7) ont montré comment, sous certaines hypothèses de contraction, on pouvait obtenir une stratégie optimale ou  $\varepsilon$ -optimale pour un PRMC. Ces auteurs se sont toutefois limités à des espaces d'états et d'actions finis.

Le modèle présenté ici généralise tous les modèles de PRMC avec actualisation proposés par les auteurs précédents. Les espaces d'états et d'actions Boréliens sont admis. De plus, la version I du modèle, qui ne satisfait pas aux hypothèses de contraction habituelles, peut admettre des stratégies qui provoquent avec probabilité un des sauts superposés, i.e. qui ont tous lieu au même instant.

## 4.2 Définition d'un PRMC

Un PRMC avec actualisation est défini à l'aide d'une structure  $(S, A, \Gamma, Q, g, \rho)$ .  $S$  et  $A$  sont deux espaces boréliens appelés respectivement espace d'états et espace d'actions. On pose  $X \equiv \mathbb{R}_+ \times S$ .  $\Gamma$  est un sous-ensemble analytique de  $X \times A$  tel que  $\forall x \in X$ , la coupe  $A(x) \equiv \Gamma_x \equiv \{a \in A \mid (x, a) \in \Gamma\}$  est non vide.  $Q$  est un noyau stochastique borel-mesurable sur  $X \mid X \times A$ ,  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction semi-analytique inférieurement et  $Q > 0$  est le taux d'actualisation.

Ce modèle correspond à un système qui évolue comme suit. A l'instant initial  $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$ , le système se trouve dans un état initial  $s_0 \in S$  et une action  $a_0 \in A(\tau_0, s_0)$  est choisie. De même, pour chaque  $n$  dans  $\mathbb{N}_0$ , le système se trouve, à l'instant  $\tau_n \in \mathbb{R}_+$ , dans un certain état  $s_n \in S$ . Après avoir observé  $(\tau_0, s_0, a_0, \dots, a_{n-1}, \tau_n, s_n)$ , un preneur de décision choisit une action  $a_n \in A(\tau_n, s_n)$  et un coût  $g(\tau_n, s_n, a_n)$  est encouru à l'instant  $\tau_n$ . Un couple  $(\zeta, s) \in \mathbb{R}_+ \times S$  est ensuite généré aléatoirement selon la mesure  $Q(\cdot \mid \tau_n, s_n, a_n)$ . On pose  $s_{n+1} = s$  et  $\tau_{n+1} = \tau_n + \zeta$ .  $\tau_n$  est appelé l'instant du  $n$ -ième saut.

Les coûts sont actualisés au taux  $\rho$  et on cherche une stratégie permettant de minimiser le coût espéré total, actualisé à l'instant  $\tau_0$  (un coût encouru à l'instant  $\tau_n$  est actualisé à l'instant  $\tau_0$  à l'aide du facteur  $e^{-\rho(\tau_n - \tau_0)}$ ). Pour chaque  $(\tau, s) \in \mathbb{R}_+ \times S$ , posons

$$\beta(\tau, s) \equiv e^{-\rho\tau}. \quad (4.1)$$



Cela définit une fonction  $\mathcal{B}$ -mesurable  $\beta: X \rightarrow (0,1]$  et on obtient la structure  $(X, \mathcal{A}, \Gamma, Q, g, \beta)$ . Si la condition  $\Delta$  du chapitre 2 est satisfaite, cette structure définit un modèle de PDMED et on dit alors que la structure  $(S, \mathcal{A}, \Gamma, Q, g, \rho)$  définit un modèle de PRMC.

Pour étudier les PRMC, nous allons utiliser la théorie développée aux chapitres 2 et 3. La même notation sera réutilisée, sauf que le terme "espace d'état" désignera ici  $S$  plutôt que  $X$ .

Par ailleurs, pour  $\zeta \in \mathbb{R}_+$ ,  $Q(\zeta|\cdot)$  désignera  $Q([0, \zeta] \times S|\cdot)$ .

Un PRMC pour lequel les délais entre les sauts sont tous non nuls avec probabilité 1 est aussi appelé un PDSM (Processus de Décision Semi-Markovien). Si les sauts ont lieu à intervalles réguliers, on obtient un PDMTD (Processus de Décision Markovien en Temps Discret) tel que celui présenté à l'exemple 2.1.

#### 4.3 Les versions C et I du modèle de PRMC

Pour chaque  $(x, a)$  dans  $\Gamma$ , on a

$$\alpha(x, a) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\rho \zeta} Q(d\zeta, S|x, a) \quad (4.2)$$

S'il existe  $\alpha_1 \in (0,1)$ ,  $g_0 \leq 0$  et  $g_1 \geq 0$  tels que

$$\alpha(x, a) \leq \alpha_1 \quad (4.3)$$

$$g_0 \leq g(x, a) \leq g_1 \quad (4.4)$$

$\forall (x, a) \in \Gamma$ , on obtient la version C du modèle. Nous avons déjà introduit cette version à l'exemple 2.2.

D'autre part, s'il existe  $\tilde{\mu}$  dans  $U_{NA}$ ,  $g_1$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $\delta_1$ ,  $K_1$  et  $K_2$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$\alpha(x, \tilde{\mu}(x)) \leq \delta_1 < 1 \quad \forall x \in X \quad (4.5)$$

$$K_1 + K_2 > 0 \quad (4.6)$$

$$K_1 + K_2 \alpha(x, a) \leq g(x, a) \quad \forall (x, a) \in \Gamma \quad (4.7)$$

$$g(x, \tilde{\mu}(x)) \leq g_1 \quad \forall x \in X \quad (4.8)$$

on obtient la version I.

Ces deux versions sont bien des modèles de PRMC, puisque par les lemmes 2.4 et 2.6, les structures de PDMED correspondantes satisfont la condition  $\Delta$ . Donc, les propositions 2.5 à 2.14 s'appliquent.

#### 4.4 Modèle homogène

Si  $A(\tau, s)$ ,  $Q(\cdot | \tau, s, a)$  et  $g(\tau, s, a)$  sont indépendants de  $\tau$  pour chaque  $(s, a)$  dans  $\text{proj}_{S \times A}(\Gamma)$ , le modèle de PRMC (version C ou I) est dit homogène. Si tel est le cas et si  $V \in \mathbb{B}_2$  est telle que  $V(\tau, s)$  ne dépend pas de  $\tau$ , alors  $H(V)(\tau, s, a)$  et  $T(V)(\tau, s)$  sont aussi indépendants de  $\tau$ . Ainsi,  $V_*(\tau, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V)(\tau, s)$  ne dépend pas de  $\tau$ .

On peut donc, si le modèle est homogène se limiter aux fonctions de  $\mathbb{B}$  qui sont constantes en  $\tau$ . En d'autres mots, il devient inutile que  $\tau$  fasse partie de l'état. On peut l'éliminer et cela revient à redéfinir  $X$  et  $\mathbb{B}$  par:  $X \equiv S$  et  $\mathbb{B} \equiv \{V: S \rightarrow \mathbb{R}^*\}$ .  $\mathbb{B}_U$ ,  $\mathbb{B}_2$ ,  $A(\cdot)$ ,  $g$  et  $\Gamma$  sont aussi redéfinies en conséquence et  $Q$  devient un noyau stochastique sur  $\mathbb{R}_+ \times S | S \times A$ .

Pour chaque  $V$  dans  $B_U$ , on obtient

$$H(V)(s,a) = g(s,a) + \int_{R_+ \times S} e^{-\rho \tau} V(s') Q(d\tau, ds' | s, a) \quad (4.9)$$

$V(s,a) \in \Gamma$  et

$$T(V)(s) = \inf_{a \in A(s)} H(V)(s,a) \quad (4.10)$$

$\forall s \in S$ .

L'espace "d'états" se trouvant réduit, il devient plus facile d'approximer les fonctions de  $B_2$  et d'implanter l'algorithme du chapitre 3. De plus, on peut se limiter aux politiques  $\mu$  telles que  $\mu(\tau, s)$  n'est fonction que de  $s$ .

#### 4.5 Horizon fini

Dans le modèle de PRMC que nous venons de décrire, l'horizon est supposé infini.

Pour le modèle C, le cas d'un horizon fini  $T$  se ramène facilement au cas d'un horizon infini. Il suffit, en effet, de poser

$$g(\tau, s, a) = 0 \quad \forall \tau \geq T. \quad (4.11)$$

On peut alors se limiter aux fonctions  $V$  dans  $B_2$  telles que  $V(\tau, s) = 0$   $\forall \tau \geq T$ , ce qui équivaut à ne considérer que des fonctions  $V: [0, T) \times S \rightarrow \mathbb{R}^*$ .

Le modèle I présente quant à lui quelques difficultés puisqu'en posant (4.11), on contredit généralement la condition (4.7). Si on

remplace (4.7) par la condition moins restrictive suivante:

$$K_1 + K_2 \alpha(\tau, s, a) \leq g(\tau, s, a) \quad \forall (\tau, s, a) \in \Gamma \text{ tel que } \tau < T. \quad (4.12)$$

la condition (2.22) n'est plus satisfaite. On peut cependant refaire facilement les preuves du lemme 2.6 et des propositions 2.8 à 2.14. En fait, il suffit d'apporter quelques modifications mineures aux preuves déjà données au chapitre 2, après avoir redéfini  $B_2$  par

$$B_2 \equiv \{V \in B_1 \mid K_1 + \min(0, K_2) \leq V(\tau, s) \leq \frac{g_1}{1 - \delta_1} \text{ pour } \tau < T \\ \text{et } V(\tau, s) = 0 \text{ pour } \tau \geq T\}.$$

Ces modifications sont données à l'appendice C. Ainsi, toutes les propriétés démontrées pour le modèle I demeurent valides lorsque (4.7) est remplacée par (4.11) et (4.12). Notons qu'on peut aussi redéfinir, dans ce cas,

$$\alpha(x, a) = \int_{[0, T)} e^{-\rho x} Q(dx, S \mid x, a) \quad (4.13)$$

et le tout demeure valide.

Par ailleurs, si l'horizon est fini, on peut aussi considérer un modèle sans actualisation, i.e. pour lequel  $\rho=0$ . On peut alors se ramener au modèle que nous avons traité en remplaçant  $\rho=0$  par  $\tilde{\rho} > 0$  quelconque et  $g$  par  $\tilde{g}$  telle que

$$\tilde{g}(\tau, s, a) = e^{\tilde{\rho}\tau} g(\tau, s, a). \quad (4.14)$$

Pour  $\tau_0 = 0$ , le nouveau modèle ainsi défini est équivalent au modèle original, en ce sens que pour chaque  $s_0$  dans  $S$ ,  $V_\mu(0, s_0)$  a la même valeur dans les deux cas pour chaque  $\mu \in U$ , et  $V_*(0, s_0)$  et l'ensemble des politiques optimales à  $(0, s_0)$  sont identiques dans les deux cas.

#### 4.6 Coût espéré moyen par unité de temps

Comme critère d'optimisation, nous avons choisi le coût espéré total actualisé. Un autre critère fréquemment utilisé est le coût espéré moyen par unité de temps. Il apparaît d'ailleurs dans les articles originaux de Howard (1963), Jewell (1963) et de Cani (1964). Il est à noter, toutefois, que différentes formulations mathématiques de ce critère, en apparence équivalentes, peuvent donner lieu à des solutions tout à fait différentes (voir Flynn (1980) et les références citées).

Le modèle présenté ici, doté d'un tel critère, pourrait faire objet de recherches futures. Afin de se rendre compte des difficultés particulières associées à ce critère pour un PDMTD ou un PRMC à espace d'états fini, le lecteur peut se référer à Flynn (1980), Fainberg (1980), Thomas (1979), Wijngaard (1978), Denardo et Rothblum (1979), Federgruen et al. (1978, 1979a et b, 1980) et les références qui y sont citées.

#### 4.7 Processus de saut commandé

Il est possible de généraliser la notion de PRMC afin de permettre que l'action choisie puisse changer non seulement aux instants des sauts, mais aussi entre ces instants. Plus généralement, la commande du processus peut se faire en temps continu.

Cette généralisation fut d'abord introduite par Chitgopekar (1969) pour le cas d'un PDSM à espaces d'états et d'actions finis. D'autres auteurs ont poursuivi dans cette voie en considérant des espaces d'états et d'actions boréliens, un horizon fini ou infini, un état partiellement observé, etc. Ils ont construit ce qu'on appelle la théorie des Processus de Sauts commandés (PSC).

Stone (1973), Pliska (1975), Varaiya (1975), Rishel (1975, 1976), Bismut (1975), Davis (1976), Boel et Varaiya (1977) et Yushkevich (1980) ont contribué à cette théorie. Tous ces auteurs ont cependant fait l'hypothèse d'un taux de saut borné uniformément, ce qui n'est pas le cas pour les modèles C et I. De plus, ils ont établi des conditions d'optimalité pour lesquelles des solutions explicites n'ont été obtenues que dans quelques cas particuliers (Glazebrook (1979)).

Nous n'allons pas traiter plus en détail le cas des PSC. Permettons nous seulement de mentionner qu'un PSC markovien peut se ramener à un PRMC. Il suffit en effet de considérer  $A$  comme un espace de fonctions de forme  $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \tilde{A}$ , où  $\tilde{A}$  est un ensemble "d'actions". Ainsi, le choix d'une action  $a \in A$  à un instant de saut correspond au choix d'une commande en temps continu, valide jusqu'à l'instant du prochain saut.

CHAPITRE 5  
FONCTIONS DE COUT MONOTONES ET  
POLITIQUES ISOTONES POUR DES PRMC

5.1 Introduction

Nous obtenons, dans ce chapitre, des conditions suffisantes sous lesquelles, pour chaque fonction  $V$  monotone dans  $\mathbb{B}_2$ ,  $T(V)$  est aussi monotone. Une telle propriété peut parfois faciliter l'approximation de  $T(V)$ .

Nous obtenons aussi des conditions suffisantes d'existence d'une politique optimale isotone {antitone} ainsi que des conditions suffisantes pour que l'algorithme de la programmation dynamique fournisse une suite de politiques non-aléatoires isotones {antitones} convergeant vers une politique optimale non-aléatoire isotone {antitone}. Une telle caractérisation peut faciliter l'obtention d'une politique optimale et même, dans certains cas, par des techniques beaucoup plus rapides que celle de la programmation dynamique (voir, par exemple, Nummelin (1980)). De plus, une politique isotone est généralement plus facile à implanter qu'une politique plus compliquée.

Nous introduisons ensuite la notion de "règle dichotomique à seuil", qui généralise la règle de type "control-limit" au cas où l'espace d'état

n'est que partiellement ordonné, et nous donnons des conditions suffisantes pour qu'il existe une politique optimale qui soit une règle dichotomique à seuil.

Tous les développements sont faits dans le cadre du modèle de PRMC présenté au chapitre 4.

Derman (1963) et Kolesar (1966) ont donné des conditions suffisantes d'existence d'une règle de type "control-limit" qui soit une politique optimale, pour un PDMD à espace d'états fini totalement ordonné et à espace d'actions  $A = \{0,1\}$ . Kao (1973) a fait de même pour un PDSM. Une politique de ce genre est définie par un état  $x_*$ . L'action 1 est choisie chaque fois que l'état du système est supérieur à  $x_*$  et l'action 0 est choisie dans le cas contraire.

Ross (1969) a généralisé cela au cas où l'espace d'états est un Borélien des réels non négatifs. Ces conditions suffisantes correspondent à exiger que

- a) le coût soit croissant et borné en fonction de l'état et de l'action choisie et
- b) la probabilité que la prochaine transition se fasse vers un état supérieur ou égal à  $x$  soit croissante en fonction de l'état présent, pour chaque élément  $x$  de l'espace d'états et quelle que soit l'action choisie.



Les conditions présentées au théorème 5.5 généralisent celles de Ross.

D'autres auteurs ont par ailleurs obtenu, pour différents cas particuliers de PDMTD, des conditions suffisantes d'existence d'une politique optimale isotone: White (1980) pour le cas où l'espace d'états est dénombrable et où les coûts sont tous négatifs; Albright et Winston (1979) pour le cas où l'espace d'états est fini et l'espace d'actions est une surface rectangulaire fermée dans  $\mathbb{R}^2$ ; et Serfozo (1976) pour un modèle de marche aléatoire commandée dont l'espace d'actions est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}$ .

Les conditions présentées par ces auteurs ne s'appliquent qu'à un modèle de PDMTD, tandis que celles présentées ici au théorème 5.4 valent pour un modèle de PRMC.

## 5.2 Fonctions sous-modulaires, isotonie et antitonie

Rappelons d'abord quelques définitions et propriétés. Le lecteur peut se référer à Topkis (1978) pour plus de détails.

Un ensemble partiellement ordonné est un ensemble sur lequel il existe une relation binaire, que nous désignerons toujours ici par  $\leq$ , qui est réflexive, transitive et antisymétrique. Soient  $Y$  et  $Z$  deux ensembles partiellement ordonnés. On dit que  $y \in Y$  est le plus grand [petit] élément

de  $Y$  si  $y' \leq [\geq] y \quad \forall y' \in Y$ . Un tel élément, s'il existe, est unique. Un sous-ensemble  $\underline{Y}$  de  $Y$  est dit croissant [décroissant] si  $y \in \underline{Y}$ ,  $y' \in Y$  et  $y' \geq [\leq] y$  implique que  $y' \in \underline{Y}$ . Soient  $y$  et  $y'$  deux éléments de  $Y$ . Si  $y$  et  $y'$  possèdent une borne supérieure [borne inférieure] dans  $Y$ , on la dénote par  $y \vee y'$  [ $y \wedge y'$ ]. Si  $y \vee y'$  et  $y \wedge y'$  sont dans  $Y$  pour chaque paire d'éléments  $y, y'$  de  $Y$ , on dit que  $Y$  est un treillis. Si  $\underline{Y} \subset Y$  possède cette propriété, on dit que  $\underline{Y}$  est un sous-treillis de  $Y$ . Si  $\{Z(y), y \in Y\}$  est une famille d'ensembles et si  $y \geq [\leq] y'$  dans  $Y$  implique que  $Z(y') \subseteq Z(y)$ , on dit que  $Z(y)$  est croissant [décroissant] en  $y$  sur  $Y$ . Si  $\{Z(y), y \in Y\}$  est une famille de sous-ensembles de  $Z$ , si  $Z$  est un treillis, et si  $y \geq [\leq] y'$  dans  $Y$ ,  $z \in Z(y)$  et  $z' \in Z(y')$  impliquent que  $z \vee z' \in Z(y)$  et  $z \wedge z' \in Z(y')$ , on dit que  $Z(y)$  est ascendant [descendant] en  $y$  sur  $Y$ .

Soit  $\underline{Y} \subseteq Y$ . Une fonction  $f : \underline{Y} \rightarrow Z$  est dite isotone [antitone] sur  $\underline{Y}$  si  $y \geq [\leq] y'$  dans  $\underline{Y}$  implique que  $f(y) \geq f(y')$ . Si  $Z \equiv \mathbb{R}$ , alors isotone [antitone] équivaut à croissante [décroissante]. Si  $\underline{Y}$  est un treillis et si  $f : \underline{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que

$$f(y \vee y') + f(y \wedge y') \leq [\geq] f(y) + f(y') \quad \forall y, y' \in \underline{Y},$$

on dit que  $f$  est sous-modulaire [super-modulaire] sur  $\underline{Y}$ . Soit  $D \subseteq Y \times Z$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est à différences isotones [antitones] en  $(y, z)$  sur  $D$  si  $z \geq z'$  dans  $Z$  implique que  $f(y, z) - f(y, z')$  est isotone [antitone] en  $y$  sur  $\{y \in Y \mid (y, z) \in D \text{ et } (y, z') \in D\}$ , ou, ce qui est équivalent, si  $y \geq y'$  dans  $Y$  implique que  $f(y, z) - f(y', z)$  est isotone [antitone] en  $z$  sur  $\{z \in Z \mid (y, z) \in D \text{ et } (y', z) \in D\}$ . Si  $D$  est un

treillis et  $f$  est sous-modulaire [super-modulaire] sur  $D$ , alors  $f$  est à différences antitones [isotones] en  $(y,z)$  sur  $D$  (Topkis (1978), Theorem 3.1). Cependant, l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

A noter que toute fonction à valeur réelle définie sur un ensemble totalement ordonné est à la fois sous-modulaire et super-modulaire.

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable, alors  $f$  est sous-modulaire – ou, ce qui est équivalent, à différences antitones – si et seulement

si  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0 \quad \forall i \neq j \text{ et } x \in \mathbb{R}^n$ . Cela signifie, intuitivement, qu'une

augmentation de  $x_j$  fait diminuer le taux de croissance de  $f(x)$  en fonction de  $x_i$ . Cela correspond, en d'autres mots, à un effet synergétique négatif.

Si  $Y$  est un ensemble partiellement ordonné,  $I(Y)$  désigne la tribu engendrée par les sous-ensembles croissants de  $Y$ . Notons que chaque sous-ensemble décroissant de  $Y$  est le complément d'un ensemble croissant et appartient donc à  $I(Y)$ . Si  $Y$  est aussi un espace topologique, la tribu engendrée par  $\mathcal{B}(Y) \vee I(Y)$  est notée  $\mathcal{Q}(Y)$ .

Si  $Y$  et  $Z$  sont deux espaces métriques séparables partiellement ordonnés, un noyau stochastique  $Q$  sur  $(Y, \mathcal{Q}(Y))|Z$  est une famille  $\{Q(\cdot|x), x \in X\}$ , chaque  $Q(\cdot|x)$  étant une mesure de probabilité sur  $(Y, \mathcal{Q}(Y))$ . A un tel  $Q$  correspond un noyau stochastique unique sur  $Y|X$ . De plus, étant donné

une fonction  $\lambda: Z \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on dit que  $\lambda Q$  est monotone [antimonotone] si, pour chaque  $\underline{Z}$  sous-ensemble croissant de  $Z$ ,  $\lambda(\cdot) Q(\underline{Z}|\cdot) : Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction croissante [décroissante].

Le lemme suivant est un rappel.

LEMME 5.1

- a) La somme de deux fonctions sous-modulaires est sous-modulaire, tout comme la limite d'une suite de fonctions sous-modulaires. Il en est de même pour les fonctions super-modulaires, ou à différences antitones [isotones].
- b) Si  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction sous-modulaire sur un treillis  $Y$ , alors l'ensemble  $Y_* = \{y' \in Y \mid f(y') \leq f(y) \ \forall y \in Y\}$  des points où  $f$  atteint son minimum sur  $Y$  est un sous-treillis de  $Y$ .
- c) Si  $Y$  et  $Z$  sont des treillis,  $D$  un sous-treillis de  $Y \times Z$ ,  $f$  sous-modulaire sur  $D$  et  $g(y) \equiv \inf_{z \in D_y} f(y, z)$  existe  $\forall y \in \text{proj}_Y(D)$ , alors  $g : \text{proj}_Y(D) \rightarrow \mathbb{R}$  est sous-modulaire.
- d) Soit  $Y$  un treillis muni d'une topologie pour laquelle tous les ensembles de forme  $\{y \in Y \mid y \leq y'\}$  ou  $\{y \in Y \mid y \geq y'\}$ , où  $y' \in Y$ , de même que  $Y$  lui-même, sont fermés. Si  $\underline{Y}$  est un sous-treillis compact et non vide de  $Y$ , alors  $\underline{Y}$  possède un plus grand élément et un plus petit élément.

- e) Si  $Z$  est un treillis,  $Y$  partiellement ordonné,  $\{Z(y), y \in Y\}$  une famille de sous-ensembles de  $Z$  telle que  $Z(y)$  est ascendant [descendant] en  $y$  sur  $Y$ ,  $f : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(y, \cdot)$  est sous-modulaire sur  $Z \ \forall y \in Y$  et  $f$  est à différences antitones [isotones] en  $(y, z)$  sur  $Y \times Z$ , alors  $Z_*(y) = \{z' \in Z \mid f(y, z') \leq f(y, z) \ \forall z \in Z(y)\}$  est ascendant [descendant] en  $y$  sur  $\{y \in Y \mid Z_*(y) \neq \emptyset\}$ .

Preuve

- a) Evident, de par la définition.
- b) et c) Voir Topkis (1978, théorèmes 4.1 et 4.3).
- d) Voir Birkhoff (1967, p. 250, théorème 20 et p. 6, définition).
- e) Voir Topkis (1978, théorème 6.1) pour le cas "ascendant".  
La preuve pour le cas "descendant" est tout à fait similaire.  $\square$

La partie a) du lemme suivant généralise la proposition 4.1 de Serfozo (1976). Les autres parties semblent originales. La preuve est basée sur la définition d'intégrale de Lebesgue. Ce lemme sera utilisé pour démontrer les prochains théorèmes de ce chapitre et le théorème 7.1.

Lemme 5.2

Soient  $Y$  et  $Z$  deux espaces Boréliens partiellement ordonnés,  $f : Z \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mu$ -mesurable croissante [décroissante] en  $y$  et croissante [[décroissante]] en  $z$ ;  $\lambda : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction;  $Q$  un noyau stochastique sur  $(Y, \mathcal{Q}(Y)) \mid Z$ ; et supposons que l'équation

$$h(z) \equiv \lambda(z) \int_Y f(z,y) Q(dy|z) \quad (5.1)$$

définit une fonction  $h : Z \rightarrow \mathbb{R}$  (i.e. l'intégrale existe  $\forall z \in Z$ ). Pour chaque  $z$  dans  $Z$  et chaque  $r$  dans  $\mathbb{R}$ , posons

$$S(z,r) \equiv \{y \in Y | f(z,y) \geq r\}. \quad (5.2)$$

C'est un sous-ensemble croissant [décroissant] de  $Y$  et, pour  $r$  fixé,  $S(z,r)$  est croissant [[décroissant]] en  $z$ .

- a) Supposons que  $\lambda(\cdot) Q(S(\cdot,r)|\cdot) : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$  est croissante [[décroissante]] pour chaque  $r$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f \geq 0$ , ou si  $\lambda \equiv 1$ , ou si  $\lambda : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$  est décroissante [[croissante]], ou si  $\lambda(\cdot) Q(Y - S(\cdot,r)|\cdot) : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$  est décroissante [[croissante]] pour chaque  $r$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $h$  est croissante [[décroissante]] sur  $Z$ .
- b) Supposons que  $\lambda(\cdot) Q(S(\cdot,r)|\cdot) : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$  est sous-modulaire {super-modulaire} pour chaque  $r$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f \geq 0$ , ou si  $\lambda \equiv 1$ , ou si  $-\lambda : Z \rightarrow \mathbb{R}_-$  est sous-modulaire {super-modulaire}, alors  $h$  est sous-modulaire {super-modulaire} sur  $Z$ .
- c) Soit  $D \subseteq Z \equiv X \times A$  et supposons que  $\lambda(\cdot) Q(S(\cdot,r)|\cdot) : X \times A \rightarrow \mathbb{R}_+$  est à différences antitones {isotones} en  $(x,a)$  sur  $D$  pour chaque  $r$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f \geq 0$ , ou si  $\lambda \equiv 1$ , ou si  $-\lambda : X \times A \rightarrow \mathbb{R}_-$  est à différences antitones {isotones} en  $(x,a)$  sur  $D$ , alors  $h$  est à différences antitones {isotones} en  $(x,a)$  sur  $D$ .
- d) Soient  $z, z', z''$  éléments de  $Z$  et  $\alpha \in [0,1]$ . Si
- $$\lambda(z) Q(S(z,r)|z) \geq \alpha \lambda(z') Q(S(z',r)|z') + (1-\alpha) \lambda(z'') Q(S(z'',r)|z'')$$
- pour chaque  $r$  dans  $\mathbb{R}$  et si

ou bien  $f \geq 0$ , ou bien  $\lambda \equiv 1$ , ou bien  $\lambda(z) \leq \alpha \lambda(z') + (1-\alpha) \lambda(z'')$ ,

alors

$$h(z) \geq \alpha h(z') + (1-\alpha) h(z'').$$

### Preuve

Par le théorème de convergence monotone et puisque l'intégrale existe,

on a

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_Y f^+(z,y) \lambda(z) Q(dy|z) - \int_Y f^-(z,y) \lambda(z) Q(dy|z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left[ \sum_{i=1}^{n2^n} \lambda(z) Q(S(z, i/2^n) | z) - \sum_{i=-1}^{-n2^n} \lambda(z) Q(Y-S(z, i/2^n) | z) \right] \quad (5.3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left[ \sum_{i=1}^{n2^n} \lambda(z) Q(S(z, i/2^n) | z) + \sum_{i=-1}^{-n2^n} \lambda(z) Q(S(z, i/2^n) | z) - n2^n \lambda(z) \right]. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Pour chaque  $(i,n)$ ,  $\lambda(\cdot) Q(S(\cdot, i/2^n) | \cdot)$  est croissante [[décroissante]].

Si  $f \geq 0$ , la deuxième somme dans (3.6) disparaît et le résultat suit. Si

$\lambda \equiv 1$  ou si  $\lambda$  est décroissante [[croissante]], le résultat est une consé-

quence de (5.4). Dans l'autre cas, pour chaque  $(i,n)$ ,  $\lambda(\cdot) Q(Y-S(\cdot, i/2^n) | \cdot)$

est décroissante [[croissante]]. Donc, par (5.3),  $h$  est aussi croissante

[[décroissante]].

b), c) et d) Si  $f \geq 0$ , (5.3) devient:

$$h(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} \lambda(z) Q(S(z, i/2^n) | z). \quad (5.5)$$

De (5.5) si  $f \geq 0$ , de (5.4) sinon, et en utilisant le lemme 5.1a, on obtient

le résultat.  $\square$

### 5.3 Fonctions de coût anticipé monotones; politiques optimales isotones ou antitones

Pour le reste de ce chapitre, on supposera que  $S$  et  $A$  sont partiellement ordonnés et que la topologie de  $A$  est telle que tous les ensembles de forme  $\{a \in A \mid a \leq a'\}$  ou  $\{a \in A \mid a \geq a'\}$  pour  $a' \in A$  sont fermés.

On définit un ordre partiel sur  $X \equiv \mathbb{R}_+ \times S$  de la façon suivante: si  $(\zeta, s)$  et  $(\zeta', s')$  sont deux éléments de  $X$ , on a  $(\zeta, s) \leq (\zeta', s')$  si  $\zeta \geq \zeta'$  et  $s \leq s'$ . Lorsqu'on parle de croissance [décroissance] ou d'ascendance [descendance] sur  $X = \mathbb{R}_+ \times S$ , dans ce chapitre, on se réfère toujours à cet ordre partiel. Pour se faire une idée intuitive de la raison de ce choix, on peut imaginer que  $s$  mesure l'état de détérioration d'un système et  $\zeta$  le temps jusqu'à la prochaine "panne". Il semble alors tout à fait naturel d'associer les grandes valeurs de  $s$  aux petites valeurs de  $\zeta$ .

Les hypothèses des prochains théorèmes seront choisies dans la liste qui suit. La présence de crochets ou d'accolades indique une alternative. Pour un théorème donné, si on choisit ce qui est entre crochets quelque part, on doit le faire partout et pour toutes les hypothèses qui ont trait à ce théorème. Il en est de même pour les accolades.

#### LISTE D'HYPOTHESES

- H1. Il existe  $B_3$  sous-ensemble non vide de  $B_2$  tel que  $\forall V \in B_3$ ,  $V$  est croissante [décroissante] sur  $X$  et  $T(V) \in B_3$ .
- H2.  $A(x)$  est décroissant [croissant] en  $x$  sur  $X$ .



- H3. Pour chaque  $V$  dans  $B_2$  croissante [décroissante] sur  $X$  et positive [négative] (c.-à.d.  $\geq [\leq] 0$ ) et chaque  $a$  dans  $A$ ,  $H(V)(\cdot, a)$  est croissante [décroissante] sur  $\Gamma_a$  et positive [négative] .
- H4.  $g \geq [\leq] 0$  et pour chaque  $X$  croissant [décroissant] sous-ensemble de  $X$ ,  $Q(X|\cdot, a)$  et  $g(\cdot, a)$  sont croissantes [décroissantes] sur  $\Gamma_a$  pour chaque  $a$  dans  $A$ .
- H5.  $A$  est un treillis,  $A(x)$  est ascendant {descendant} en  $x$  sur  $X$  et les topologies de  $X$  et  $A$  sont telles que toute fonction isotone {antitone}  $\mu: X \rightarrow A$  est  $U$ -mesurable.
- H6. H1 est satisfaite et, pour chaque  $V$  dans  $B_3$ , on peut prolonger  $H(V): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  en une fonction s.a.i.,  $\tilde{H}(V): X \times A \rightarrow \mathbb{R}$  sous-modulaire en  $a$  sur  $A$  pour chaque  $x$  dans  $X$  et à différences antitones {isotones} en  $(x, a)$  sur  $X \times A$ .
- H7. H2 et H3 sont satisfaites et on peut prolonger  $g$  en une fonction s.a.i.  $\tilde{g}: X \times A \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour chaque  $X$  sous-ensemble croissant [décroissant] de  $X$ ,  $Q(X|\cdot): X \times A \rightarrow [0, 1]$  et  $\tilde{g}$  sont des fonctions sous-modulaires en  $a$  sur  $A$  pour chaque  $x$  dans  $X$  et à différences antitones {isotones} en  $(x, a)$  sur  $X \times A$ .
- H8. Pour chaque  $x$  dans  $X$ ,  $A_*(x)$  possède un plus grand élément.
- H9. Il existe  $V$  dans  $B_3$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq n_0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  et  $\forall x \in X$ ,

$$U_n(V)(x, \lambda) \equiv \{a \in A(x) \mid H(T^n(V))(x, a) \leq \lambda\} \quad (5.6)$$

est compact.

THEOREME 5.3 (C,I)

- a) H2 et H3  $\Rightarrow$  H1
- b) H4  $\Rightarrow$  H3
- c) H1  $\Rightarrow$   $V_*$  est croissante [décroissante] sur X et est dans  $B_3$ .

Preuve

- a) Soient  $V \in B_2$  croissante [décroissante],  $V \geq [\leq] 0$  et  $x \geq [\leq] x'$  deux éléments de X.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists a \in A(x)$  tel que  $H(V)(x,a) \leq T(V)(x) + \varepsilon$ . Par H2,  $a \in A(x')$ , ce qui implique que  $T(V)(x') \leq H(V)(x',a)$  et donc  $T(V)(x) - T(V)(x') \geq H(V)(x,a) - H(V)(x',a) - \varepsilon$ . Puisqu'on peut choisir  $\varepsilon$  aussi petit que désiré et puisque  $H(V)(\cdot, a)$  est croissante [décroissante] sur  $\Gamma_a$ , cela implique que  $T(V)$  l'est aussi. Il suffit alors de poser  $B_3 = \{V \in B_2 \mid V \geq [\leq] 0, V \text{ croissante [décroissante]}\}$  dans H1.
- b) Soit  $V \in B_2$  croissante [décroissante] sur X telle que  $V \geq [\leq] 0$  et  $a \in A$ .  $f(\tau, s, \zeta, s') = e^{-\rho\zeta} V(\tau + \zeta, s')$  est alors décroissante [croissante] en  $\zeta$  et en  $\tau$  et croissante [décroissante] en  $s'$ . Par le lemme 5.2a (avec  $\lambda = 1$ ,  $Z = X$ ,  $Y = \mathbb{R}_+ \times S$ ),  $H(V)(x, a)$  est croissante [décroissante] en  $x$  sur  $\Gamma_a$ . De plus, puisque  $V$  et  $g$  sont positives [négatives],  $H(V)$  l'est aussi.
- c) Soit  $V \in B_3$ . Par H1,  $T^n(V) \in B_3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et par la proposition 2.11d,  $V_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V) \in B_3$ .

THEOREME 5.4 (C,I)

- a) H7  $\Rightarrow$  H6
- b) Si H5, H6 et H8 sont vérifiées, alors il existe une politique optimale isotone {antitone}  $\mu_* \in U_{NA}$ .
- c) Si H5 et H6 sont vérifiées et si  $V \in B_3$  satisfait H9, alors il existe une suite  $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq U_{NA}$  de politiques isotones {antitones} telles que  $T_{\mu_n}(T^n(V)) = T^{n+1}(V) \quad \forall n \geq n_0$  et il existe  $\mu \in U_{NA}$  telle que  $\forall x \in X, \mu(x)$  est un point d'accumulation de  $\{\mu_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ . De plus, chaque  $\mu$  ayant ces propriétés est une politique optimale isotone {antitone}.

Preuve.

a) Soit  $V \in B_2$  croissante [décroissante] et positive [négative] sur  $X$ . Par le lemme 5.1a et les lemmes 5.2b et c (avec  $\lambda \equiv 1, Z = X \times A, Y = X$  et  $f(\tau, s, \zeta, s') = e^{-\rho\zeta} V(\tau + \zeta, s')$ ),  $\tilde{H}(V)(\tau, s, a) \equiv \tilde{g}(\tau, s, a) + \int_{\mathbb{R} \times S} e^{-\rho\zeta} V(\tau + \zeta, s') Q(d\zeta, ds' | \tau, s, a)$  est sous-modulaire en  $a$  sur  $A$  pour chaque  $x = (\tau, s) \in X$  et à différences antitones {isotones} en  $(x, a)$  sur  $X \times A$ . Le reste découle du théorème 5.3a.

b) Par H1 et le théorème 5.3c,  $V_* \in B_3$ , ce qui implique, par H6, que  $\tilde{H}(V_*)(x, a)$  est sous-modulaire en  $a$  sur  $A$  pour chaque  $x$  dans  $X$  et à différences antitones {isotones} en  $(x, a)$  sur  $X \times A$ . Par le lemme 5.1 b et e,  $A_*(x)$  est donc un sous-treillis de  $A$  pour chaque  $x$ , et  $A_*(x)$  est ascendant {descendant} en  $x$  sur  $X$ . Pour chaque  $x$  dans  $X$ , soit  $\mu_*(x)$  un plus grand élément de  $A_*(x)$ . Si  $x \geq \{\leq\} x'$  dans  $X$ , alors  $\mu_*(x) \vee \mu_*(x') \in A_*(x)$  puisque  $A_*(x)$  est ascendant {descendant} en  $x$ , et  $\mu_*(x) \geq \mu_*(x) \vee \mu_*(x') \geq \mu_*(x')$  par définition de  $\mu_*(x)$  et de  $\vee$ .  $\mu_*: X \rightarrow A$  est alors isotone {antitone} et, par H5,  $\mu$ -mesurable. Ainsi,  $\mu_* \in U_{NA}$ ,

$T_{\mu_*}(V_*) = V_*$  et donc, par la proposition 2.11 f,  $\mu_*$  est une politique optimale.

c) Par H1 et le théorème 5.3 c,  $T^n(V) \in B_3$  pour chaque  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Cela implique, par H6, que  $\tilde{H}(T^n(V))(x,a)$  est sous-modulaire en  $a$  sur  $A$  pour chaque  $x$  et à différences antitones {isotones} en  $(x,a)$  sur  $X \times A$ .

Soit  $n \geq n_0$  et pour chaque  $x$  dans  $X$ , soit  $A_n(x) \equiv \{a \in A(x) \mid H(T^n(V))(x,a) = T^{n+1}(V)\}$ . Par H9, chaque  $A_n(x)$  est compact et, par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 2.13 c, non vide. Par le lemme 5.1 b et e, chacun de ces ensembles est aussi un sous-treillis de  $A$ , et  $A_n(x)$  est ascendant en  $x$  sur  $X$ . Par le lemme 5.1 d, chaque  $A_n(x)$  possède donc un plus grand élément. Comme dans la preuve de c), on peut construire  $\mu_n \in U_{NA}$  isotone {antitone} telle que  $T_{\mu_n}(T^n(V)) = T^{n+1}(V)$ . Si on définit  $\mu$  comme dans la preuve de la proposition 2.13 c, il s'ensuit, par le même raisonnement que dans cette preuve, que  $\mu$  est une politique NA optimale telle que  $\mu(x)$  est un point d'accumulation de  $\{\mu_n(x), n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in X$ , et que chaque  $\mu$  de cette forme est une politique optimale. De plus, puisque chaque  $\mu_n$  est isotone {antitone},  $\mu$  l'est aussi. □

L'hypothèse H4 se situe dans la lignée des conditions d'existence d'une politique optimale de type "control-limit" proposées par Derman (1963), Kolesar (1966), Ross (1969), etc. Ce n'est toutefois pas une généralisation de ces conditions, à cause de la contrainte " $g \geq [\leq] 0$ ", qui nous assure que chaque fonction  $V$  de  $B_2$  est positive [négative].

Grâce à cette propriété, on sait que  $e^{-\rho\zeta}V(\tau+\zeta, s)$  est croissante [décroissante] en  $\zeta$  et on peut utiliser le lemme 5.2

L'hypothèse H1 est moins restrictive que H2 et H3, tandis que H3 l'est moins que H4. Pour certaines applications, on devra vérifier H1 directement avec un  $B_3$  plus restreint que celui choisi dans la preuve du théorème 5.3 a.

H2 implique que l'ensemble des actions admissibles n'est pas réduit lorsque l'état du système augmente [diminue] .

Des exemples où H5 et H7 sont satisfaites seront donnés plus loin. D'autres exemples se trouvent dans Anderson (1978), Albright et Winston (1979) et Serfozo (1981).

L'hypothèse H8 est utilisée lors de la définition d'une politique optimale isotone {antitone} dans la preuve du théorème 5.4 b. Par le lemme 5.1 b et d, H8 est vérifiée, en particulier, si H6 l'est et si chaque  $A_*(x)$  est compact.

H9 correspond aux hypothèses de la proposition 2.13 c. Elle est vérifiée, en particulier, si chaque  $A(x)$  est fini, ou bien si chaque  $A(x)$  est compact,  $g$  et  $V$  sont semi-continues inférieurement et  $Q$  est continue sur  $X \times A$  (voir proposition 2.13 d).

#### 5.4 Règles dichotomiques à seuil

On peut maintenant généraliser la notion de règle de type "control-limit", ou règle dichotomique à seuil. Voici d'abord quelques définitions.

Soient  $Y$  et  $Z$  deux ensembles. Une fonction  $f:Y \rightarrow Z$  est dite dichotomique s'il existe  $z_*$  et  $z^*$  dans  $Z$  tels que  $f(y) \in \{z_*, z^*\}$   $\forall y \in Y$ .

Si  $Y$  est partiellement ordonné,  $f:Y \rightarrow Z$  dichotomique et  $\{y \in Y \mid f(y) = z^*\}$  est un ensemble croissant, on dit que  $f$  est dichotomique à seuil.

On dit qu'une politique  $\mu \in U_{NA}$  est une règle dichotomique à seuil si  $\mu$  est une fonction dichotomique à seuil. Une règle dichotomique à seuil est une généralisation de la règle de type "control-limit" dont nous avons parlé précédemment.

A noter qu'une fonction dichotomique isotone est nécessairement dichotomique à seuil.

Les hypothèses suivantes seront utilisées pour le Théorème 5.5, qui fournira des conditions suffisantes d'existence de règles optimales dichotomiques, possiblement à seuil. Une politique optimale de ce genre, lorsqu'elle existe, est en général plus facile à obtenir qu'une politique plus compliquée. Dans bien des cas, on peut utiliser des méthodes ad hoc très efficaces (e.g. Nummelin (1980) pour le cas d'un processus de renouvellement avec espace d'état ordonné).

H10. Il existe deux éléments  $a_*$  et  $a^*$  de  $\bigcap_{x \in X} A(x)$  tels que  $\forall (x,a) \in \Gamma$ ,

$\exists \lambda \in [0,1]$  tel que

$$H(V_*)(x,a) \geq \lambda H(V_*)(x,a_*) + (1-\lambda)H(V_*)(x,a^*). \quad (5.7)$$

H11. Il existe deux éléments  $a_*$  et  $a^*$  de  $\bigcap_{x \in X} A(x)$  tels que  $\forall (x,a) \in \Gamma$ ,

$\exists \lambda \in [0,1]$  tel que

$$g(x,a) \geq \lambda g(x,a_*) + (1-\lambda)g(x,a^*) \quad (5.8)$$

et

$$Q(\underline{X}|x,a) \geq \lambda Q(\underline{X}|x,a_*) + (1-\lambda)Q(\underline{X}|x,a^*) \quad (5.9)$$

pour chaque  $\underline{X}$  sous-ensemble croissant [décroissant] de  $X$ .

Ces deux hypothèses sont vraies, en particulier, si  $A(x) = \{a_*, a^*\}$   $\forall x \in X$ . C'est le cas, par exemple, lorsqu'on cherche une politique optimale de remplacement d'un système. Par ailleurs, si chaque  $A(x)$  est le segment joignant  $a_*$  à  $a^*$ , ce sont des hypothèses de concavité.

#### THEOREME 5.5 (C,I)

a) H2, H3 et H11  $\Rightarrow$  H10.

b) Sous H10, il existe une politique optimale  $\mu_* \in U_{NA}$  dichotomique telle que  $\mu_*(X) = \{a_*, a^*\}$ . De plus, si H6 est aussi satisfaite et si  $a^* \geq a_*$ , alors  $\mu_*$  peut être choisie parmi les règles dichotomiques à seuil.

Preuve

- a) Pour chaque  $(x,a) \in \Gamma$ , en utilisant le lemme 5.2 d et puisque  $V_*$  est croissante [décroissante] et positive [négative], on obtient (5.7).
- b) Pour chaque  $(x,a) \in \Gamma$ , on a par (5.7):

$$H(V_*)(x,a) \geq \min [H(V_*)(x,a_*), H(V_*)(x,a^*)] \quad (5.10)$$

de sorte que  $\forall x \in X$ ,  $A_*(x)$  contient  $a_*$  ou  $a^*$  (ou les deux). Soit  $\underline{X} = \{x \in X | H(V_*)(x,a_*) - H(V_*)(x,a^*) \leq 0\}$ . Cet ensemble est  $\mathcal{U}$ -mesurable, puisque  $H(V_*)$  l'est. Si  $a_* \in A_*(x)$ , alors  $x \in \underline{X}$ , sinon  $a^* \in A_*(x)$ . La politique dichotomique  $\mu_* \in U_{NA}$  définie par

$$\mu_*(x) = \begin{cases} a_* & \text{si } x \in \underline{X} \\ a^* & \text{si } x \in X - \underline{X} \end{cases} \quad (5.11)$$

est donc telle que  $T_{\mu_*}(V_*) = V_*$  et, par la proposition 2.11 f, est optimale.

Si H6 est satisfaite, alors  $H(V_*)(x,a)$  est à différences antitones {isotones} en  $(x,a)$  sur  $X \times A$ . Cela implique que  $\underline{X}$  est un sous-ensemble décroissant {croissant} de  $X$ , et donc que  $\mu_*$  est une règle dichotomique à seuil.  $\square$

5.5 Exemple: Un problème de remplacement

Soient  $S = [0,1] \times [0,1]$ ,  $A = \{0,1\}$  et  $\Gamma \equiv S \times A$ . Soient  $G$  et  $R$  des noyaux stochastiques monotones  $\mathcal{B}$ -mesurables sur  $[0,1] | [0,1]$  et  $[0,1] | [0,1]^2$  respectivement. Soient  $\lambda: [0,1] \rightarrow (0,\infty)$  une fonction



croissante,  $C > 0$  et  $\rho > 0$ . Si l'on choisit l'action 0 dans l'état  $(c, s) \in S$ , un coût  $c$  est encouru et le délai  $\zeta$  jusqu'au prochain saut est une v.a. exponentielle de moyenne  $1/\lambda(s)$ . De plus, le prochain état  $(c', s')$  est généré aléatoirement comme suit:  $s'$  est généré selon la mesure  $G(\cdot | s)$  puis  $c'$  selon la mesure  $R(\cdot | s, s')$ . Si l'on choisit plutôt l'action 1, alors un coût  $C$  est encouru, le délai  $\zeta$  est une v.a. exponentielle de moyenne  $1/\lambda(0)$ ,  $s'$  est généré selon la mesure  $G(\cdot | 0)$  et  $c'$  selon la mesure  $R(\cdot | 0, s')$ . Les coûts sont actualisés au taux  $\rho$  et l'horizon est infini.

Ce modèle pourrait correspondre, par exemple, à un problème de remplacement avec possibilité de réparation minimale lors d'une panne. On se trouve dans l'état  $(c, s)$  si la composante est en panne, dans un état d'usure  $s$  et que le coût d'une réparation minimale est  $c$ . Un remplacement (action 1) ramène la composante dans l'état d'usure 0 et une réparation minimale (action 0) ne change pas l'état d'usure. On suppose que l'état d'usure est constant entre les sauts. Dans l'état d'usure  $s$ , le taux de saut (taux de panne) est  $\lambda(s)$  et  $G(\cdot | s)$  est la loi de probabilité du prochain état d'usure  $s'$ . De plus, le prochain "coût de réparation minimale"  $c'$  est alors généré selon  $R(\cdot | s, s')$ .

Cet exemple satisfait les conditions du modèle C avec  $g_0 = 0$ ,  $g_1 = \max(1, C)$ ,  $\alpha_1 = \lambda(1)/(\lambda(1) + \rho)$  et  $B_2 = \{V \in B_1 \mid 0 \leq V \leq (\lambda(1) + \rho)\max(1, C)/\rho\}$ .

$X = [0, \infty) \times S$  et  $\forall \underline{X} \in \mathcal{B}(X)$ ,  $(c, s) \in S$ ,

$$Q(\underline{X}|c, s, 0) = \int_{\underline{X}} R(dc' | s, s') G(ds' | s) \lambda(s) e^{-\lambda(s)\zeta} d\zeta \quad (5.12)$$

$$Q(\underline{X}|c, s, 1) = Q(\underline{X}|c, 0, 0) \quad (5.13)$$

$$g(c, s, 0) = c \quad (5.14)$$

$$g(c, s, 1) = C. \quad (5.15)$$

#### LEMME 5.6

Si  $\underline{X}$  est un sous-ensemble croissant de  $X$ , alors  $Q(\underline{X}|c, s, 0)$  est croissant en  $s$  sur  $[0, 1]$  et ne dépend pas de  $c$ .

#### Preuve

Le fait que  $Q(\underline{X}|c, s, 0)$  ne dépend pas de  $c$  vient directement de (5.12). Il reste à montrer la croissance en  $s$ . Pour  $s'$  et  $\zeta$  fixés,  $E_1(\zeta, s') \equiv \{c' \in [0, 1] | (\zeta, c', s') \in \underline{X}\}$  est un sous-ensemble croissant de  $[0, 1]$ .  $E_1(\zeta, s')$  est aussi croissant en  $s'$  et en  $-\zeta$ . Le noyau  $R$  étant croissant sur les ensembles croissants,  $R(E_1(\zeta, s') | s, s')$  est donc croissant en  $s$ , en  $s'$  et en  $-\zeta$ . Pour  $s$  et  $\zeta$  fixés et  $\gamma \in [0, 1]$ ,  $E_2(s, \zeta, \gamma) \equiv \{s' \in [0, 1] | R(E_1(\zeta, s') | s, s') \geq \gamma\}$  est un sous-ensemble croissant de  $[0, 1]$ .  $E_2(s, \zeta, \gamma)$  est aussi croissant en  $s$  et en  $-\zeta$ . Le noyau  $G$  étant croissant sur les ensembles croissants,  $G(E_2(s, \zeta, \gamma) | s)$  est

croissante en  $s$  et en  $-\zeta$ . Donc, par le lemme 3.2 a,  $h(s, \zeta) \equiv \int_{[0,1]} R(E_1(\zeta, s') | s, s') G(ds' | s)$  est croissante en  $s$  et en  $-\zeta$ .  
 Pour  $s$  fixé et  $\gamma \in [0, 1]$ ,  $E_3(s, \gamma) \equiv \{\zeta \geq 0 | h(s, \zeta) \geq \gamma\}$  est un sous-ensemble décroissant de  $\mathbb{R}_+$ .  $E_3(s, \gamma)$  est aussi croissant en  $s$ . Soit  $F(\cdot | s)$  la mesure de probabilité associée à une v.a. exponentielle de moyenne  $1/\lambda(s)$ . On a

$$\begin{aligned} F(E_3(s, \gamma) | s) &= \int_{E_3(s, \gamma)} \lambda(s) e^{-\zeta \lambda(s)} d\zeta \\ &= \int_0^{\zeta_*(s, \gamma)} \lambda(s) e^{-\zeta \lambda(s)} d\zeta \\ &= 1 - e^{-\lambda(s) \zeta_*(s, \gamma)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $\zeta_*(s, \gamma) \equiv \sup \{\zeta \geq 0 | h(s, \zeta) \geq \gamma\}$ . Puisque  $\zeta_*(s, \gamma)$  et  $\lambda(s)$  sont croissants en  $s$ ,  $F(E_3(s, \gamma) | s)$  l'est aussi et par le lemme 3.2 a,  $Q(\underline{X} | c, s, 0) = \int_0^\infty h(s, \zeta) F(d\zeta | s)$  est croissante en  $s$ .  $\square$

Par le lemme précédent et par (5.13 - 5.15), H4 a est vérifiée. H2 a l'est aussi. Donc, par le Théorème 5.3,  $V_*$  est croissante sur  $S$  et si  $V \in B_2$  est croissante, alors  $T^n(V)$  l'est aussi pour chaque  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

Pour  $(c, s)$  dans  $S$ , on a aussi

$$\begin{aligned} H(V)(c, s, 1) - H(V)(c, s, 0) \\ = C - c + H(V)(0, 0, 0) - H(V)(0, s, 0). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Cette expression est décroissante en  $c$  et en  $s$ , de sorte que  $H(V)(c,s,a)$  est à différences antitones en  $((c,s),a)$  sur  $S \times A$ . La condition H6 est donc satisfaite. H5 est aussi vérifiée, puisque  $u(S)$  contient tous les sous-ensembles croissants de  $S$ . De plus, la condition H9 est satisfaite pour chaque  $V$  dans  $\mathbb{B}_2$ , puisque  $A$  est fini, et H10 est satisfaite pour  $a_* = 0$  et  $a^* = 1$ .

Donc, par le théorème 5.5 b, il existe un sous-ensemble croissant  $S_*$  de  $S$  tel que la règle dichotomique à seuil  $\mu_*: S \rightarrow \{0,1\}$  définie par

$$\mu_*(c,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } (c,s) \in S_* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.18)$$

est une politique optimale.

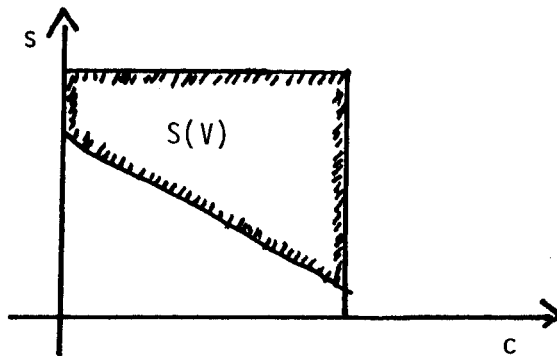
Pour  $V \in \mathbb{B}_2$  et  $s \in [0,1]$  posons

$$J(V)(s) \equiv H(V)(0,s,0) \quad (5.19)$$

et

$$S(V) \equiv \{(c,s) \in S \mid C + J(V)(0) < c + J(V)(s)\} \quad (5.20)$$

Pour  $V$  croissant,  $S(V)$  est un ensemble croissant.



De plus, la règle  $\mu_*$  définie par (5.18) avec  $S_* = S(V_*)$  est optimale.

## CHAPITRE 6

### POLITIQUE DE REMPLACEMENT SEQUENTIELLE SUR HORIZON FINI

#### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, et dans les deux qui suivront, nous utilisons le modèle de PRMC et ses propriétés, pour étudier certains problèmes de remplacement préventif. Des exemples numériques sont traités et des solutions explicites sont obtenues par le biais de l'algorithme du chapitre 3.

Il est souvent avantageux de remplacer une composante avant qu'elle ne tombe en panne, de façon à éviter les conséquences fâcheuses d'une panne durant le fonctionnement ou d'une détérioration excessive. Pour une composante dont la distribution de durée de vie est connue et dont la seule mesure de détérioration est l'âge, une politique de remplacement "au plus tard à l'âge  $t_*$ " est souvent adoptée. Suivant une telle politique, la composante est remplacée lors de sa première panne si cette dernière survient avant l'âge  $t_*$  et à l'âge  $t_*$  dans le cas contraire (voir Barlow et Proschan (1965) pour une étude détaillée). Lorsque l'horizon est infini, la valeur de  $t_*$  permettant de minimiser le coût total espéré actualisé, si elle existe, ne dépend pas de l'instant courant. Par contre, si l'horizon est fini, l'âge auquel on doit planifier un remplacement préventif devrait dépendre du temps qui reste à écouler.

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'obtention d'une politique optimale de remplacement d'une composante évoluant sur un intervalle de temps fini  $[0, T]$ .

## 6.2 Description du problème

De façon spécifique, on s'intéresse à une composante évoluant comme suit. A l'instant  $t_0 = 0$ , la composante est neuve (d'âge 0) et on planifie un remplacement préventif en  $d_1 \leq T$ . Si une panne survient en  $\tau_1 < d_1$ , un coût de panne aléatoire, dont l'espérance mathématique est  $\kappa(\tau_1)$ , est encouru en  $\tau_1$ . Sinon, on pose  $\tau_1 = \tau_0 + d_1$ . Si  $\tau_1 = T$  le processus se termine, tandis que si  $\tau_1 < T$ , la composante est remplacée à l'instant  $\tau_1$  au coût  $K > 0$  et on planifie un prochain remplacement préventif en  $\tau_1 + d_2$  (où  $d_2 \in [0, T]$ , le choix de  $d_2$  pouvant dépendre de  $d_1$  et  $\tau_1$ ).

Si la nouvelle composante tombe en panne en  $\tau_2 < \min(\tau_1 + d_2, T)$ , un coût de panne aléatoire d'espérance mathématique  $\kappa(\tau_2 - \tau_1)$  et dont la distribution ne dépend que de  $\tau_2 - \tau_1$  est alors encouru. Sinon, on pose  $\tau_2 = \tau_1 + d_2$ . Si  $\tau_2 \geq T$  le processus se termine en  $T$ , tandis que, si  $\tau_2 < T$ , la composante est remplacée à l'instant  $\tau_2$  au coût  $K$  et on planifie un prochain remplacement préventif en  $\tau_2 + d_3$  (le choix de  $d_3 \in [0, T]$  pouvant dépendre de  $d_1, \tau_1, d_2$  et  $\tau_2$ ). Ainsi de suite.

Un coût de fonctionnement est encouru durant  $[0, T]$  à un taux qui est fonction de l'âge de la composante. Le coût de fonctionnement par unité de temps pour une composante d'âge  $\zeta$  est  $c(\zeta) \geq 0$ . La fonction de répartition de la durée de vie d'une composante est  $F(\cdot)$  et tous les coûts sont actualisés au taux  $\rho \geq 0$ .

On suppose que  $c$  et  $\kappa$  sont des fonctions continues, positives et bornées sur  $[0, T]$ , que  $F(\cdot)$  est continue sur  $[0, \infty)$  et qu'il existe  $\delta_1 < 1$  tel que

$$\int_{[0,T)} e^{-\rho\zeta} dF(\zeta) \leq \delta_1 . \quad (6.1)$$

$F(0)$  peut être différent de zéro. Dans ce cas, une composante neuve tombe en panne avec une probabilité  $F(0)$ . Cela se justifie par la possibilité qu'une composante neuve soit défectueuse.

Notons que ce modèle généralise le modèle de remplacement séquentiel sur horizon fini de Barlow et Proschan (1965, p.98). Dans le modèle de Barlow et Proschan, il n'y a pas de coût de fonctionnement ( $c \equiv 0$ ), le coût de panne est non aléatoire et indépendant de l'âge ( $\kappa(\zeta)$  constant en  $\zeta$ ), il n'y a pas d'actualisation ( $\rho = 1$ ) et on fait l'hypothèse que  $F(0) = 0$ . Notons d'autre part que le modèle présenté ici pourrait se généraliser davantage en considérant un coût de remplacement aléatoire dont la distribution dépend de l'âge de la composante.

### 6.3 Formulation sous forme d'un modèle I de PRMC

Soit  $X = [0, T]$ . On dit que le système est au point  $\tau \in X$  si on se trouve à l'instant  $\tau$  et, si  $\tau < T$ , que la composante doit être remplacée immédiatement.  $A \equiv [0, T]$  est l'espace d'actions,  $\Gamma = X \times A$  et  $Q$  est le noyau stochastique Borel-mesurable continu sur  $\mathbb{R}_+ | X \times A$  défini par

$$Q([0, \zeta] | \tau, d) \equiv Q(\zeta | \tau, d) = \begin{cases} F(\zeta) & \text{si } \zeta < d \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2)$$

On définit  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$g(\tau, d) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \geq T \\ K + \int_{[0, \min(d, T-\tau)]} (e^{-\rho\zeta} \kappa(\zeta) + C(\zeta)) dQ(\zeta | \tau, d) \\ + \bar{F}(\min(d, T-\tau)) C(\min(d, T-\tau)) & \text{si } \tau < T. \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $C : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est définie par

$$C(\zeta) = \int_0^{\zeta} e^{-\rho s} c(s) ds \quad (6.4)$$

et  $\bar{F}(\cdot) \equiv 1 - F(\cdot)$ . Puisque  $\kappa$ ,  $C$  et  $F$  sont continues,  $g$  est semi-continue inférieurement. On a aussi

$$K \leq g(\tau, d) \leq g_1 \equiv \sup_{(s, d) \in \Gamma} g(s, d) < \infty \quad \forall \tau < T. \quad (6.5)$$

$g(\tau, d)$  représente le coût espéré pour la prochaine étape, sachant qu'on se trouve au point  $\tau$ , qu'on planifie le prochain remplacement préventif à  $\tau + d$  si  $\tau + d < T$  et qu'on ne planifie aucun remplacement préventif avant d'atteindre  $T$  si  $\tau + d \geq T$ .

En posant  $\tilde{\mu}(\tau) = T \quad \forall \tau \in X$ , les conditions (4.5-4.6, 4.8 et 4.11-4.12) sont satisfaites et on a donc un modèle de PRMC version I sur horizon fini, tel que décrit au paragraphe 4.6.

Soit

$$\mathbb{B}_2 \equiv \{V: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid V \text{ est semi-continue inférieurement,}$$

$$K \leq V(\tau) \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} \quad \forall \tau < T \quad \text{et} \quad V(T) = 0\}.$$

Puisque  $A$  est compact,  $g$  semi-continue inférieurement et  $Q$  continu sur



$X \times A$ , les hypothèses de la proposition 2.13 c et d sont vérifiées. Il existe donc une politique optimale Borel-mesurable  $\mu_*: X \rightarrow A$  que l'on peut obtenir, théoriquement, par l'algorithme de la programmation dynamique.

Les opérateurs de la programmation dynamique s'écrivent:

$$H(V)(\tau, d) = g(\tau, d) + \int_{[0, d]} e^{-\rho\zeta} V(\min(T, \tau + \zeta)) Q(d\zeta | \tau, d) \quad (6.6)$$

$$T(V)(\tau) = \min_{d \in [0, T]} H(V)(\tau, d) . \quad (6.7)$$

On remarque tout de suite que pour chaque  $V$  dans  $\mathbb{B}_2$ ,

$$H(V)(\tau, d) = H(V)(\tau, T - t) \quad \forall d \geq T - \tau \quad (6.8)$$

L'équation (6.7) est donc équivalente à:

$$T(V)(\tau) = \min_{d \in [0, T - \tau]} H(V)(\tau, d) . \quad (6.9)$$

#### 6.4 Une propriété de la fonction de coût anticipé

Montrons maintenant qu'on peut se limiter à considérer, dans  $\mathbb{B}_2$ , les fonctions monotones décroissantes en  $\tau$ , relativement à l'ordre naturel (c.-à-d. croissantes par rapport à l'ordre partiel défini au paragraphe 5.3, qui est l'inverse de l'ordre naturel). Pour ce, en vertu du théorème 5.3, il suffit de vérifier les hypothèses H2 et H4 du paragraphe 5.3.

H2 est satisfaite, puisque  $A(\tau) \equiv [0, T] \quad \forall \tau \in X$ . D'autre part, pour chaque  $d$  dans  $[0, T]$ ,  $g(\tau, d)$  est une fonction positive ( $\geq 0$ ) et décroissante en  $\tau$  et  $Q([0, \zeta] | \tau, d)$  est constant en  $\tau$  pour chaque  $\zeta$  dans  $\mathbb{R}_+$ . H4 est donc aussi satisfaite. Posons

$$\mathbb{B}_3 \equiv \{V \in \mathbb{B}_2 | V(\tau) \text{ décroissant en } \tau\} . \quad (6.10)$$

Par le théorème 5.3,  $V_*$  est dans  $\mathbb{B}_3$  et  $T(V)$  est dans  $\mathbb{B}_3$  pour chaque  $V$  dans  $\mathbb{B}_3$ .

### 6.5 La méthode des approximations successives

Nous allons utiliser l'algorithme du chapitre 3 pour tenter d'obtenir une politique  $\varepsilon$ -optimale.

On peut réécrire

$$H(V)(\tau, d) = \begin{cases} K+F(0)(V(\tau)+K(0))+\bar{F}(d)(C(d)+e^{-\rho d}V(\tau+d)) \\ + \int_0^d [C(\zeta)+e^{-\rho\zeta}(K(\zeta)+V(\tau+\zeta))] f(\zeta)d\zeta & \text{si } 0 \leq d < T-\tau \\ K+F(0)(V(\tau)+K(0))+\bar{F}(T-\tau)C(T-\tau) \\ + \int_0^{T-\tau} [C(\zeta)+e^{-\rho\zeta}(K(\zeta)+V(\tau+\zeta))] f(\zeta)d\zeta & \text{si } d \geq T-\tau \end{cases} \quad (6.11)$$

où  $f(\cdot)$  est la fonction de densité associée à  $F$  sur  $(0, \infty)$ .

Pour évaluer  $T(V)(\tau)$ , on doit minimiser  $H(V)(\tau, \cdot)$  sur  $[0, T-\tau]$ . Cette dernière fonction n'est pas nécessairement unimodale; en général, elle

peut posséder plusieurs minimums locaux. Pour trouver le minimum global, on cherchera tous les minimums locaux puis on choisira le plus petit.

Si  $V$  est dérivable (par exemple, si  $V$  est une fonction spline d'ordre 3 ou plus, elle est dérivable, et si c'est une fonction spline d'ordre 2, on peut prendre la dérivée à droite), alors la dérivée de  $H(V)(\tau, \cdot)$  sur l'intervalle  $(0, T-\tau)$  s'écrit

$$\begin{aligned}
 h(d) &= \frac{\partial}{\partial d} H(V)(\tau, d) = \bar{F}(d) [ C'(d) + e^{-\rho d} (V'(\tau+d) - \rho V(\tau+d)) ] \\
 &\quad + e^{-\rho d} \kappa(d) f(d) \\
 &= \bar{F}(d) e^{-\rho d} [ c(d) + \kappa(d) \lambda(d) + V'(\tau+d) - \rho V(\tau+d) ] \\
 &\equiv \bar{F}(d) e^{-\rho d} h(d)
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

où  $\lambda(d) \equiv f(d)/\bar{F}(d)$  est le taux de panne d'une composante d'âge  $d$ .

On peut chercher les points de l'intervalle  $(0, T-\tau)$  où  $h(d)$  passe du négatif au positif, en examinant de façon séquentielle tous les points d'un maillage donné, disons de taille  $\Delta d$ . Habituellement, en pratique, les oscillations de  $h(\cdot)$  ont une fréquence plutôt lente et il suffit d'utiliser un maillage très grossier. On devra toutefois user de prudence et bien se convaincre, par exemple en revérifiant avec un maillage plus fin ou en traçant le graphique de  $h(\cdot)$  à la dernière itération, qu'on a utilisé un maillage suffisamment fin pour trouver tous les changements de signe recherchés.

Lorsqu'un changement de signe du négatif au positif est détecté, on dispose de deux points  $p_1$  et  $p_2$  tels que  $h(p_1) < 0$  et  $h(p_2) \geq 0$ . L'endroit exact  $p_*$  où le changement de signe intervient se trouve dans

l'intervalle  $(p_1, p_2]$ . Si  $h(p_2) = 0$ , on pose  $p_* = p_2$ . Sinon, pour localiser  $p_*$ , on peut utiliser l'une ou l'autre des nombreuses méthodes disponibles pour trouver le zéro d'une fonction (Johnson et Riess (1977, chap.4)).

Nous n'allons pas considérer, ici, les méthodes exigeant la connaissance de  $h'(d)$ , parce que nous ne disposons pas toujours d'une évaluation fiable de la dérivée seconde de  $V$ .

Parmi les méthodes n'exigeant pas la connaissance de  $h'(\cdot)$ , la méthode de la sécante converge en général assez rapidement (convergence d'ordre 1.618), mais elle ne fournit pas, à la dernière itération, des bornes pour  $p_*$ . De plus, la convergence n'est assurée que si l'intervalle initial est suffisamment étroit et que si  $h(\cdot)$  y est deux fois continûment différentiable. Comme cette dernière condition est rarement vérifiée dans notre cas (si  $V$  est une fonction spline, il faudrait qu'elle soit d'ordre 5 ou plus, et que  $c$ ,  $\kappa$  et  $\lambda$  soient aussi deux fois continûment différentiables), nous ne choisirons pas cette méthode.

La méthode de la fausse position converge par ailleurs (convergence linéaire) dès que  $h(\cdot)$  est continue. A chaque itération de cette méthode, on pose

$$p_i = p_2 - \frac{h(p_2)(p_2 - p_1)}{h(p_2) - h(p_1)} \quad (6.13)$$

Si  $h(p) = 0$ , on pose  $p_* = p$  et on s'arrête. Sinon, on pose  $p_2 = p$  si  $h(p) > 0$ ,  $p_1 = p$  si  $h(p) < 0$  et on passe à l'itération suivante. A chaque itération, on est certain que  $p_*$  se trouve entre  $p_1$  et  $p_2$ . Si  $h(\cdot)$  est continue,

la suite des valeurs de  $p$  converge vers  $p_*$ , mais  $p_2 - p_1$  ne converge pas nécessairement vers 0. On s'arrête en général après un nombre d'itérations fixé a priori, disons  $N_I$ , ou lorsque  $p_2 - p_1$  est suffisamment petit, disons inférieur à  $\varepsilon_p$ , et on choisit le dernier  $p$  obtenu comme valeur approximative de  $p_*$ . Si  $h(\cdot)$  est continue (par exemple si  $c$ ,  $\kappa$  et  $\lambda$  le sont et si  $V$  est une fonction spline d'ordre 3 ou plus), on utilisera cette méthode.

Si  $h(\cdot)$  n'est pas continue (par exemple si  $V$  est une fonction spline d'ordre 2), on utilisera plutôt la méthode de bisection. Cette méthode est analogue à la précédente, mais en remplaçant (6.13) par

$$p := \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (6.14)$$

Il est clair, ici, que  $p_2 - p_1$  converge linéairement vers 0.

Pour les exemples numériques apparaissant plus loin, nous choisissons  $N_I = 40$  et  $\varepsilon_p = 10^{-10} \tau$ . Ainsi, l'erreur sur  $p_*$  est négligeable.

Evidemment, pour évaluer l'intégrale dans (6.11), on devra utiliser une méthode de quadrature. Dans les tests numériques présentés plus loin, nous utilisons la méthode de Simpson (Johnson et Riess (1977, p. 244-246)) avec un maillage régulier de taille  $\Delta\zeta$ . Si  $d$  n'est pas un multiple de  $2\Delta\zeta$ , on ajuste la taille des deux derniers intervalles du maillage à des valeurs inférieures à  $\Delta\zeta$ .

Souvent, on doit calculer  $H(V)(\tau, d)$  pour plusieurs valeurs de  $d$ .

Il n'est pas nécessaire de recalculer l'intégrale à chaque fois. Il suffit, d'une valeur de  $d$  à l'autre, de l'ajuster en ajoutant ou en retranchant les termes appropriés.

En fait, il existe des méthodes de quadrature beaucoup plus sophistiquées (méthode de Romberg, méthodes adaptatives, etc.) qui sont souvent plus efficaces numériquement que la méthode de Simpson. Mais ici, nous devons évaluer un grand nombre d'intégrales, autant que le nombre de points d'évaluation de  $T(V)$  multiplié par le nombre d'itérations. Tous les termes de la fonction à intégrer, à l'exception de  $V(\tau+\zeta)$ , ne changent pas d'une fois à l'autre. On a donc intérêt à éviter de les recalculer trop souvent. La méthode de Simpson nous permet de fixer les points du maillage et d'y calculer ces termes une fois pour toutes dès le début.

Plus précisément, avant la première itération, on calcule les valeurs de  $C(\zeta)$ ,  $e^{\rho\zeta}C(\zeta) + \kappa(\zeta)$ ,  $e^{-\rho\zeta}\bar{F}(\zeta)$  et  $e^{-\rho\zeta}f(\zeta)$  aux points  $\zeta = 0, \Delta\zeta, 2\Delta\zeta, \dots, T$  et on les mémorise. On aura pris soin, ce qui ne pose aucune difficulté, de faire en sorte que  $T$ , de même que chacun des points d'évaluation de  $T(V)$ , soient tous des multiples de  $2\Delta\zeta$ . A chaque itération, les valeurs de  $V$  sont aussi calculées et mémorisées sur ce même maillage. Pour évaluer (6.11), on peut réutiliser directement ces valeurs et diminuer ainsi les temps de calcul.

Ayant évalué  $T(V)$  en un nombre fini de points, on choisit ensuite une méthode d'approximation permettant d'obtenir  $V_1$ . Dans les exemples

qui suivent, on choisira des fonctions splines d'interpolation.

Les points 0 et T seront toujours des points d'évaluation. Notons qu'en réalité,  $T(V)(T)$  vaut toujours 0 et  $T(V)$  est discontinue à gauche en T. Mais pour faciliter l'approximation de  $T(V)$  sur  $[0, T)$  sans trop compliquer la notation, nous utiliserons ici  $T(V)(T)$  pour désigner

$$\lim_{\tau \rightarrow T^-} T(V)(\tau).$$

#### 6.6 Un exemple numérique

Posons  $T=10$ ,  $\rho=0.05$ ,  $K=5$  et  $c$ ,  $\kappa$ ,  $F$  définies, pour  $\zeta \geq 0$ , par

$$c(\zeta) = 0.1 (\zeta + e^{-\zeta}) \quad (6.15)$$

$$\kappa(\zeta) = 5 + \ln(1+\zeta) \quad (6.16)$$

$$F(\zeta) = 1 - 0.95e^{-0.05\zeta^2} \quad (6.17)$$

Ainsi, une composante neuve est défectueuse avec probabilité  $F(0) = 0.05$ . Si elle n'est pas défectueuse au départ, sa durée de vie suit une loi Weibull  $(.05, 2)$ . Le coût de panne possède une partie fixe et une partie croissante en fonction de l'âge, tandis que le coût de fonctionnement par unité de temps possède une partie décroissante en fonction de l'âge (coût d'adaptation, etc.) et une partie croissante (inefficacité due à l'usure, etc.).

La fonction de densité associée à F est

$$f(\zeta) = 0.095 \zeta e^{-0.05\zeta^2} \quad \forall \zeta > 0, \quad (6.18)$$

la fonction de survie est

$$\bar{F}(\zeta) = 0.95e^{-0.05\zeta^2} \quad \forall \zeta \geq 0, \quad (6.19)$$

le taux de panne est

$$\lambda(\zeta) \equiv f(\zeta)/\bar{F}(\zeta) = 0.1\zeta \quad \forall \zeta > 0 \quad (6.20)$$

et on a

$$\begin{aligned} C(\zeta) &\equiv \int_0^\zeta c(s)e^{-\rho s} ds \\ &= 0.1 \left[ \frac{1-e^{-(1+\rho)\zeta}}{1+\rho} + \frac{1-(1+\rho\zeta)e^{-\rho\zeta}}{\rho^2} \right] \quad \forall \zeta \geq 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Appliquons l'algorithme du chapitre 3. On calcule d'abord

$$\begin{aligned} g_1 &= \sup_{(\tau,d) \in \Gamma} g(\tau,d) = g(0,T) \\ &= K+F(0)\kappa(0)+\bar{F}(T)C(T) + \int_0^T [C(\zeta)+\kappa(\zeta)e^{-\rho\zeta}] f(\zeta)d\zeta. \\ &= 11.151 \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \int_{[0,T)} e^{-\rho\zeta} dF(\zeta) = F(0) + \int_0^T e^{-\rho\zeta} f(\zeta)d\zeta = 0.8296$$

$$\frac{g_1}{1-\delta_1} = 65.44$$

$$B_3 = \{V: [0,10) \rightarrow [5,65.44] \mid V \text{ est décroissante} \}.$$



et l'inégalité (2.35) devient:

$$n_0 \alpha_1 \geq \frac{g_1 / (1 - \delta_1) - K}{K} = 12.09 .$$

On choisit  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $n_0 = 25$  et  $V \equiv K = 5$  comme fonction initiale.

Pour les premières itérations, commençons par quelque chose de très simple. Prenons  $\Delta z = 0.1$ , calculons  $T(V)(\tau)$  pour  $\tau \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  et soit  $V_1$  la fonction linéaire par morceaux (spline d'ordre 2) interpolant les valeurs ainsi obtenues. On imprime  $\Delta(V_1, V)$ ,  $\Delta(V, V_1)$  et  $V_1(0)$  pour se faire une idée du changement intervenu et on répète le tout 15 fois, en posant  $V := V_1$  avant chaque répétition.

On obtient les résultats suivants, où N désigne le nombre de points d'évaluation et L le nombre de morceaux de polynômes.

ITERATION	N	L	DELTA(V1,V)	DELTA(V,V1)	V1(0)
1	6	5	5.229784354	0.000000000	10.229784
2	6	5	5.108389466	0.000000000	15.338174
3	6	5	4.904777417	0.000000000	20.236011
4	6	5	4.453242612	0.000000000	24.689254
5	6	5	.999987515	0.000000000	25.689241
6	6	5	.196268451	0.000000000	25.885510
7	6	5	.035344528	0.000000000	25.920854
8	6	5	.005976990	0.000000000	25.926831
9	6	5	.000962802	0.000000000	25.927794
10	6	5	.000149176	0.000000000	25.927943
11	6	5	.000022387	0.000000000	25.927966
12	6	5	.000003271	0.000000000	25.927969
13	6	5	.000000467	0.000000000	25.927970
14	6	5	.000000065	0.000000000	25.927970
15	6	5	.000000009	0.000000000	25.927970

Après la 15<sup>ième</sup> itération:

LES 6 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000      2.000000      4.000000      6.000000      8.000000      10.000000

LES VALEURS DE  $T(V)$  OBTENUES EN CES POINTS SONT :

25.92796961    21.99089235    17.76903698    12.87292845    7.84024084    5.52631579

LES VALEURS OPTIMALES DE  $D$  OBTENUES EN CES POINTS SONT :

4.301357      4.118355      3.857485      4.000000      2.000000      0.000000

Pour l'instant, ne nous préoccupons pas des critères d'arrêt. Continuons plutôt d'itérer en augmentant si possible la précision des approximations.

Intéressons-nous d'abord à la précision dans le calcul de  $T(V)(\tau)$ . Ici, cette précision dépend essentiellement de  $\Delta\zeta$ . Reprenons donc  $V=K$  comme fonction initiale et recommençons les 15 itérations en utilisant les mêmes points d'évaluation, mais cette fois-ci avec  $\Delta\zeta=0.01$ .

On obtient:

ITERATION	N	L	DELTA(V1,V)	DELTA(V,V1)	V1(0)
1	6	5	5.229784289	0.000000000	10.229784
2	6	5	5.108389283	0.000000000	15.338174
3	6	5	4.904776764	0.000000000	20.236011
4	6	5	4.453241605	0.000000000	24.689252
5	6	5	.999987053	0.000000000	25.689240
6	6	5	.195263314	0.000000000	25.885508
7	6	5	.035344514	0.000000000	25.920852
8	6	5	.005976985	0.000000000	25.926829
9	6	5	.000962801	0.000000000	25.927792
10	6	5	.000149176	0.000000000	25.927941
11	6	5	.000022387	0.000000000	25.927964
12	6	5	.000003271	0.000000000	25.927967
13	6	5	.000000467	0.000000000	25.927967
14	6	5	.000000065	0.000000000	25.927967
15	6	5	.000000009	0.000000000	25.927967

LES 6 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000      2.000000      4.000000      6.000000      8.000000      10.000000

LES VALEURS DE  $T(V)$  OBTENUES EN CES POINTS SONT :

25.92796749    21.99089068    17.76903569    12.87292761    7.84024039    5.5263157

LES VALEURS OPTIMALES DE  $D$  OBTENUES EN CES POINTS SONT :

4.301356      4.118355      3.857485      4.000000      2.000000      0.000000

Appelons  $\tilde{V}_6$  la fonction linéaire par morceaux passant par ces points, c.-à-d. la dernière fonction  $V_1$  obtenue.

Si on recommence la même chose avec  $\Delta = 0.005$ , on obtient exactement les mêmes chiffres que dans le tableau précédent.

Ainsi, en passant de  $\Delta\zeta = .01$  à  $\Delta\zeta = .005$ , les valeurs de  $T(V)$  obtenues ne changent pas, du moins pour leurs 10 premiers chiffres significatifs.  $\Delta\zeta = .01$  apparaît donc suffisamment petit pour que l'erreur dans la quadrature soit négligeable. Choisissons cette valeur pour la suite de notre expérience.

Dans ces premiers essais numériques que nous venons de faire, on voit que la suite des fonctions  $V$  converge très rapidement vers une fonction  $\tilde{V}$ , linéaire par morceaux. Mais  $\tilde{V}$  n'est certainement pas égale à  $V_*$ . En effet, l'erreur d'interpolation de  $T(V)$  à chaque itération est loin d'être négligeable. Mais on devrait s'attendre à ce que cette erreur diminue à mesure qu'on augmente le nombre de points d'évaluation. Augmentons-le donc.

Cette fois-ci, on choisit comme fonction  $V$  initiale la fonction  $\bar{V}_6$  obtenue à la fin du dernier exemple ci-haut. On prend 21 points d'évaluation  $\tau_1 = 0.0$ ,  $\tau_2 = 0.5$ , ...,  $\tau_{21} = 10.0$ . On effectue dix itérations en utilisant encore une fois des splines d'ordre 2 et on obtient:

ITERATION	N	L	DELTA(V1,V)	DELTA(V,V1)	V1(0)
1	21	20	.240529780	.484529994	25.927967
2	21	20	.088865004	.108968352	25.950476
3	21	20	.000000000	.071785483	25.943403
4	21	20	.000000000	.052971640	25.890431
5	21	20	.000000000	.024416317	25.866015
6	21	20	.000000000	.006539020	25.859476
7	21	20	.000000000	.001315792	25.858160
8	21	20	.000000000	.000220394	25.857940
9	21	20	.000000000	.000032415	25.857907
10	21	20	.000000000	.000004322	25.857903

LES 21 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000	.500000	1.000000	1.500000	2.000000	2.500000
3.000000	3.500000	4.000000	4.500000	5.000000	5.500000
6.000000	6.500000	7.000000	7.500000	8.000000	8.500000
9.000000	9.500000	10.000000			

LES VALEURS DE T(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :

25.85790307	24.96316558	23.97993057	22.95673889	21.91009528	20.84519428
19.76775567	18.69885197	17.63914358	16.61855209	15.41629862	14.08048310
12.73109965	11.39119958	10.09249974	8.87460511	7.78273473	6.86389832
6.16170067	5.71010337	5.52631579			

On remarque que les valeurs de T(V) obtenues avec N=6 ne sont pas tellement différentes de celles obtenues aux points correspondants avec N=21. Appelons  $\bar{V}_{21}$  la dernière fonction  $V_1$  obtenue ci-haut.

Reprenons comme fonction initiale la fonction  $\bar{V}_{21}$  que nous venons d'obtenir, et effectuons cinq itérations en utilisant encore des splines d'ordre 2 pour l'interpolation, mais en prenant cette-fois 41 points d'évaluation placés à intervalles réguliers. On obtient:

ITERATION	N	L	DELTA(V1,V)	DELTA(V,V1)	V1(0)
1	41	40	.055368277	.031963967	25.857903
2	41	40	.002909843	.007991508	25.857648
3	41	40	.000055863	.003892986	25.857704
4	41	40	.000000000	.003073430	25.854985
5	41	40	.000000000	.001252009	25.853733

LES 41 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000	.240000	.500000	.740000	1.000000	1.240000
1.500000	1.740000	2.000000	2.240000	2.500000	2.740000
3.000000	3.240000	3.500000	3.740000	4.000000	4.240000
4.500000	4.740000	5.000000	5.240000	5.500000	5.740000
6.000000	6.240000	6.500000	6.740000	7.000000	7.240000
7.500000	7.740000	8.000000	8.240000	8.500000	8.740000
9.000000	9.240000	9.500000	9.740000	10.000000	

LES VALEURS DE T(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :

25.85373317	25.42226069	24.95648208	24.49824685	23.97675081	23.48876295
22.95328540	22.45316135	21.90566687	21.39589207	20.84007992	20.32451445
19.76398201	19.24836465	18.69084532	18.17993713	17.63357248	17.13500147
16.61025973	16.09237300	15.40840912	14.77015512	14.07291967	13.42593748
12.72411298	12.07838986	11.38503234	10.75471135	10.08735571	9.49053585
8.87061706	8.32845844	7.77993631	7.31501643	6.86220559	6.49618461
6.16090837	5.91165253	5.70989938	5.58820139	5.52631579	

On peut reprendre comme fonction initiale le dernier  $V_1$  obtenu ici, que nous baptisons  $\bar{V}_{41}$ , et refaire cinq itérations avec 81 points d'évaluation, ce qui donne:

ITERATION	N	L	DELTA(V1,V)	DELTA(V,V1)	V(0)
1	81	80	.018577268	.008519604	25.853401
2	81	80	.000771125	.002539843	25.852984
3	81	80	.000000000	.001028626	25.852747
4	81	80	.000000000	.000772748	25.852014
5	81	80	.000000000	.000324072	25.851690

LES 81 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000	.120000	.240000	.380000	.500000	.620000
.740000	.880000	1.000000	1.120000	1.240000	1.380000
1.500000	1.620000	1.740000	1.880000	2.000000	2.120000
2.240000	2.380000	2.500000	2.620000	2.740000	2.880000
3.000000	3.120000	3.240000	3.380000	3.500000	3.620000
3.740000	3.880000	4.000000	4.120000	4.240000	4.380000
4.500000	4.620000	4.740000	4.880000	5.000000	5.120000
5.240000	5.380000	5.500000	5.620000	5.740000	5.880000
6.000000	6.120000	6.240000	6.380000	6.500000	6.620000
6.740000	6.880000	7.000000	7.120000	7.240000	7.380000
7.500000	7.620000	7.740000	7.880000	8.000000	8.120000
8.240000	8.380000	8.500000	8.620000	8.740000	8.880000
9.000000	9.120000	9.240000	9.380000	9.500000	9.620000
9.740000	9.880000	10.000000			

LES VALEURS DE T(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :

25.85169018	25.63584664	25.42022910	25.16905890	24.95461526	24.73502037
24.49695048	24.21709098	23.97547828	23.73224818	23.48745450	23.19993837
22.95191091	22.70249486	22.45175545	22.15764501	21.90429656	21.64983370
21.39450636	21.09552713	20.83843747	20.58071977	20.32286000	20.02133665
19.76274647	19.50454564	19.24630041	18.94562455	18.68912299	18.43273007
18.17823416	17.89250369	17.63097174	17.38149234	17.13374970	16.84881556
16.50648850	16.36327072	16.09035372	15.72312658	15.40641099	15.08804412
14.76819029	14.39340112	14.07100653	13.74781095	13.42408704	13.04614444
12.72234660	12.39907268	12.07671574	11.70235648	11.38347296	11.06694081
10.75327029	10.39165443	10.08605418	9.78509165	9.48937128	9.15181940
<b>8.86960669</b>	<b>8.53464651</b>	<b>8.32759259</b>	<b>8.02689849</b>	<b>7.77922575</b>	<b>7.54152844</b>
7.31444423	7.06375576	6.86177412	6.67229907	6.49587059	6.30719605
6.16070483	6.02240000	5.91153190	5.79396835	5.70984576	5.64123416
5.58818597	5.51300000	5.47300000			

Puis on baptise  $\bar{V}_{81}$  la dernière fonction  $V_1$  obtenue ici.

A ce stade-ci, on peut faire les deux remarques suivantes:

1. Pour N fixé, on voit que la suite des fonctions V converge très rapidement, au sens de la norme qu'on a définie sur  $B_2$ , vers une fonction  $\bar{V}_N$ .

2. Lorsqu'on augmente  $N$ , la fonction  $\bar{V}_N$  (approximant  $\tilde{V}_N$ ) change légèrement, mais très peu. Par exemple,  $\|\bar{V}_{81} - \bar{V}_{41}\|$  est de l'ordre de 0.02, ce qui représente une variation d'environ 0.1% seulement. Ainsi, tout porte à croire que  $\tilde{V}_{81}$  est très près de  $V_*$ . Cela est bien rassurant.

Pour calculer de véritables bornes sur  $V_*$ , on peut se servir du théorème 3.2. On calcule d'abord des bornes sur  $T(V) - V_1$  en utilisant l'écart maximum entre les valeurs de  $T(V)$  à la dernière itération, en deux points d'évaluation successifs. Plus précisément,

$$\delta^- = \delta^+ = \max_{1 \leq i \leq n-1} |T(V)(\tau_{i+1}) - T(V)(\tau_i)|. \quad (6.22)$$

Puis, on utilise (3.15-3.17) pour obtenir des bornes sur  $V_* - V_1$ .

Si on fait ces calculs à la fin de chacun des trois derniers groupes d'itérations (dix itérations avec  $N=21$ , cinq itérations avec  $N=41$ , puis cinq itérations avec  $N=81$ ) on obtient une mauvaise surprise:

	N=21	N=41	N=81
$\delta^-$	1.349	.702	.378
$\delta^+$	1.349	.702	.378
$\epsilon^-$	33.73	17.57	9.46
$\epsilon^+$	33.73	17.54	9.45
	$-67.47 \leq V_* - V_1 \leq 67.47$	$-35.15 \leq V_* - V_1 \leq 35.09$	$-18.91 \leq V_* - V_1 \leq 18.90$

Ces bornes sont vraiment trop distantes pour être utiles. De plus, l'écart entre les bornes ne tend vers 0 que de façon linéaire en

fonction de  $N$ , de sorte qu'il n'y a pas lieu d'obtenir ainsi des bornes satisfaisantes.

Par ailleurs, ce n'est certainement pas en interpolant d'une autre façon, par exemple en utilisant des splines d'ordre supérieur à 2, qu'on pourrait améliorer ces bornes de façon significative. En effet, les valeurs de  $\delta^-$  et  $\delta^+$  obtenues ici sont basées sur le pire cas, c.-à-d. le cas où  $T(V)$  est une fonction en escalier dont les sauts se situent aux points d'évaluation  $\tau_j$ . Elles ne dépendent pas de la fonction d'interpolation choisie, en autant qu'elle soit décroissante.

Mais en réalité,  $T(V)$  est une fonction continue et plutôt "régulière". Ainsi, l'écart maximum entre  $T(V)$  et  $V_1$  est certainement beaucoup plus petit que ne le laissent croire les valeurs de  $\delta^-$  et  $\delta^+$  obtenues ci-haut.

Pour cette raison, nous allons adopter une approche de type heuristique, souvent utilisée pour mesurer la qualité d'une approximation (voir de Boor (1978)), afin d'estimer l'erreur entre  $T(V)$  et  $V_1$ . Il s'agit, après avoir obtenu  $V_1$ , de réévaluer  $T(V)$  sur un maillage plus fin que celui des points d'évaluation initiaux, de calculer l'erreur réelle d'approximation  $T(V)-V_1$  en chacun des points du nouveau maillage et d'égaliser  $\delta^-$  et  $\delta^+$  à la plus petite et à la plus grande de ces erreurs respectivement.

Recalculons donc les valeurs du tableau précédent en utilisant cette approche. A la dernière itération, on interpole par une ligne brisée pour obtenir  $V_1$  puis, au lieu d'utiliser (6.22) pour calculer  $\delta^-$  et  $\delta^+$ ,

on réévalue  $T(V)$  sur un maillage cinq fois plus fin, c.-à-d. en  $5(N-1)+1$  points  $\tau_1, \dots, \tau_{5(N-1)+1}$ , et on utilise:

$$\delta^- = \max_{1 \leq i \leq 5(N-1)+1} (V_1(\tau_i) - T(V)(\tau_i)) \quad (6.23)$$

$$\delta^+ = \max_{1 \leq i \leq 5(N-1)+1} (T(V)(\tau_i) - V_1(\tau_i)) \quad (6.24)$$

On obtient ainsi les valeurs suivantes:

	N=21	N=41	N=81
$\delta^-$	.0320	.0085	.0024
$\delta^+$	.0598	.0218	.0167
$\varepsilon^-$	.799	.221	.063
$\varepsilon^+$	1.495	.544	.837
	$-1.60 \leq V_* - V_1 \leq 2.99$	$-.44 \leq V_* - V_1 \leq 1.09$	$-.13 \leq V_* - V_1 \leq .84$

Voilà qui redevient plus rassurant.

D'autre part, les valeurs de  $\delta^-$  et  $\delta^+$  obtenues de cette façon devraient maintenant dépendre de la méthode d'interpolation choisie. En choisissant des splines d'ordre supérieur à 2, peut-être pourrait-on diminuer l'écart entre  $V_1$  et  $T(V)$ ? Essayons-le.

Reprenons  $V = \bar{V}_{21}$  comme fonction initiale et refaisons dix nouvelles itérations, mais en utilisant des splines d'ordre  $k=4$  pour l'interpolation. On obtient une fonction  $V_1$  qui est polynômiale de degré 3 par morceaux, et les valeurs suivantes:



ITERATION	N	L	DELTA(V1,V)	DELTA(V,V1)	V1(0)
1	21	18	.025545615	.034310364	25.857903
2	21	18	.004611496	.007879151	25.856643
3	21	18	.000000000	.005265555	25.855460
4	21	18	.000000000	.004287908	25.851501
5	21	18	0.000000000	.001611413	25.849892
6	21	18	0.000000000	.000389058	25.849503
7	21	18	0.000000000	.000071619	25.849431
8	21	18	0.000000000	.000011077	25.849420
9	21	18	0.000000000	.000001514	25.849418
10	21	18	.000000000	.000000189	25.849418

$$\delta^- = .016, \quad \delta^+ = .042, \quad \epsilon^- = .41, \quad \epsilon^+ = 1.04$$

$$\text{et } -.82 \leq V_* - V_1 \leq 2.08.$$

Si on refait la même chose en utilisant des splines d'ordre  $k=5$ , on obtient une fonction  $V_1$  polynômiale de degré 4 par morceaux et les bornes:  $-.85 \leq V_* - V_1 \leq 2.03$ .

Dans les deux cas, pour  $N=21$ , c'est un peu mieux qu'avec les splines d'ordre 2. Et si on augmente  $N$ ?

Voyons ce qui se passe pour  $N=81$ . Reprenons  $V = \bar{V}_{81}$  comme fonction initiale et refaisons cinq itérations en utilisant des splines d'ordre 3. Puis, recommençons avec des splines d'ordre 4. On obtient<sup>1</sup>:

	N=81 k=2	N=81 k=3	N=81 k=4
$\Delta(V, V_1)$	.00008	.00010	.00018
$\Delta(V_1, V)$	.00000	.00000	.00000
$\delta^-$	.0024	.0026	.0044
$\delta^+$	.0167	.0098	.0057
$\epsilon^-$	.063	.067	.114
$\epsilon^+$	.419	.245	.143
	$-.13 \leq V_* - V_1 \leq .84$	$-.13 \leq V_* - V_1 \leq .49$	$-.23 \leq V_* - V_1 \leq .29$

<sup>1</sup> Suite à quelques tests de sensibilité additionnels sur  $\Delta\zeta$ , nous avons utilisé ici  $\Delta\zeta = .005$  plutôt que .01.

C'est avec des splines d'ordre  $k=4$  que l'écart entre les bornes est le plus petit.

Considérons donc le dernier  $V_1$  obtenu avec  $k=4$  et posons  $\underline{V} \equiv V_1 - .23$  et  $\bar{V} = V_1 + .29$ . On peut maintenant passer aux étapes 7 et 8 de l'algorithme. De façon plus spécifique, on veut maintenant réduire l'espace d'actions  $A = [0, T]$  à un intervalle  $[d_0, T]$  où  $d_0 > 0$ , ce qui permettra de passer éventuellement d'un modèle I à un modèle C.

Par le théorème 3.3, on peut éliminer de  $\Gamma$  tout  $(\tau, d)$  tel que

$$H(\underline{V})(\tau, d) - \bar{V}(\tau) > 0. \quad (6.25)$$

Posons

$$\psi(\tau, d) \equiv K + F(0)(K(0) + \underline{V}(\tau)) + \bar{F}(0)e^{-\rho d} \underline{V}(\tau + d) - \bar{V}(\tau) \quad (6.26)$$

Puisque  $\underline{V}$  est décroissante,  $\psi(\tau, d)$  est décroissante en  $d$ . Si  $d_0 > 0$  et  $\psi(\tau, d_0) > 0$ , alors pour tout  $d$  dans  $[0, d_0] \cap [0, T - \tau)$ ,

$$H(\underline{V})(\tau, d) - \bar{V}(\tau) \geq \psi(\tau, d) \geq \psi(\tau, d_0) > 0. \quad (6.27)$$

et on peut éliminer  $(\tau, d)$  de  $\Gamma$ . En outre, si  $\psi(\tau, d_0) > 0$  pour chaque  $\tau$  dans  $X$ , on peut éliminer  $[0, d_0]$  de  $A$ , puisque choisir une action  $d$  dans  $[T - \tau, T]$  équivaut à choisir  $d = T$ .

Pour éliminer de  $A$  le plus grand intervalle  $[0, d_0]$  possible, on cherchera une solution réalisable et proche de l'optimum au problème suivant:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximiser } d_0 \\ \text{sujet à } \inf_{\tau \in [0, T-d_0]} \psi(\tau, d_0) > 0 \end{array} \right\} \quad (6.28)$$

En général, le maximum n'est pas atteint par une valeur réalisable de  $d_0$ , mais il suffit de choisir  $d_0$  juste au-dessous de la borne supérieure des valeurs réalisables.

On obtient ici  $d_0 = 1.6517$  et on peut réduire l'espace d'actions à  $[1.6517, T]$ .

Mais l'équation (4.3) est maintenant vérifiée pour

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= F(0) + \int_0^{d_0} e^{-\rho\zeta} f(\zeta) d\zeta + e^{-\rho d_0} \bar{F}(d_0) \\ &= .9284 \end{aligned} \quad (6.29)$$

et on peut maintenant se ramener à un modèle C.

Voilà qui est très intéressant, puisqu'on peut maintenant recalculer les bornes sur  $V_*$  en utilisant  $n_0 = 1$  et  $\alpha_1 = .9284$ . De (3.15-3.17), on obtient:

$$V_* - V_1 \begin{cases} \geq - \frac{\delta^- + \alpha_1 \Delta(V, V_1)}{1 - \alpha_1} = .063 \\ \leq \frac{\delta^+ + \alpha_1 \Delta(V_1, V)}{1 - \alpha_1} = .079 \end{cases} \quad (6.30)$$

d'où l'on peut poser  $\underline{V} \equiv V_1 - .063$  et  $\bar{V} \equiv V_1 + .079$ .

Ayant obtenu deux nouvelles fonctions  $\underline{V}$  et  $\bar{V}$  bornant  $V_*$ , on peut résoudre de nouveau (6.28) afin d'obtenir un meilleur  $d_0$ , et ainsi de suite. Ce procédé converge très rapidement; après la troisième itération, les cinq premiers chiffres significatifs de  $\alpha_1$  ne changent plus. On obtient  $d_0 = 1.778$ ,  $\alpha_1 = .9235$  et les nouvelles bornes sur  $V_*$  sont données par:

$$-.059 \leq V_* - V_1 \leq .075 \quad (6.31)$$

Le graphique de  $V_1$  est donné à la figure 6.1.

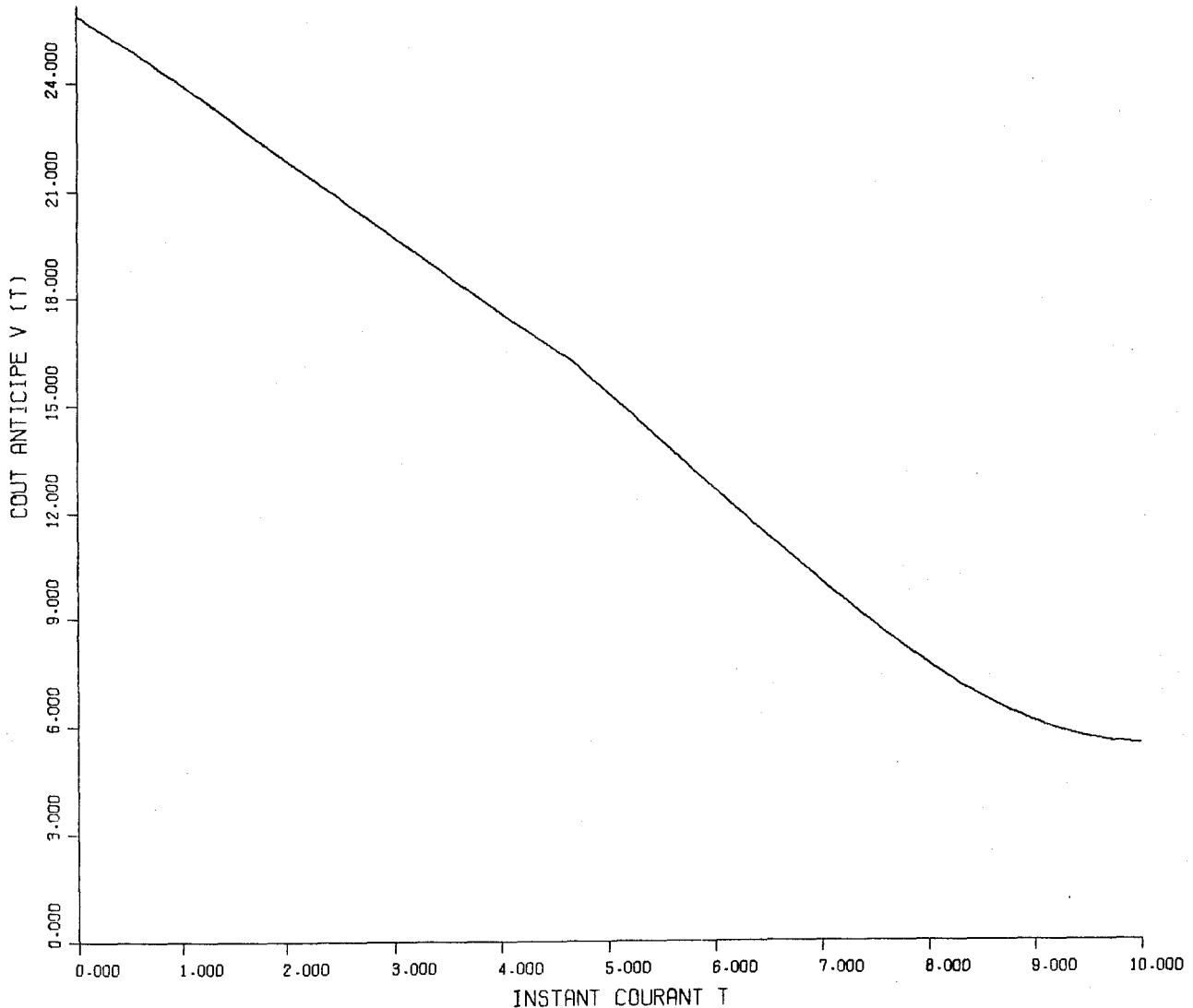


FIGURE 6.1: Graphique de  $V_1$

A noter la brisure au point  $t=4.68$ . C'est le point où l'on cesse de planifier des remplacements préventifs avant la fin de l'horizon.

Il nous reste à utiliser  $V_1$  pour trouver une bonne politique.

A la dernière itération, nous avons obtenu, pour chacun des points d'évaluation  $\tau$ , la valeur de  $d$  minimisant  $H(V)(\tau, d)$ .

LES 81 POINTS D'EVALUATION SONT :

.000000	.120000	.250000	.370000	.500000	.620000
.750000	.870000	1.000000	1.120000	1.250000	1.370000
1.500000	1.620000	1.750000	1.870000	2.000000	2.120000
2.250000	2.370000	2.500000	2.620000	2.750000	2.870000
3.000000	3.120000	3.250000	3.370000	3.500000	3.620000
3.750000	3.870000	4.000000	4.120000	4.250000	4.370000
4.500000	4.620000	4.750000	4.870000	5.000000	5.120000
5.250000	5.370000	5.500000	5.620000	5.750000	5.870000
6.000000	6.120000	6.250000	6.370000	6.500000	6.620000
6.750000	6.870000	7.000000	7.120000	7.250000	7.370000
7.500000	7.620000	7.750000	7.870000	8.000000	8.120000
8.250000	8.370000	8.500000	8.620000	8.750000	8.870000
9.000000	9.120000	9.250000	9.370000	9.500000	9.620000
9.750000	9.870000	10.000000			

LES VALEURS OPTIMALES DE  $d$  OBTENUES EN CES POINTS SONT :

3.929869	3.903084	3.873875	3.843882	3.811000	4.438992
4.433073	4.427602	4.419204	4.409462	4.396661	4.382681
4.365166	4.346779	4.324458	4.301634	4.274540	4.247365
4.215640	4.184300	4.148173	4.112882	4.072624	4.033652
3.989547	3.947164	3.899510	3.853983	3.803072	3.754664
3.700764	3.649725	3.593098	3.539650	3.480535	3.424896
3.363510	3.305869	5.25	5.13	5.00	4.88
4.75	4.63	4.50	4.38	4.25	4.13
4.00	3.88	3.75	3.63	3.50	3.38
3.25	3.13	3.00	2.88	2.75	2.63
2.50	2.38	2.25	2.13	2.00	1.88
1.75	1.63	1.50	1.38	1.25	1.13
1.00	.88	.75	.63	.50	.38
.25	.13	0.00			

On remarque d'abord que le  $d$  optimal ne varie pas continûment en fonction de  $\tau$ . On voit qu'il y a deux points de discontinuité, l'un étant situé entre  $\tau = .50$  et  $\tau = .62$ , l'autre entre  $\tau = 4.62$  et  $\tau = 4.74$ . On peut déterminer la position de ces points de discontinuité de façon plus précise en utilisant une méthode de bisection et on trouve qu'ils sont situés à  $\tau = 0.60$  et  $\tau = 4.68$ .

Si on interpole les valeurs de  $d$  sur  $[0, 0.60)$ , puis sur  $[0.60, 4.68)$ , en utilisant des splines d'ordre 4 sur chacun de ces intervalles, on obtient une fonction de  $\tau$ , continue à droite, que l'on peut baptiser  $\mu$ . On peut aussi poser  $\mu(\tau) = T - \tau$  pour chaque  $\tau$  dans  $[4.68, T]$  et la fonction  $\mu: X \rightarrow A$  définit alors une politique NA.

Il s'agit maintenant d'obtenir  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$$T_\mu(V) \leq V_1 + \varepsilon_0. \quad (6.32)$$

Pour ce, adoptons la même approche "heuristique" qui nous a permis d'estimer  $\delta^-$  et  $\delta^+$ . Pour estimer  $\varepsilon_0$ , on réévalue  $H(V)(\tau, \mu(\tau)) - V_1(\tau)$  sur un maillage très fin. On peut même, si désiré, raffiner davantage autour des points de discontinuité de  $\mu$ . Ici, heureusement, la valeur de  $H(V)(\tau, \mu(\tau))$  dans un petit voisinage d'un point de discontinuité de  $\mu$  est stable par rapport à un léger déplacement du point de discontinuité, et cela est dû à la continuité de  $V_1$  et de  $H(V)$ .

Enfin, on pose  $\varepsilon_0$  égal au maximum de toutes les valeurs obtenues.

On obtient ici  $\varepsilon_0 = .0355$ .

On calcule aussi

$$d_1 \equiv \inf \{ \mu(\tau) \mid \tau \in X \text{ et } \mu(\tau) < T - \tau \}$$

$$= 3.28$$

et

$$\alpha \equiv F(0) + \int_0^{d_1} e^{-\rho \zeta} f(\zeta) d\zeta + e^{-\rho d_1} \bar{F}(d_1)$$

$$= .877$$

satisfait (3.27). La politique  $\mu$  est donc  $\varepsilon$ -optimale pour

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^- + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \Delta(V, V_1 - \varepsilon^-) + \varepsilon_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta(V_1 + \varepsilon_0, V) \\ &\leq \frac{\varepsilon^- + \alpha_1 \Delta(V, V_1)}{1-\alpha_1} + \frac{\varepsilon_0 + \alpha \Delta(V_1, V)}{1-\alpha} \\ &= .83 \end{aligned}$$

Cette politique est illustrée à la figure 6.2

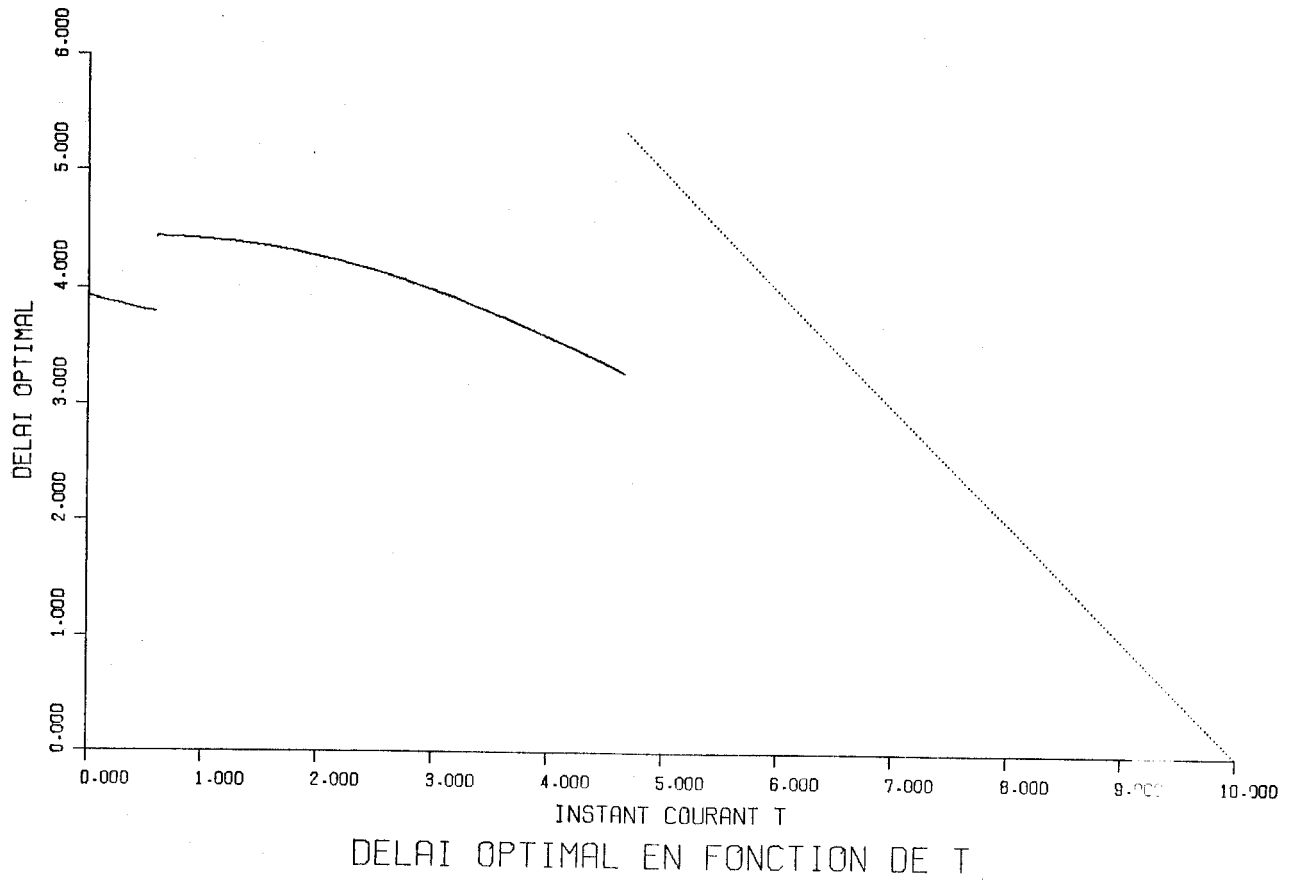


Figure 6.2 - Graphique de la politique  $\mu(\cdot)$

Pour  $\tau \geq 4.68$ , aucun remplacement préventif n'est planifié. Si  $\tau \in [0.60, 4.68)$ , un remplacement préventif est planifié à un instant situé entre 4.68 et  $T = 10$ , et si cet instant est atteint avant que ne survienne une prochaine panne, aucun nouveau remplacement préventif ne sera planifié. Si  $\tau < 0.60$ , au moins deux remplacements auront lieu, le premier remplacement préventif étant prévu à un instant situé dans l'intervalle  $[0.60, 4.68)$ .

Si on allonge l'horizon  $T$ , la nouvelle fonction  $\mu$  sera égale, sur  $[T-10, T]$ , à celle obtenue ici, et aura d'autres discontinuités à gauche de  $T-10$ . De plus, la hauteur des sauts de  $\mu(\cdot)$  en ces points de discontinuité diminuera au fur et à mesure qu'on s'éloignera, vers la gauche, de l'instant terminal  $T$ . Lorsque  $T-\tau$  tend vers l'infini,  $\mu(\tau)$  converge vers une valeur  $d_*$  qui correspond au seuil optimal pour une politique de remplacement selon l'âge associée au modèle sur horizon infini.

## 6.7 Remarques

1. Dans l'exemple numérique que nous venons de traiter, la recherche de bornes sur l'erreur a augmenté considérablement la quantité de travail requise. Il arrive souvent, comme c'est le cas ici, qu'il coûte beaucoup plus cher d'obtenir des "bornes" sur l'erreur que d'obtenir une bonne solution. Dans bien des cas, en pratique, on pourra prendre le risque de s'arrêter dès qu'on aura "de bonnes raisons de croire" que la solution dont on dispose est à peu près optimale. Ici, par exemple, voyant que  $\|\bar{V}_{81} - \bar{V}_{41}\|$  était presque nulle, nous aurions fort bien pu nous contenter de choisir  $\bar{V}_{81}$  pour approximer  $V_*$ . Nous serions arrivés,



de cette façon, à une solution à toutes fins pratiques identique à celle que nous avons obtenue.

2. A noter aussi que si  $V_1$  est une fonction spline d'interpolation d'ordre relativement élevé (4 ou plus, par exemple), il est alors essentiel de calculer  $T(V)$  aux points d'évaluation avec beaucoup de précision. Sinon, les erreurs sur les valeurs de  $T(V)$  auront tendance à faire osciller  $V_1$ , surtout si les points d'évaluation sont très rapprochés. Si on ne veut pas ou ne peut pas calculer  $T(V)$  avec beaucoup de précision, il est préférable d'utiliser une méthode d'approximation de moindres carrés pour obtenir  $V_1$ . A noter cependant que l'utilisation de telles méthodes est en général très coûteuse.



## CHAPITRE 7

### UN MODELE DE REMPLACEMENT SELON L'AGE AVEC POSSIBILITE DE REPARATION MINIMALE LORS D'UNE PANNE.

#### 7.1 Introduction

Reprenons l'exemple 1.1 de l'introduction. On suppose que, lors d'une panne, on peut ou bien remplacer la composante, ou bien effectuer une réparation minimale qui la ramène en état de fonctionner sans modifier son âge.

La composante est dans l'état  $(t, 0)$  si elle est d'âge  $t$  et en état de fonctionner. Elle est dans l'état  $(t, r)$  si elle est en panne, d'âge  $t$  et si on peut la ramener dans l'état  $(t, 0)$  au coût  $r$ . Dans ce dernier cas, choisir l'action  $(0, d)$  correspond à effectuer la réparation minimale (ramener la composante à l'état  $(t, 0)$  au coût  $r$ ) et fixer à  $d$  le délai jusqu'au prochain remplacement planifié. Choisir l'action  $(1, d)$  correspond à remplacer la composante par une composante neuve (la ramener dans l'état  $(0, 0)$  à un coût  $K > 0$ ) et fixer à  $d$  le délai jusqu'au prochain remplacement planifié. Dans les deux cas, si aucune panne ne survient durant ce délai, la composante est obligatoirement remplacée (ramenée dans l'état  $(0, 0)$ ) dès l'expiration du délai, au coût de remplacement  $K$ . Si la composante tombe en panne à l'âge  $t + \xi$ ,  $\xi \in [0, d)$ , un coût de panne aléatoire, d'espérance mathématique  $\kappa(t+\xi)$  et dont la loi de probabilité ne dépend que

de  $t + \zeta$ , est encouru lors de la panne. Le coût de la réparation minimale de cette panne est une variable aléatoire dont la loi de probabilité ne dépend que de  $t + \zeta$  et est notée  $R(\cdot | t + \zeta)$ . On pourra observer la valeur  $r'$  prise par cette variable avant de choisir une action  $(0, d)$  ou  $(1, d)$  appropriée. L'état du système à cet instant sera précisément  $(t + \zeta, r')$ .

Pour une composante d'âge  $t$ , un coût de fonctionnement est encouru au taux  $c(t)$  et le taux de panne est  $\lambda(t)$ . Enfin, tous les coûts sont actualisés au taux  $\rho > 0$  et on cherche à minimiser le coût espéré total actualisé sur horizon infini.

## 7.2 Hypothèses et description du modèle de PRMC

On fait les hypothèses suivantes:  $R$  est un noyau stochastique Borel-mesurable continu sur  $\mathbb{R}_+ | \mathbb{R}_+$ ,  $\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue,  $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  sont des fonctions mesurables bornées sur chaque intervalle fini, et il existe  $b > 0$  tel que pour chaque  $\zeta$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\frac{c(\zeta)}{\lambda(\zeta)} + \kappa(\zeta) \geq b. \quad (7.1)$$

$K > 0$  est le coût de remplacement,  $\rho > 0$  est le taux d'actualisation et  $T = \infty$ .

Soient  $S = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  l'espace d'états,  $A = \{0,1\} \times [0,\infty]$  l'espace d'actions et  $\Gamma = S \times A$ .

Pour chaque  $t$  et chaque  $\zeta$  dans  $\mathbb{R}_+$ , soient  $\bar{F}(t) \equiv e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}$ ,  
 $\bar{F}(t+\zeta|t) \equiv \bar{F}(t+\zeta)/\bar{F}(t)$ ,  $F(t) = 1-\bar{F}(t)$ ,  $F(t+\zeta|t) = 1-\bar{F}(t+\zeta|t)$ ,  
 $f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \lambda(t) \bar{F}(t)$  et  $f(t+\zeta|t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} F(t+\zeta|t) = \lambda(t+\zeta) \bar{F}(t+\zeta|t)$ .

Ce sont là des expressions bien connues en théorie de la fiabilité (voir Barlow et Proschan (1965)).  $F(\cdot)$  est la fonction de répartition de l'âge de la composante à sa première panne,  $F(\cdot|t)$  est la fonction de répartition de l'âge à la prochaine panne sachant qu'on a une composante d'âge  $t$ .  $f(\cdot)$  et  $f(\cdot|t)$  sont les fonctions de densité correspondantes. A noter que, contrairement au chapitre précédent, on suppose ici que  $F(0) = 0$ .

Soit  $Q$  le noyau stochastique Borel-mesurable continu sur  $\mathbb{R}_+ \times S \mid S \times A$  défini par

$$Q(\underline{Y}|t,r,i,d) = \begin{cases} \int_0^d R(\{r'|(\zeta, t+\zeta, r') \in \underline{Y}\} | t+\zeta) f(t+\zeta|t) d\zeta \\ \quad + \bar{F}(t+d|t) \mathbb{1}_{(d,0,0) \in \underline{Y}} & \text{si } i=0 \\ Q(\underline{Y}|0,0,0,d) & \text{si } i=1 \end{cases} \quad (7.2)$$

$\forall \underline{Y} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times S)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $d \in [0, \infty]$ .  $Q$  est Borel-mesurable et continu, puisque  $R$  l'est.  $Q(\zeta|\cdot)$  désignera aussi  $Q([0, \zeta] \times S | \cdot)$ .

Soit  $g: S \times A \rightarrow \mathbb{R}$  définie par:

$$g(t,r,i,d) = \begin{cases} r + \int_0^d \left( \int_0^\zeta e^{-\rho s} c(t+s) ds + e^{-\rho \zeta} \kappa(t+\zeta) \right) f(t+\zeta|t) d\zeta \\ \quad + \bar{F}(t+d|t) \left( \int_0^d e^{-\rho s} c(t+s) ds + K e^{-\rho d} \right) & \text{si } i=0 \\ K + g(0,0,0,d) & \text{si } i=1. \end{cases} \quad (7.3)$$

$g$  est une fonction continue et  $g(t,r,i,d)$  représente le coût espéré pour la prochaine étape si on se trouve dans l'état  $(t,r)$  et on choisit l'action  $(i,d)$ .

Vérifions maintenant que la structure  $(S,A,I,Q,g,\rho)$  satisfait les conditions d'un modèle de PRMC homogène, version I.

Une politique NA est une fonction  $\mathcal{U}$ -mesurable  $\mu:S \rightarrow A$ . Soit  $\tilde{d} \in (0, \infty)$ . La politique  $\tilde{\mu} \in \mathcal{U}_{NA}$  définie par  $\tilde{\mu}(t,r) = (1, \tilde{d})$  pour chaque  $(t,r)$  dans  $S$  est telle que

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho\zeta} Q(d\zeta | t, r, \tilde{\mu}(t, r)) = \int_0^{\tilde{d}} e^{-\rho\zeta} f(\zeta) d\zeta + \bar{F}(\tilde{d}) e^{-\rho\tilde{d}} \equiv \delta_1(\tilde{d}) < 1 \quad (7.4)$$

de sorte que la condition (4.5) est satisfaite.

Pour vérifier les autres conditions, nous allons réécrire la fonction  $g$  de façon différente. D'abord, par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^d \int_0^{\zeta} e^{-\rho s} c(t+s) ds f(t+\zeta | t) d\zeta \\ &= \int_s^d \int_s^d e^{-\rho s} c(t+s) f(t+\zeta | t) d\zeta ds \\ &= \int_0^d e^{-\rho s} c(t+s) [F(t+d | t) - F(t+s | t)] ds \\ &= \int_0^d e^{-\rho s} c(t+s) [\bar{F}(t+s | t) - \bar{F}(t+d | t)] ds. \end{aligned} \quad (7.5)$$

En utilisant (7.3), (7.5) et puisque  $f(t+\zeta|t) = \lambda(t+\zeta)\bar{F}(t+\zeta|t)$ , on obtient

$$g(t,r,0,d) = r + \int_0^d [c(t+\zeta) + \lambda(t+\zeta)\kappa(t+\zeta)] \bar{F}(t+\zeta|t) e^{-\rho\zeta} d\zeta \\ + K\bar{F}(t+d|t) e^{-\rho d} . \quad (7.6)$$

Suite aux hypothèses faites au début de ce paragraphe, la fonction  $c+\lambda\kappa$  est bornée sur  $[0,d]$ .

De (7.3) et (7.6), on tire, pour chaque  $(t,r)$  dans  $S$ ,

$$g(\tau,r,1,d) = K + g(0,0,0,d) \\ \leq K(1 + \bar{F}(d)e^{-\rho d}) + \int_0^d [c(\zeta) + \lambda(\zeta)\kappa(\zeta)] \bar{F}(\zeta) e^{-\rho\zeta} d\zeta \\ \equiv K_3(d) < \infty \quad (7.7)$$

Aussi, par (7.1), pour chaque  $(\tau,r,i,d)$  dans  $\Gamma$

$$g(t,r,i,d) \geq b \int_0^d f(t+\zeta|t) e^{-\rho\zeta} d\zeta + K\bar{F}(t+d|t) e^{-\rho d} \\ \geq \min(b,k) \int_0^\infty e^{-\rho\zeta} Q(d_\zeta|t,r,i,d) . \quad (7.8)$$

Les hypothèses du modèle I sont donc satisfaites pour

$$K_1 = 0, \quad K_2 = \min(b,k), \quad g_1 = K_3(\tilde{d}) \quad \text{et} \quad \delta_1 = \delta_1(\tilde{d}).$$

On a aussi  $B_2 = \{V: S \rightarrow [0, \frac{g_1}{1-\delta_1}] \mid V \text{ est s.a.i.}\}$ .

Evidemment, en pratique, on choisira  $\tilde{d}$  de façon à minimiser  $\frac{g_1}{1-\delta_1}$  si c'est possible. Si  $\inf_{d>0} \frac{K_3(d)}{1-\delta_1(d)}$  n'est pas atteint pour une valeur finie de  $d$ , on choisira  $\tilde{d}$  de façon à s'approcher de l'infimum.

Pour chaque  $V$  dans  $B_2$ ,  $(t,r)$  dans  $S$  et  $(i,d)$  dans  $A$ , on a

$$H(V)(t,r,i,d) = g(t,r,i,d) + \int_0^\infty e^{-\rho\zeta} \int_0^\infty V(t+\zeta, r') Q(d\zeta, \mathbb{R}_+, dr' | t, r, i, d)$$

$$= \begin{cases} r + \int_0^d [c(t+\zeta) + \lambda(t+\zeta) [\kappa(t+\zeta) + \int_0^\infty V(t+\zeta, r') R(dr' | t+\zeta)]] \bar{F}(t+\zeta | t) e^{-\rho\zeta} d\zeta \\ \quad + \bar{F}(t+d | t) e^{-\rho d} (K+V(0,0)) & \text{si } i=0 \\ K+H(V)(0,0,0,d) & \text{si } i=1 \end{cases} \quad (7.9)$$

$$(7.10)$$

$$T(V)(t,r) = \inf_{(i,d) \in A} H(t,r,i,d) \quad (7.11)$$

et

$$V_*(t,r) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V)(t,r) \quad (7.12)$$

De plus,  $H(V)(t,r,0,d)$  est continue en  $d$  sur le compact  $[0, \infty]$ . L'infimum dans (7.11) est donc atteint et, par la Proposition 2.13, il existe une politique optimale  $\mu_*$  dans  $U_{NA}$ .

Pour chaque  $V$  dans  $B_2$ , on peut définir  $\psi(V): \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$  et  $J(V): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\psi(V)(t) \equiv \arg \min_{d \in [0, \infty]} H(V)(t,0,0,d) \quad (7.13)$$



$$J(V)(t) \equiv \min_{d \in [0, \infty]} H(V)(t, 0, 0, d) \quad (7.14)$$

et réécrire (7.11):

$$T(V)(t, r) = \min(r + J(V)(t), K + J(V)(0)). \quad (7.15)$$

La politique  $\mu_*$  définie par

$$\mu_*(t, r) = \begin{cases} (0, \psi(V_*)(t)) & \text{si } r < K + J(V_*)(0) - J(V_*)(t) \\ (1, \psi(V_*)(0)) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.16)$$

est optimale.

### 7.3 Politiques avec seuil de réparation

Nous appellerons politique avec seuil de réparation une politique  $\mu$  de la forme

$$\mu(t, r) = \begin{cases} (0, d(t) - t) & \text{si } r < \ell(t) \\ (1, d(0)) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.17)$$

où  $\ell: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \bar{r}]$  et  $d: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$  sont des fonctions mesurables quelconques. Ce genre de politique généralise le concept de "repair limit" introduit par Drinkwater et Hastings (1967).

Dans le modèle présenté par ces auteurs, il n'y a ni coût de fonctionnement ni coût de panne ( $c \equiv \kappa \equiv 0$ ), et le coût de remplacement est

une constante  $K > 0$ . On suppose que pour chaque entier  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\lambda(t)$  est constant en  $t$  sur  $[n-1, n)$  et  $R(\cdot|t)$  est une loi exponentielle dont la moyenne est constante en  $t$  sur  $[n-1, n)$ . On cherche un entier  $N$  et un ensemble de seuils  $\ell_0, \dots, \ell_{N-1}$  tels que la politique définie par

$$\mu(t, r) = \begin{cases} (0, N-t) & \text{si } t < N \text{ et } r < \ell_{\lfloor t \rfloor} \\ (1, N) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.18)$$

où  $\lfloor t \rfloor$  désigne le plus grand entier inférieur ou égal à  $t$ , minimise le coût espéré moyen par unité de temps, sur horizon infini.

Ce modèle fut motivé par le problème de remplacement des véhicules de l'armée anglaise. Les auteurs ont proposé deux méthodes pour déterminer les valeurs "optimales" de  $N, \ell_0, \dots, \ell_{N-1}$ . L'une de ces méthodes utilise la simulation et les deux ne fournissent que des approximations très grossières des valeurs optimales. Une méthode plus précise, utilisant la programmation non-linéaire, fut proposée par Beichelt et Fisher (1980).

Cléroux *et al.* (1979) considèrent par ailleurs un modèle sans coût de fonctionnement, avec coût de panne et coût de remplacement constants. Le coût de réparation minimale lors d'une panne est une variable aléatoire dont la distribution de probabilité ne dépend pas de l'âge de la composante ( $R(\cdot|t) \equiv R(\cdot) \forall t \in \mathbb{R}_+$ ). Pour  $\ell_* \in \mathbb{R}_+$  fixé a priori, on se limite aux politiques  $\mu$  de la forme

$$\mu(t,r) = \begin{cases} (0, d_* - t) & \text{si } t < d_*, r < l_* \\ (1, d_*) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.19)$$

où  $d_* \in [0, \infty]$ . On cherche la valeur de  $d_*$  (si elle existe) qui minimise le coût espéré moyen par unité de temps. Si  $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue et strictement croissante vers l'infini, alors il existe une valeur optimale finie et unique pour  $d_*$  et les auteurs présentent un algorithme permettant de la calculer.

Mise à part la différence dans le choix de la fonction objectif (ces auteurs s'intéressent au coût moyen par unité de temps, tandis qu'ici on suppose un taux d'actualisation strictement positif), le modèle que nous étudions dans ce chapitre-ci généralise ceux de Drinkwater et Hastings (1967) et de Cléroux *et al.* (1979).

#### 7.4 Un cas où la politique optimale a une forme simple

Le prochain théorème permettra de mieux caractériser, dans certains cas, les fonction  $V_*$ ,  $\psi(V_*)$  et la politique optimale. Il donne des conditions suffisantes pour qu'on puisse se limiter aux fonction de  $\mathbb{B}_2$  qui sont croissantes, et pour que l'ensemble des états pour lesquels il est optimal de remplacer la composante soit un ensemble croissant. Sous ces conditions, la politique optimale aura une forme relativement simple et sera facile à calculer.

Définissons d'abord

$$\mathbb{B}_4 \equiv \{J: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \frac{g_1}{1-\delta_1}] \mid J \text{ est croissante, s.a.i. et } J(0) \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} - K\}$$

$$\mathbb{B}_5 \equiv \{V \in \mathbb{B}_2 \mid V(t,r) = \min(r+J(t), K+J(0)) \text{ pour un } J \text{ dans } \mathbb{B}_4\} .$$

Pour chaque  $J$  dans  $\mathbb{B}_4$ , définissons aussi  $G(J): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\ell(J)$  par

$$G(J)(t) \equiv c(t) + \lambda(t) \left[ \kappa(t) + \int_0^{K+J(0)-J(t)} (r - K + J(t) - J(0)) R(dr|t) \right] - \rho(K+J(0)) \quad (7.20)$$

$$\ell(J) \equiv \inf \{t \geq 0 \mid G(J)(t) \geq 0\} . \quad (7.21)$$

THEOREME 7.1 Supposons que  $\lambda(t)$  et

$$\Lambda(t) \equiv c(t) + \lambda(t) \left[ \kappa(t) + \int_{[0,K]} (r-K) dR(r|t) \right] \quad (7.22)$$

sont croissants en  $t$ , et  $\lambda(t)R(\underline{B}|t)$  est croissant en  $t$  pour chaque  $\underline{B}$  sous-ensemble croissant de  $\mathbb{R}_+$ .

a) Si  $J$  est dans  $\mathbb{B}_4$  et  $V$  défini par

$$V(t,r) = \min(r+J(t), K+J(0)) \quad (7.23)$$

est dans  $\mathbb{B}_5$ , alors

$$J(V)(t) = \begin{cases} H(V)(t,0,0,\ell(J)-t) & \text{si } t \leq \ell(J) \\ K + V(0,0) & \text{si } t > \ell(J) \end{cases} . \quad (7.24)$$

De plus,  $J(V)$  est dans  $\mathbb{B}_4$  et  $T(V)$  est dans  $\mathbb{B}_5$ .

b)  $V_*$  est dans  $\mathbb{B}_5$ ,  $J_* \equiv J(V_*)$  est dans  $\mathbb{B}_4$ ,

$$V_*(t,0) = J_*(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (7.25)$$

et si  $d_* \equiv \ell(J_*)$ , la politique  $\mu_*$  définie par

$$\mu_*(t,r) = \begin{cases} (0, d_* - t) & \text{si } t < d_* \text{ et } r < K + J_*(0) - J_*(t) \\ (1, d_*) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.26)$$

est optimale. Cette politique est illustrée à la figure 7.1.

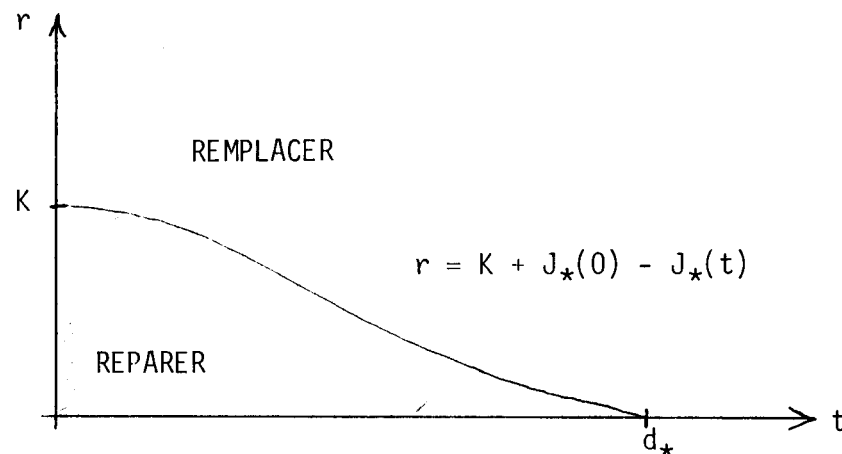


FIGURE 7.1: Forme de la politique optimale.

### Preuve

a) Soient  $V$  dans  $\mathbb{B}_5$  et  $J$  dans  $\mathbb{B}_4$  vérifiant (7.23).

De (7.9) et (7.20), on a

$$\frac{\partial}{\partial d} H(V)(t,0,0,d) = e^{-\rho d} \bar{F}(t+d|t)G(J)(t+d). \quad (7.27)$$

Aussi, de (7.20) et (7.22),

$$G(J)(t) = \Lambda(t) + \lambda(t) \left[ \int_0^{\infty} (J(t) - J(0)) R(dr|t) + \int_{(K, \infty)} (r - K) R(dr|t) \right] - \rho(K + J(0)) \quad (7.28)$$

Par (7.22) et le lemme 5.2a (puisque  $J$  est croissante et par l'hypothèse du théorème),  $G(J)(t)$  est croissante en  $t$ . Ainsi,  $G(J)(t) < 0 \forall t < \ell(J)$  et  $G(J)(t) \geq 0 \forall t > \ell(J)$ . On a donc

$$\frac{\partial}{\partial d} H(t,0,0,d) \begin{cases} < 0 & \text{si } d < \ell(J) - t \\ \geq 0 & \text{si } d > \ell(J) - t \end{cases} \quad (7.29)$$

ce qui implique que  $H(V)(t,r,0,d)$  est croissante en  $d$  sur  $[0, \infty]$  si  $t \geq \ell(J)$ , décroissante en  $d$  sur  $[0, \infty]$  si  $\ell(J) = \infty$ , décroissante en  $d$  sur  $[0, \ell(J) - t]$  et croissante sur  $[\ell(J) - t, \infty]$  si  $t < \ell(J) < \infty$ , et l'infimum dans  $\inf_{d \in [0, \infty]} H(V)(t,r,0,d)$  est atteint pour  $d = \min(0, \ell(J) - t)$ .

On obtient ainsi (7.24).

De (7.26), on a d'autre part

$$V(0,0) = \min(J(0), K + J(0)) = J(0) \quad (7.30)$$

et de (7.14),

$$J(V)(t) \leq K + V(0,0) = K + J(0) \leq \frac{g_1}{1 - \delta_1} \quad (7.31)$$

Par la proposition 2.8,  $T(V)$  est aussi dans  $B_2$ , d'où

$$T(V)(0,K) \equiv \min (K+J(V)(0), K+J(V)(0)) \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} \quad (7.32)$$

et donc

$$J(V)(0) \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} - K. \quad (7.33)$$

Le fait que  $J(V)$  soit aussi s.a.i. découle de A.1 et A.6 de l'appendice A.

Il ne reste plus qu'à montrer que  $J(V)$  est croissante et par (7.24), il suffit de le montrer pour  $t \leq \ell(J)$ .

Soient  $0 \leq t_1 < t_2 < \ell(J)$  et posons  $d_2 \equiv \ell(J) - t_2$ .

On a alors

$$\begin{aligned} J(V)(t_2) &= H(V)(t_2, 0, 0, d_2) \\ &= \int_{t_2}^{t_2+d_2} e^{-\rho(t'-t_2)} \bar{F}(t'|t_2) [G(J)(t') + (\lambda(t') + \rho)(K+V(0,0))] dt' \\ &\quad + \bar{F}(t_2+d_2|t_2) e^{-\rho d_2} (K+V(0,0)). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Pour chaque  $t' \in [t_2, \ell(J)]$ , soit  $\phi(t')$  tel que

$$\int_{t_1}^{\phi(t')} (\lambda(s) + \rho) ds = \int_{t_2}^{t'} (\lambda(s) + \rho) ds. \quad (7.35)$$

Puisque  $\int_{t_1}^t (\lambda(s) + \rho) ds$  est strictement croissante et continue en  $t$ , que

$$\int_{t_1}^{t_1} (\lambda(s)+\rho)ds = 0 \leq \int_{t_2}^{t'} (\lambda(s)+\rho)ds \text{ et que } \int_{t_1}^{t'} (\lambda(s)+\rho)ds > \int_{t_2}^{t'} (\lambda(s)+\rho)ds ,$$

il est clair qu'un tel  $\phi(t')$  existe, est unique et  $t_1 \leq \phi(t') < t'$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \bar{F}(t'|t_2)e^{-\rho(t'-t_2)} \\ & \quad - \int_{t_2}^{t'} \lambda(s)ds - \rho(t'-t_2) \\ & = e \\ & \quad - \int_{t_2}^{t'} (\lambda(s)+\rho)ds \\ & = e \\ & \quad - \int_{t_1}^{\phi(t')} (\lambda(s)+\rho)ds \\ & = e \\ & \quad - \int_{t_1}^{\phi(t')} \lambda(s)ds - \rho(\phi(t')-t_1) \\ & = e \\ & = \bar{F}(\phi(t')|t_1)e^{-\rho(\phi(t')-t_1)} \end{aligned} \tag{7.36}$$

De plus, en dérivant de part et d'autre de (7.32) par rapport à  $t'$  et puisque  $\lambda$  est une fonction croissante, on a

$$\frac{d\phi(t')}{dt'} = \frac{\lambda(t')+\rho}{\lambda(\phi(t'))+\rho} \geq 1. \tag{7.37}$$

Posons  $d_1 \equiv \phi(d_0(V)) - t_1$ .



En utilisant (7.36), (7.37), le fait que  $G(J)$  est croissante et négative sur  $[0, \ell(J))$ , et en effectuant le changement de variable  $t = \phi(t')$ , on obtient:

$$\begin{aligned}
J(V)(t_2) &\geq \int_{t_2}^{t_2+d_1} e^{-\rho(\phi(t')-t_1)} \bar{F}(\phi(t')|t_1) \left[ \frac{G(J)(\phi(t'))}{\lambda(\phi(t')) + \rho} + K+V(0,0) \right] (\lambda(t')+\rho) dt' \\
&\quad + \bar{F}(t_1+d_1|t_1) e^{-\rho d_1} (K+V(0,0)) \\
&= \int_{t_1}^{t_1+d_1} e^{-\rho(t-t_1)} \bar{F}(t|t_1) \left[ \frac{G(J)(t)}{\lambda(t) + \rho} + K+V(0,0) \right] (\lambda(t) + \rho) dt \\
&\quad + \bar{F}(t_1+d_1|t_1) e^{-\rho d_1} (K+V(0,0)) \\
&= H(V)(t_1, 0, 0, d_1) \\
&\geq \inf_{d \geq 0} H(V)(t_1, 0, 0, d) \\
&= J(V)(t_1).
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Cela complète la preuve de a.

b) Par a,  $V \in \mathbb{B}_5 \Rightarrow T(V) \in \mathbb{B}_5$ . Ainsi, puisque  $\mathbb{B}_5$  est fermé,  $V_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(V)$  est aussi dans  $\mathbb{B}_5$ . Par a,  $J_* = J(V_*)$  est donc dans  $\mathbb{B}_4$  et on a

$$V_*(t, r) = T(V_*)(t, r) = \min(r + J_*(t), K + J_*(0)) \tag{7.39}$$

Par (7.14) et (7.30)

$$J_*(t) \leq K + V_*(0, 0) = K + J_*(0) \tag{7.40}$$

d'où

$$V_*(t,0) = J_*(t) \quad \forall t \geq 0.$$

L'équation (7.26) découle de (7.16) □

Sous les hypothèses du théorème 7.1, on peut adapter l'algorithme du chapitre 3 comme suit.

On peut d'abord se restreindre aux fonctions  $V$  de  $\mathbb{B}_5$ . De plus, chacune de ces fonctions est déterminée de façon unique par une fonction  $J$  de  $\mathbb{B}_4$  et on travaille avec  $J$  plutôt qu'avec  $V$  (on travaille sur  $V$  implicitement). A l'étape 1, on peut choisir  $J \equiv 0$ . L'étape 2 de l'algorithme peut se détailler comme suit:

- a) Trouver  $\ell(J)$  satisfaisant l'équation (7.21). Si  $G(V)$  n'est pas différentiable, comme c'est souvent le cas, on peut utiliser une méthode de recherche séquentielle pour trouver un intervalle contenant  $\ell(J)$ , puis utiliser une méthode de bisection pour localiser sa position exacte.
- b) Evaluer  $J(V)$ , défini par (7.23, 7.14), en un nombre fini de points sur l'intervalle  $[0, \ell(J)]$ , incluant les points 0 et  $\ell(J)$ .
- c) Choisir  $J_1$  dans  $\mathbb{B}_4$  approximant  $J(V)$  sur  $[0, \ell(J)]$  et égale à  $K+J(0)$  sur  $(\ell(J), \infty)$ .  $V_1$  est défini implicitement par

$$V_1(t,r) = \min (r + J_1(t), K + J_1(0)). \quad (7.41)$$

Si  $\ell(J)$  et les valeurs de  $J(V)$  aux points d'évaluation ont été calculés avec suffisamment de précision, la restriction de  $J_1$  sur  $[0, \ell(J)]$  pourra être une fonction spline d'interpolation. Sinon, on pourra obtenir  $J_1$  par une méthode d'approximation de moindres carrés.

Si les hypothèses du théorème 7.1 ne sont pas satisfaites, le calcul de  $J(V)$  sera alors un peu plus compliqué, puisqu'on devra effectuer une minimisation (7.14) à chaque point d'évaluation. De plus, si rien ne nous assure que  $J(V)$  est croissante, il sera difficile de déterminer a priori un intervalle fini hors duquel  $J(V)$  est constante. Il faudra trouver une bonne façon d'approximer  $J(V)$  sur  $\mathbb{R}_+$  et cela peut varier d'un problème à l'autre.

### 7.5 Un exemple numérique

Posons  $\rho = 0.1$ ,  $K = 20$  et soient  $c$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$  et  $R$  définis, pour  $t \geq 0$  et  $r \geq 0$ , par

$$c(t) = t + e^{-t} \quad (7.42)$$

$$\kappa(t) = 5 \quad (7.43)$$

$$\lambda(t) = .02t \quad (7.44)$$

$$R([0, r] | t) = 1 - e^{-r/2}. \quad (7.45)$$

On a alors

$$\bar{F}(t) = e^{-.01t^2} \quad \forall t \geq 0. \quad (7.46)$$

Le taux de panne correspond à celui d'une loi Weibull et le coût de la réparation minimale est une v.a. exponentielle de moyenne 2. Pour cet exemple, on a choisi  $\kappa$  et  $R$  indépendants de l'âge afin de ne pas compliquer inutilement la notation. Mais la méthode décrite ici vaut tout aussi bien pour le cas où  $\kappa$  et  $R$  dépendent de  $t$ .

On a par ailleurs

$$\inf_{t>0} \left( \frac{c(t)}{\lambda(t)} + \kappa(t) \right) = \inf_{t>0} \left( \frac{t+e^{-t}}{.02t} + 5 \right) .$$

Il est facile de vérifier que la fonction dont on cherche l'infimum est croissante, de sorte que (7.1) est satisfaite pour

$$b = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t+e^{-t}}{.02t} + 5 \right) = 55 \quad (7.47)$$

et les hypothèses du modèle, données au début du paragraphe 7.2, sont toutes satisfaites.

On vérifie aussi que  $\frac{K_3(d)}{1-\delta_1(d)}$  atteint son minimum en  $\tilde{d} \cong 15.0$ .

Posons

$$g_1 \equiv K_3(\tilde{d}) = 45.354$$

$$\delta_1 \equiv \delta_1(\tilde{d}) = 0.4597 .$$

L'inégalité (2.35) devient alors

$$n_0^{\alpha_1} > \frac{g_1/(1-\delta_1)}{\min(b, K)} = \frac{83.94}{20} = 4.197 .$$

Choisissons  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  et  $n_0 = 9$ .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= t + e^{-t} + .02t(5 + \int_0^{20} (r-20)\frac{1}{2}e^{-r/2}dr) \\ &= e^{-t} + t(0.74 - 0.04e^{-10}). \end{aligned} \quad (7.48)$$

On vérifie facilement que cette fonction est croissante, et les hypothèses du théorème 7.1 sont satisfaites.

Choisissons  $J \equiv 0$  comme fonction initiale et appliquons l'algorithme du chapitre 3, tel qu'adapté à la fin du paragraphe 7.4.

Pour les premières itérations, on évalue  $J(V)$  en dix points répartis uniformément sur l'intervalle  $[0, \ell(J)]$ , incluant les points 0 et  $\ell(J)$ . L'intégrale dans (7.9) est évaluée en utilisant la méthode de Simpson, avec un maillage suffisamment fin pour que l'erreur de quadrature soit négligeable. Puis, sur l'intervalle  $[0, \ell(J)]$ ,  $J_1$  est la fonction linéaire par morceaux (spline d'ordre 2) interpolant les valeurs obtenues. Comme au chapitre précédent, on imprime  $\Delta(J_1, J)$ ,  $\Delta(J, J_1)$  et  $J_1(0)$  à chaque itération. On répète le tout 30 fois, en posant  $J := J_1$  avant chaque répétition, et on obtient:

ITERATION	N	L	$\ell(J)$	DELTA(J1,J)	DELTA(J,J1)	JV(0)
1	10	9	2.644832	20.000000000	0.000000000	18.404990
2	10	9	4.987893	18.053741882	0.000000000	31.410100
3	10	9	5.853729	12.008377952	0.000000000	40.139697
4	10	9	6.238858	7.896141425	0.000000000	45.896624
5	10	9	6.438296	5.147381922	0.000000000	49.662794
6	10	9	6.551055	3.342089677	0.000000000	52.107737
7	10	9	6.616359	2.147792425	0.000000000	53.680567
8	10	9	6.654068	1.365494927	0.000000000	54.682210
9	10	9	6.675591	.859693236	0.000000000	55.313996
10	10	9	6.687808	.537037525	0.000000000	55.709313
11	10	9	6.694776	.333576739	0.000000000	55.955177
12	10	9	6.698800	.206394556	0.000000000	56.107441
13	10	9	6.701158	.127377318	0.000000000	56.201470
14	10	9	6.702560	.078483176	0.000000000	56.259430
15	10	9	6.703402	.048307428	0.000000000	56.295114
16	10	9	6.703912	.029714774	0.000000000	56.317067
17	10	9	6.704222	.018270814	0.000000000	56.330567
18	10	9	6.704412	.011231467	0.000000000	56.338867
19	10	9	6.704528	.006903178	0.000000000	56.343968
20	10	9	6.704599	.004242492	0.000000000	56.347103
21	10	9	6.704643	.002607162	0.000000000	56.349030
22	10	9	6.704670	.001602137	0.000000000	56.350214
23	10	9	6.704686	.000984514	0.000000000	56.350941
24	10	9	6.704696	.000604976	0.000000000	56.351388
25	10	9	6.704702	.000371750	0.000000000	56.351663
26	10	9	6.704706	.000228434	0.000000000	56.351832
27	10	9	6.704709	.000140369	0.000000000	56.351935
28	10	9	6.704710	.000086254	0.000000000	56.351999
29	10	9	6.704711	.000053001	0.000000000	56.352038
30	10	9	6.704711	.000032568	0.000000000	56.352062

LES 12 NOEUDS A LA DERNIERE ITERATION SONT :

0.000000	0.000000	.744968	1.489936	2.234904	2.979872	3.724840	4.469808
5.214776	5.959744	6.704711	6.704711				

LES 10 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000	.744968	1.489936	2.234904	2.979872	3.724840
4.469808	5.214776	5.959744	6.704711		

LES VALEURS DE J(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :

56.35206242	59.83828438	63.22534930	66.35478655	69.13581428	71.51070921
73.44127728	74.90441427	75.88436185	76.35203835		

A partir de la dernière fonction  $J_1$  obtenue, refaisons cinq itérations en utilisant maintenant vingt-cinq points d'évaluation et des splines d'ordre 2. On obtient:

ITERATION	N	L	$\ell(J)$	DELTA(J1,J)	DELTA(J,J1)	JV(0)
1	25	24	6.704712	.053631902	.006709154	56.352079
2	25	24	6.704712	.005401175	0.000000000	56.356787
3	25	24	6.705675	.003346026	0.000000000	56.359224
4	25	24	6.705625	.002052948	0.000000000	56.360734
5	25	24	6.705646	.001254961	0.000000000	56.361663

LES 27 NOEUDS A LA DERNIERE ITERATION SONT :

0.000000	0.000000	.279402	.558804	.838206	1.117608	1.397010	1.676411
1.955813	2.235215	2.514617	2.794019	3.073421	3.352823	3.632225	3.911627
4.191029	4.470430	4.749832	5.029234	5.308636	5.588038	5.867440	6.146842
6.426244	6.705646	6.705646					

LES 25 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000	.279402	.558804	.838206	1.117608	1.397010
1.676411	1.955813	2.235215	2.514617	2.794019	3.073421
3.352823	3.632225	3.911627	4.191029	4.470430	4.749832
5.029234	5.308636	5.588038	5.867440	6.146842	6.426244
6.705646					

LES VALEURS DE J(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :

56.36166271	57.66634729	58.97805075	60.28227750	61.56770422	62.82539777
64.04822487	65.23040752	66.36719033	67.45459455	68.48924013	69.46822239
70.38903227	71.24951049	72.04782519	72.78246057	73.45220147	74.05609749
74.59339093	75.06339691	75.46533218	75.79809927	76.06004553	76.24872882
<b>76.36073449</b>					

Si on refait cinq itérations en utilisant des splines d'ordre 4

(splines cubiques), on obtient:

ITERATION	N	L	$\ell(J)$	DELTA(J1,J)	DELTA(J,J1)	JV(0)
1	25	22	6.705659	.008568418	.001254383	56.362242
2	25	22	6.705668	.001275012	0.000000000	56.363353
3	25	22	6.705828	.000824943	0.000000000	56.363961
4	25	22	6.705822	.000509866	0.000000000	56.364337
5	25	22	6.705828	.000311863	0.000000000	56.364567

LES 29 NOEUDS A LA DERNIERE ITERATION SONT :

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	.558819	.838228	1.117638	1.397047
1.676457	1.955866	2.235276	2.514685	2.794095	3.073504	3.352914	3.632323
3.911733	4.191142	4.470552	4.749961	5.029371	5.308780	5.588190	5.867599
6.147009	6.705828	6.705828	6.705828	6.705828			

LES 25 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000	.279409	.558819	.838228	1.117638	1.397047
1.676457	1.955866	2.235276	2.514685	2.794095	3.073504
3.352914	3.632323	3.911733	4.191142	4.470552	4.749961
5.029371	5.308780	5.588190	5.867599	6.147009	6.426418
6.705828					

LES VALEURS DE J(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :

56.36456740	57.66937027	58.98119207	60.28553282	61.57106629	62.82885717
64.05177057	65.23402727	66.37087093	67.45832204	68.49300005	69.47200007
70.39281324	71.25328105	72.05157315	72.78617603	73.45587776	74.05973189
74.59698520	75.06695743	75.46886965	75.80162799	76.06358221	76.25229072
76.36433668					

et si on refait dix itérations en utilisant cinquante points d'évaluation et des splines d'ordre 4, on obtient:

ITERATION	N	L	$\ell(J)$	DELTA(J1,J)	DELTA(J,J1)	JV(0)
1	50	47	6.705831	.000347630	.000052025	56.364709
2	50	47	6.705833	.000118363	0.000000000	56.364796
3	50	47	6.705834	.000072135	0.000000000	56.364849
4	50	47	6.705835	.000044253	0.000000000	56.364882
5	50	47	6.705835	.000027158	0.000000000	56.364902
6	50	47	6.705836	.000016666	0.000000000	56.364915
7	50	47	6.705836	.000010228	0.000000000	56.364922
8	50	47	6.705836	.000006277	0.000000000	56.364927
9	50	47	6.705836	.000003852	0.000000000	56.364930
10	50	47	6.705836	.000002364	0.000000000	56.364931

LES 54 NOEUDS A LA DERNIERE ITERATION SONT :

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	.273708	.410561	.547415	.684269
.821123	.957977	1.094830	1.231684	1.368538	1.505392	1.642246	1.779099
1.915953	2.052807	2.189661	2.326515	2.463368	2.600222	2.737076	2.873930
3.010783	3.147637	3.284491	3.421345	3.558199	3.695052	3.831906	3.968760
4.105614	4.242468	4.379321	4.516175	4.653029	4.789883	4.926737	5.063590
5.200444	5.337298	5.474152	5.611006	5.747859	5.884713	6.021567	6.158421
6.295275	6.432128	6.705836	6.705836	6.705836	6.705836		

LES 50 POINTS D'EVALUATION SONT :

0.000000	.136854	.273708	.410561	.547415	.684269
.821123	.957977	1.094830	1.231684	1.368538	1.505392
1.642246	1.779099	1.915953	2.052807	2.189661	2.326515
2.463368	2.600222	2.737076	2.873930	3.010783	3.147637
3.284491	3.421345	3.558199	3.695052	3.831906	3.968760
4.105614	4.242468	4.379321	4.516175	4.653029	4.789883
4.926737	5.063590	5.200444	5.337298	5.474152	5.611006
5.747859	5.884713	6.021567	6.158421	6.295275	6.432128
6.568982	6.705836				

LES VALEURS DE J(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :

56.36493131	57.00208330	57.64299120	58.28559973	58.92809483	59.56887252
60.20651172	60.83975061	61.46746598	62.08865526	62.70242083	63.30795644
63.90453529	64.49149980	65.06825264	65.63424908	66.18899034	66.73201795
67.26290894	67.78127182	68.28674322	68.77898524	69.25768324	69.72254423
70.17329565	70.60968450	71.03147678	71.43845715	71.83042864	72.20721246
72.56864759	72.91459027	73.24491307	73.55950354	73.85826234	74.14110068
74.40793710	74.65869349	74.89329040	75.11164161	75.31364814	75.49919168
75.66812770	75.82027846	75.95542607	76.07330592	76.17360093	76.25593676
76.31987858	76.36492957				

On voit de  $\ell(J)$  de même que la fonction  $J_1$  n'ont pas changé, du moins pour leurs cinq premiers chiffres significatifs.



Pour évaluer des "bornes" sur l'erreur entre  $V_1$  et  $V_*$ , nous allons utiliser la même approche qu'au chapitre 6. Après la dernière itération, on divise la taille du maillage par 10. On prend donc 491 points d'évaluation équidistants sur l'intervalle  $[0, 6.705836]$  et on y réévalue  $J(V)$ . On calcule ensuite le minimum  $\delta^-$  et le maximum  $\delta^+$  de l'erreur réelle d'approximation  $J(V) - J_1$  en ces points. En vertu de (7.41), on peut alors "borner" l'erreur entre  $T(V) - V_1$  par

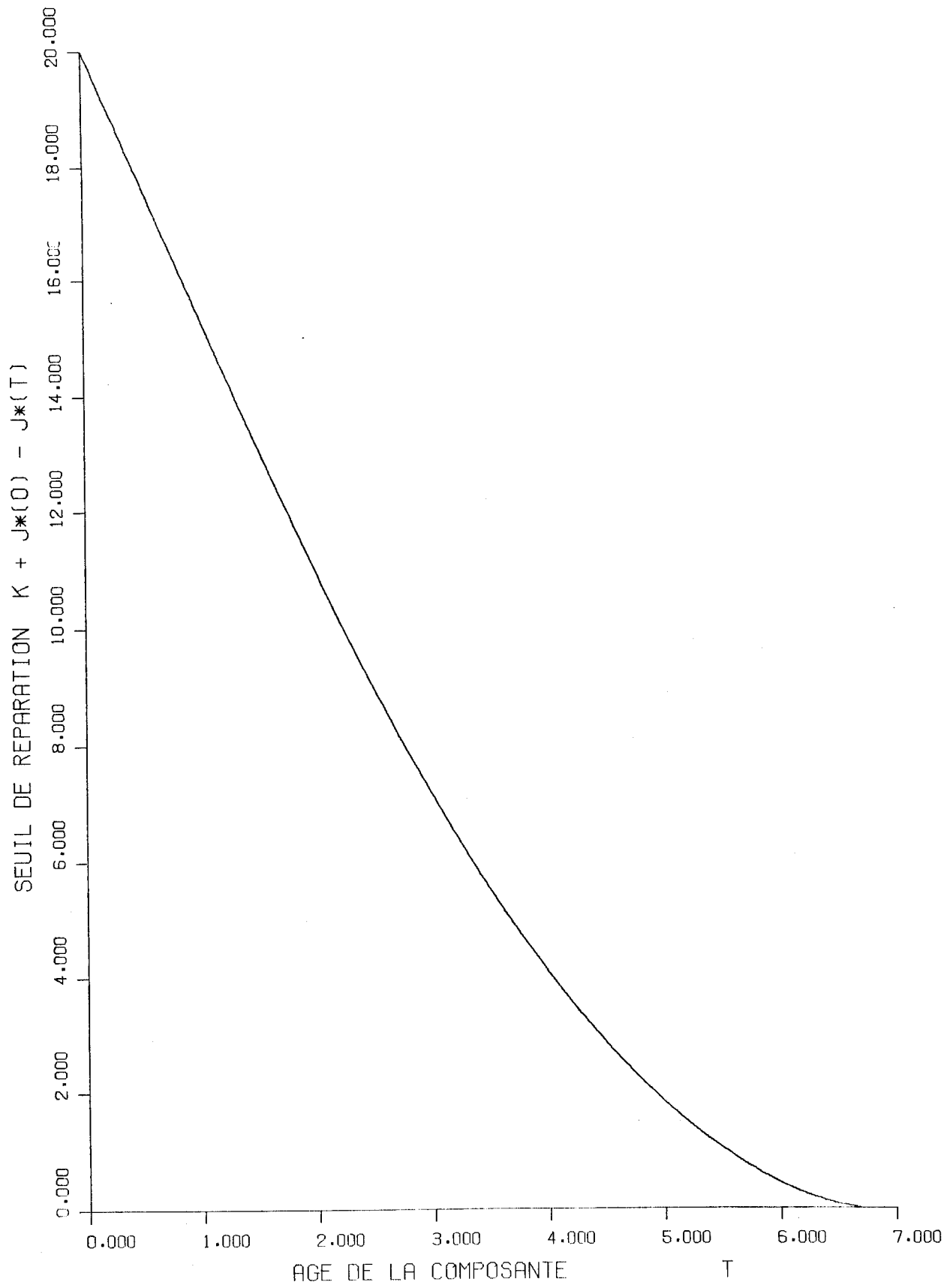
$$\delta^- \leq T(V) - V_1 \leq \delta^+$$

qui correspond à (3.25). On utilise ensuite (3.15-3.17) pour calculer des "bornes" sur  $V_* - V_1$  (à noter qu'on a les mêmes "bornes" sur  $J_* - J_1$ ). On obtient ici  $\delta^- = 7.6 \times 10^{-6}$ ,  $\delta^+ = 3.0 \times 10^{-6}$  et  $-.00013 \leq V_* - V_1 \leq .00006$ .

Une erreur de moins de .00025%, c'est vraiment très minime. En pratique, on n'aura probablement jamais besoin d'autant de précision. Voilà cependant une excellente indication de la stabilité numérique des méthodes de calcul utilisées ici.

On utilisera donc  $J_1$  et  $\ell(J_1)$  pour approximer  $J_*$  et  $d_*$ .

On retrouve la politique optimale par le biais de l'équation (7.26). Une composante d'âge  $t$  en panne est remplacée si et seulement si le coût de la réparation minimale atteint le seuil de réparation  $K + J_*(0) - J_*(t)$ . La date du prochain remplacement prévu est  $d_*$  si la composante est remplacée,  $d_* - t$  sinon. Le graphique du seuil de réparation en fonction de l'âge apparaît à la figure 7.2. Ce graphique correspond à celui, plus général, de la figure 7.1.



**Figure 7.2** - Politique optimale:  
seuil de réparation en fonction de l'âge.

A l'âge  $t = d_*$  = 6.7058, on voit que le seuil de réparation devient nul. C'est l'âge auquel la composante sera remplacée même si elle est en état de fonctionner.

Rappelons, en terminant, qu'on ne peut pas passer du modèle I à un modèle C. En effet, si la composante se trouve dans l'état  $(t,0)$ , le délai optimal jusqu'au prochain remplacement prévu est  $d_* - t$ , et ce délai tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $d_*$ . Ainsi, si on veut restreindre  $\Gamma$  de façon à ce que (4.3) soit satisfaite pour  $\alpha_1 < 1$ , il faudra nécessairement éliminer des actions optimales.

Mais de toutes façons, cela ne serait d'aucune utilité, puisque nous avons déjà la solution optimale avec toute la précision désirée.

De plus, en général, le passage à un modèle C ne permet pas nécessairement d'obtenir des "bornes" plus serrées. Considérons, par exemple, un modèle I avec  $n_0 = 9$  et  $\alpha_1 = 0.5$ , comme c'est le cas ici. En passant à un modèle C, on aura  $n_0 = 1$ , mais  $\alpha_1$  sera différent, possiblement plus près de 1. Pour que le modèle C soit plus avantageux,  $\alpha_1$  ne doit pas s'approcher trop près de 1, car sinon les bornes données par (3.17) seront moins bonnes.



## CHAPITRE 8

### UNE POLITIQUE OPPORTUNISTE POUR UN SYSTEME A PLUSIEURS COMPOSANTES

#### 8.1 Systèmes à plusieurs composantes

Lorsqu'un système est constitué de plusieurs composantes, le remplacement d'une composante doit se décider, habituellement, en tenant compte de l'état des autres composantes du système. On peut traiter chaque composante comme un système individuel et trouver une politique optimale pour chacune d'entre elles. Mais on n'obtiendra ainsi une politique optimale que si les composantes sont stochastiquement et économiquement indépendantes. En pratique, c'est loin d'être toujours le cas. Par exemple, il y a dépendance économique s'il en coûte moins cher de remplacer plusieurs composantes à la même occasion plutôt que séparément. Dans ce cas, on peut réaliser des économies d'échelle en groupant les remplacements. On dira alors qu'on adopte une politique opportuniste.

Un moteur d'avion, un camion, un groupe de lampes électriques, etc. constituent de tels systèmes; voir L'Ecuyer (1980) pour des exemples détaillés.

Une classe de politiques de remplacement préventif pour les systèmes à plusieurs composantes identiques, stochastiquement indépendantes et dont la distribution de durée de vie est connue est étudiée dans Gertsbakh (1977, pp. 80-95). L'auteur a analysé la classe des politiques de type  $(t, T)$  définies comme suit: au temps 0, le système est complètement neuf et commence à fonctionner. Durant la période  $(0, t)$ , on remplace seulement les composantes qui tombent en panne. Durant la période  $[t, T)$ , dès la première panne, s'il y en a, tout le système est remplacé par un système neuf. S'il n'y a pas de panne durant la période  $[t, T)$ , on remplace tout le système au temps  $T$  et on recommence à neuf. L'objectif est de minimiser le coût espéré moyen par unité de temps. Des tables, données par l'auteur, permettent de trouver les valeurs optimales de  $t$  et  $T$  pour un système dont les composantes ont une durée de vie de distribution gamma.

En posant  $t = T$  dans ce modèle, on obtient la politique de remplacement périodique ("Block replacement") bien connue. Selon une telle politique, on remplace toutes les composantes à intervalles fixes, indépendamment des défaillances qui surviennent. Lors d'une défaillance, on ne remplace que la composante en panne. Le plus grand avantage de cette politique provient de sa simplicité: Les réparateurs connaissent longtemps d'avance les instants de renouvellement du système.

Bien que ces politiques de remplacements planifiés soient en général faciles à implanter et à gérer, elles sont parfois loin d'être optimales. En effet, on risque de remplacer, de temps à autre, des composantes à peu près neuves.

Sasieni (1957) considère un système à deux composantes identiques, à taux de défaillance croissant. Une composante est remplacée dès qu'elle devient défectueuse ou qu'elle atteint un âge prédéterminé  $T$ . A l'occasion du remplacement d'une composante, l'autre est aussi remplacée si son âge atteint le seuil  $t$ . Dreyfus (1957) a par la suite démontré, en utilisant la programmation dynamique en temps discret, que la politique optimale, même pour un système à deux composantes identiques et une fonction de coût très simple, n'était pas nécessairement de la forme proposée par Sasieni. L'âge auquel on décide de remplacer préventivement une composante lorsqu'aucune des deux n'est en panne ne doit pas être un seuil  $T$ , mais doit dépendre de l'âge de l'autre composante.

Par ailleurs, comme l'a montré Sethi (1977), pour un système à deux composantes évoluant en temps discret, la politique optimale concernant le remplacement de la seconde composante lorsque l'une est en panne est une règle dichotomique à seuil.

Toutefois, lorsque le système possède 3 composantes ou plus, cette propriété ne tient plus. Vergin (1968) et L'Ecuyer (1980) ont étudié des modèles en temps discret et les résultats numériques obtenus par ce dernier auteur illustrent jusqu'à quel point la politique optimale peut devenir très compliquée. Alj et Haurie (1980) et Haurie et L'Ecuyer (1982) ont abordé le problème en temps continu et obtenu des conditions d'optimalité (équations aux dérivées partielles) par le biais de la théorie de la commande optimale stochastique. Rishel (1981) a émis quelques idées dans le but de résoudre ces conditions, mais aucune solution numérique n'a été obtenue.

L'approche consistant à discrétiser le problème et à travailler sur un modèle en temps discret est sujette à de sérieuses limitations. En effet, pour obtenir un tant soit peu de précision, on doit discrétiser assez finement. Mais comme l'espace d'états du système est multidimensionnel, la "malédiction de la dimensionnalité" aura vite fait de nous étouffer.

Dans ce chapitre, le problème en temps continu est formulé dans le cadre d'un modèle de PRMC, et on utilise l'algorithme du chapitre 3 pour obtenir une solution optimale.



## 8.2 Formulation du problème

Considérons un système à  $m$  composantes identiques, stochastiquement indépendantes. Chaque fois qu'une composante tombe en panne, on doit la remplacer par une composante neuve. On peut aussi profiter de cette occasion pour remplacer préventivement d'autres composantes. On suppose que tous les remplacements s'effectuent instantanément.

Le coût d'une intervention comprend un coût fixe  $C > 0$  indépendant du nombre de composantes remplacées et un coût de remplacement  $c \geq 0$  pour chaque composante remplacée. Un coût  $\kappa \geq 0$  est encouru chaque fois qu'une composante tombe en panne, tous les coûts sont actualisés au taux  $\rho > 0$  et le taux de panne pour une composante d'âge  $t$  est  $\lambda(t)$ , où  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction mesurable. On suppose que  $c$ ,  $C$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$  et  $\rho$  sont connus et on cherche une politique de remplacement permettant de minimiser le coût espéré total actualisé sur horizon infini.

A noter que la formulation de Haurie et L'Ecuyer (1982) était légèrement plus restrictive, puisqu'il n'y avait pas de coût de panne, c.-à-d. qu'on avait  $\kappa = 0$ .

L'état d'une composante non-défaillante est donné par son âge, et on convient que l'état d'une composante en panne est  $\infty$ . L'espace d'états du système est  $S = \prod_{i=1}^m [0, \infty]$ .

Un instant d'observation a lieu chaque fois qu'une composante tombe en panne et chaque fois qu'on décide d'arrêter le système pour effectuer un ou plusieurs remplacements préventifs. A chaque instant d'observation, on choisit un ensemble non vide  $R$  de composantes à remplacer, qui contient au moins toutes les composantes défectueuses s'il y en a, et un délai  $d$  jusqu'au prochain remplacement préventif prévu.

L'espace des actions est  $A = \tilde{\mathcal{P}}(M) \times [0, \infty]$  où  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  est l'ensemble des composantes et  $\tilde{\mathcal{P}}(M)$  est l'ensemble des parties non vides de  $M$ . Pour chaque  $s = (s_1, \dots, s_m)$  dans  $S$ , l'ensemble des actions admissibles dans l'état  $s$  est  $A(s) = \tilde{A}(s) \times [0, \infty] \subseteq A$ , où  $\tilde{A}(s) \equiv \{R \in \tilde{\mathcal{P}}(M) \mid i \in R \text{ pour chaque } i \text{ tel que } s_i \neq \infty\}$ . On pose  $\Gamma \equiv \{(s, R, d) \mid s \in S \text{ et } (R, d) \in A(s)\}$ .

Pour chaque  $(s, R, d)$  dans  $\Gamma$ , le coût encouru lorsqu'on choisit l'action  $(R, d)$  dans l'état  $s$  ne dépend pas de  $d$ , et s'écrit:

$$g(s, R) = C + c|R| + \kappa \mathbb{1}_{\text{panne}} \quad (8.1)$$

où  $|R|$  est la cardinalité de  $R$  et

$$\mathbb{1}_{\text{panne}} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } s_i \neq \infty \quad \forall i \in M \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.2)$$

Immédiatement après le remplacement, l'état du système est décrit par le vecteur des âges des composantes  $r = (r_1, \dots, r_m)$  où

$$r_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in R \\ s_i & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.3)$$

Par la suite et jusqu'au prochain instant d'observation, le taux de panne de la  $i$ -ième composante dans  $\zeta$  unités de temps est  $\lambda(r_i + \zeta)$ .

Puisque les composantes sont indépendantes, le taux de panne du système est égal à  $\sum_{i=1}^m \lambda(r_i + \zeta)$  et la fonction de densité d'une défaillance du système provoquée par une panne de la composante  $i$  est

$\lambda(r_i + \zeta) \prod_{j=1}^m \bar{F}(r_j + \zeta | r_j)$ . Si une telle panne se produit, on se retrouve dans l'état  $s' = (s'_1, \dots, s'_m)$  où

$$s'_j = \begin{cases} \infty & \text{si } j=i \\ r_j + \zeta & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.4)$$

La probabilité qu'aucune panne ne se produise durant les  $d$  prochaines unités de temps est égale à  $\prod_{j=1}^m \bar{F}(r_j + d | r_j)$ , et si c'est le cas, le prochain instant d'observation aura lieu dans  $d$  unités de temps et le prochain état du système sera  $s' = r + d \cdot 1$ , où  $1$  est le vecteur dont toutes les composantes valent 1.

Ainsi, on retrouve la mesure de probabilité  $Q(\cdot | s, R, d)$  sur  $\mathbb{R}_+ \times S$  selon laquelle est généré le couple  $(\zeta, s')$ , où  $\zeta$  est l'intervalle de temps jusqu'au prochain instant d'observation et  $s'$  le prochain état.

La structure  $(S, A, \Gamma, g, Q, \rho)$  définit un modèle de PRMC homogène, version I.

En effet, on a

$$K_1 \equiv C + c \leq g \leq C + mc + \kappa \equiv g_1 \quad (8.5)$$

et si  $\tilde{\mu}$  est la stratégie définie par

$$\tilde{\mu}(s) = (M, \infty) \quad \forall s \in S \quad (8.6)$$

on a alors

$$\begin{aligned} \alpha(s, \tilde{\mu}(s)) &= \int_0^\infty e^{-\rho \zeta} \sum_{i=1}^m \lambda(\zeta) \prod_{j=1}^m \bar{F}(\zeta) d\zeta \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho \zeta} \sum_{i=1}^m \lambda(\zeta) (\bar{F}(\zeta))^m d\zeta \equiv \delta_1 < 1. \end{aligned} \quad (8.7)$$

On a aussi

$$\mathbb{B}_2 = \{V: S \rightarrow [C+c, \frac{g_1}{1-\delta_1}] \mid V \text{ est s.a.i.}\}.$$

Pour  $V$  dans  $\mathbb{B}_2$ ,  $s$  dans  $S$  et  $(R, d)$  dans  $A(s)$ , on écrit:

$$H(V)(s, R, d) = g(s, R) + L(V)(r, d) \quad (8.8)$$

où  $r$  est le vecteur défini en (8.3) et  $L(V)(r, d)$  est défini par

$$\begin{aligned} L(V)(r, d) &\equiv \int_0^d e^{-\rho \zeta} \sum_{i=1}^m [\lambda(r_i + \zeta) V(s')] \prod_{j=1}^m \bar{F}(r_j + \zeta | r_j) d\zeta \\ &\quad + e^{-\rho d} V(r+d \cdot 1) \prod_{j=1}^m \bar{F}(r_j + d | r_j) \end{aligned} \quad (8.9)$$

où  $s'$  dépend de  $i$  et  $\zeta$  et est défini en (8.4).

L'opérateur de la programmation dynamique s'écrit comme à

l'accoutumée

$$T(V)(s) \equiv \inf_{(R, d) \in A(s)} H(V)(s, R, d). \quad (8.10)$$

### 8.3 Une réduction facilitant l'approximation

Considérons le système à un instant d'observation, immédiatement après l'intervention. L'état est décrit par le vecteur  $r$ . Puisque les composantes du système sont identiques, on peut réordonner les composantes de  $r$  par ordre décroissant. De plus, puisqu'au moins une composante vient d'être remplacée, il est clair que  $r_m = 0$ .

Soit  $X \equiv \{(r_1, \dots, r_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1} \mid r_1 \geq \dots \geq r_{m-1} \geq 0\}$   
 et  $J(V) : X \rightarrow \mathbb{R}$  défini par:

$$J(V)(r_1, \dots, r_{m-1}) = \inf_{d \geq 0} L(V)(r_1, \dots, r_{m-1}, 0, d) \quad (8.11)$$

L'opérateur de la programmation dynamique s'écrit

$$T(V)(s) = \min_{R \in \tilde{A}(s)} [g(s, R) + J(V)(\varphi(s, R))] \quad (8.12)$$

où  $\varphi(s, R)$  est le vecteur de  $\mathbb{R}_+^{m-1}$  formé des  $m-1$  plus grandes composantes de  $r$  ordonnées par ordre décroissant et  $r$  est défini en (8.3).

A chaque itération de l'algorithme du chapitre 3, nous allons approximer la fonction  $J(V)$ , définie sur l'espace  $X$ , plus restreint que  $S$ , et  $T(V)$  sera déterminée implicitement par (8.12).

On peut choisir une fonction  $V$  initiale donnée par

$$V(s) = \min_{R \in \tilde{A}(s)} g(s, R). \quad (8.13)$$

A chaque itération, on évalue  $J(V)$  en un nombre fini de points de  $X$ . Puis, on choisit une fonction  $J_1$  approximant  $J(V)$  et telle que  $V_1$  définie par

$$V_1(s) = \min_{R \in \tilde{A}(s)} [g(s,R) + J_1(\varphi(s,R))] \quad (8.14)$$

est dans  $B_2$ .

#### 8.4 Un exemple numérique

Soient  $m=3$ ,  $C=c=1$ ,  $\kappa=2$ ,  $\rho=0.1$  et  $\lambda(t)=.02t \forall t \geq 0$ . Ce taux de panne correspond à une loi Weibull, et on a

$$\bar{F}(t) = e^{-.01t^2} \quad \forall t \geq 0. \quad (8.15)$$

On a aussi  $K_1=2$ ,  $g_1=6$ ,  $\delta_1 = \int_0^\infty 0.06 \zeta e^{-\rho\zeta - .03\zeta^2} d\zeta = .62011$ ,  $g_1/(1-\delta_1) = 15.88$  et l'inégalité (2.35) s'écrit:

$$\alpha_1 n_0 \geq \frac{g_1/(1-\delta_1) - K_1}{K_1} = 6.90.$$

On choisit  $\alpha_1 = 0.5$  et  $n_0 = 14$ .

A chaque itération de l'algorithme, on choisit  $n$  et  $0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ . Puis on pose

$$\Omega \equiv \{(\tau_i, \tau_j) \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}.$$

$\Omega$  est l'ensemble des points où l'on va évaluer  $J(V)$ . Ces points déterminent un recouvrement du cône  $X = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \geq r_2 \geq 0\}$  par  $n(n+1)/2$  morceaux, tel qu'illustré à la figure 8.1. De ces morceaux,  $n-1$  sont

des triangles,  $(n-1)(n-2)/2$  sont des rectangles et  $n$  sont des polyèdres non bornés.

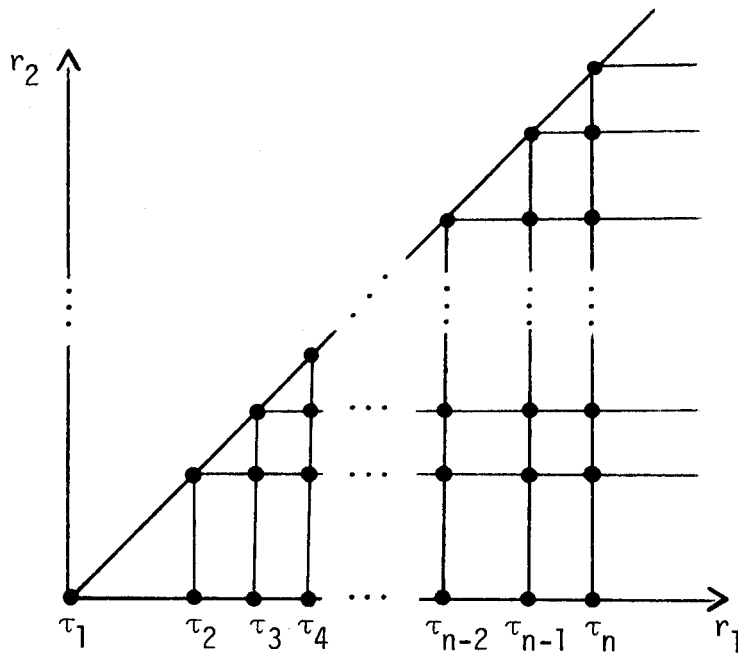


Figure 8.1 L'ensemble des points d'évaluation et les morceaux recouvrant le cône  $X$ .

On choisit comme suit la fonction  $J_1$  approximant  $J(V)$ : sur chaque triangle,  $J_1$  est égale à la fonction affine interpolant  $J(V)$  aux trois sommets du triangle (géométriquement, c'est une portion de plan); sur chaque rectangle,  $J_1$  est égale à la fonction bilinéaire interpolant  $J(V)$  aux quatre sommets du rectangle; tandis que sur chacun des polyèdres non bornés,  $J_1$  est constante et égale à la valeur de  $J(V)$  au coin inférieur gauche du polyèdre.

Prenons la fonction  $V$  initiale donnée par (8.13), posons  $n=5$ ,  $\tau_1=0.0$ ,  $\tau_2=2.5$ ,  $\tau_3=5.0$ ,  $\tau_4=7.5$ ,  $\tau_5=10.0$  et effectuons 30 itérations de l'algorithme. Comme aux chapitres précédents, on imprime  $\Delta(J_1, J)$ ,  $\Delta(J, J_1)$  et  $J(V)(0,0)$  à chaque itération. A la dernière itération, on imprime les valeurs de  $J(V)$  aux points d'évaluation  $(\tau_i, \tau_j)$ , de même que la valeur de  $d$  faisant atteindre l'infimum dans (8.11) et le nombre  $\ell(\tau_i, \tau_j)$  de composantes supplémentaires à remplacer (c.-à-d. la cardinalité du  $R$  faisant atteindre le minimum dans (8.14), moins 1). Dans les tableaux ci-dessous, les

ITERATION	N	DELTA(J1,J)	DELTA(J,J1)	JV(0,0)
1	5	2.00000008	0.00000000	1.84428
2	5	2.00000000	0.00000000	3.42202
3	5	1.84428120	0.00000000	4.77464
4	5	1.57773548	0.00000000	5.88263
5	5	1.35041593	0.00000000	6.76491
6	5	1.02124903	0.00000000	7.46588
7	5	.72685369	0.00000000	7.98662
8	5	.50729274	0.00000000	8.35093
9	5	.34723398	0.00000000	8.59959
10	5	.23431677	0.00000000	8.76723
11	5	.15702617	0.00000000	8.87996
12	5	.10514497	0.00000000	8.95563
13	5	.07037467	0.00000000	9.00636
14	5	.04708561	0.00000000	9.04035
15	5	.03150269	0.00000000	9.06310
16	5	.02106719	0.00000000	9.07832
17	5	.01408308	0.00000000	9.08850
18	5	.00941551	0.00000000	9.09530
19	5	.00629565	0.00000000	9.09985
20	5	.00420986	0.00000000	9.10290
21	5	.00281525	0.00000000	9.10494
22	5	.00188269	0.00000000	9.10630
23	5	.00125906	0.00000000	9.10721
24	5	.00084193	0.00000000	9.10782
25	5	.00056297	0.00000000	9.10822
26	5	.00037645	0.00000000	9.10850
27	5	.00025173	0.00000000	9.10868
28	5	.00016833	0.00000000	9.10880
29	5	.00011256	0.00000000	9.10888
30	5	.00007527	0.00000000	9.10894

Dans le tableaux ci-dessous, les valeurs apparaissant dans la ligne du bas et dans la colonne de gauche sont les valeurs de  $\tau_i$  et  $\tau_j$  respectivement. Les autres valeurs, qui forment des blocs triangulaires, sont celles de  $J(V)$ , de  $d$  faisant atteindre l'infimum dans (8.11) et de  $\ell$ , aux points  $(\tau_i, \tau_j)$ .



RESULTATS DE LA DERNIERE ITERATION AUX POINTS D'EVALUATION.

VALEURS DE  $J(V)$  :

10.00					12.022
7.50				11.692	11.887
5.00			11.173	11.455	11.692
2.50		10.371	10.794	11.119	11.388
0.00	9.109	9.748	10.199	10.553	10.842
	0.00	2.50	5.00	7.50	10.00

VALEUR OPTIMALE DU DELAI JUSQU'A LA PROCHAINE INSPECTION PREVUE  
SI AUCUNE COMPOSANTE N'EST REMPLACEE IMMEDIATEMENT :

10.00					1.451
7.50				5.924	3.285
5.00			7.591	6.757	5.924
2.50		9.257	8.424	7.591	6.757
0.00	10.924	10.091	9.257	8.424	7.591
	0.00	2.50	5.00	7.50	10.00

NOMBRE DE COMPOSANTES SUPPLEMENTAIRES A REMPLACER IMMEDIATEMENT :

10.00					2
7.50				2	2
5.00			2	2	2
2.50		0	1	1	1
0.00	0	0	1	1	1
	0.00	2.50	5.00	7.50	10.00

A remarquer qu'une meilleure approximation de  $J(V)(r_1, r_2)$  pour  $r_1 > 10$  est inutile ici, puisque le  $R$  faisant atteindre le minimum dans (8.14) contient toutes les composantes d'âge supérieure à 10. En fait, pour ce  $R$  faisant atteindre le minimum dans (8.14),  $\varphi(s, R)$  doit être situé dans la région de  $X$  où le nombre de composantes supplémentaires à remplacer,  $\ell(\varphi(s, R))$ , est nul. Une bonne approximation de  $J(V)$  par  $J_1$  n'est donc nécessaire que dans cette région.

Reprenons la dernière fonction  $J_1$  et faisons 10 nouvelles itérations avec  $n=8$  et  $\tau_i = i-1$  pour  $i=1, \dots, 8$ . On obtient:

ITERATION	N	DELTA(J1,J)	DELTA(J,J1)	JV(0,0)
1	8	.06139904	.00000142	9.10904
2	8	.01683331	0.00000000	9.12168
3	8	.00987795	0.00000000	9.12860
4	8	.00588691	0.00000000	9.13354
5	8	.00405780	0.00000000	9.13681
6	8	.00270285	0.00000000	9.13899
7	8	.00180854	0.00000000	9.14046
8	8	.00120981	0.00000000	9.14144
9	8	.00080925	0.00000000	9.14209
10	8	.00054132	0.00000000	9.14253

RESULTATS DE LA DERNIERE ITERATION AUX POINTS D'EVALUATION.

VALEURS DE J(V) :

7.00								11.639
6.00							11.438	11.542
5.00						11.208	11.327	11.438
4.00					10.937	11.077	11.206	11.325
3.00				10.600	10.772	10.920	11.056	11.181
2.00			10.193	10.399	10.576	10.731	10.872	11.003
1.00		9.709	9.953	10.163	10.344	10.504	10.652	10.787
0.00	9.143	9.428	9.673	9.885	10.071	10.237	10.390	10.530
	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00

VALEUR OPTIMALE DU DELAI JUSQU'A LA PROCHAINE INSPECTION PREVUE  
SI AUCUNE COMPOSANTE N'EST REMPLACEE IMMEDIATEMENT :

7.00								6.285
6.00							6.952	6.618
5.00						7.618	7.285	6.952
4.00					8.286	7.952	7.618	7.285
3.00				8.952	8.618	8.286	7.952	7.618
2.00			9.618	9.285	8.952	8.618	8.286	7.952
1.00		10.285	9.952	9.618	9.285	8.952	8.618	8.286
0.00	10.964	10.618	10.285	9.952	9.618	9.285	8.952	8.618
	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00

NOMBRE DE COMPOSANTES SUPPLEMENTAIRES A REMPLACER IMMEDIATEMENT :

7.00								2
6.00							2	2
5.00						2	2	2
4.00					0	1	1	1
3.00				0	0	1	1	1
2.00			0	0	0	1	1	1
1.00		0	0	0	0	1	1	1
0.00	0	0	0	0	0	1	1	1
	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00

Raffinons maintenant le maillage près de  $r_1=5$ , afin de mieux situer la frontière de la région où  $\ell$  vaut 0. Prenons  $n=14$ ,  $\tau_i=0.5(i-1)$  pour  $i=1,\dots,10$  et  $\tau_i = 4.5 + 0.25(i-10)$  pour  $i=11,\dots,14$ . Reprenons la dernière fonction  $J_1$  obtenue et faisons 3 nouvelles itérations. On obtient:

ITERATION	N	DELTA(J1,J)	DELTA(J,J1)	JV(0,0)
1	14	.01102047	0.00000000	9.14283
2	14	.00232687	0.00000000	9.14470
3	14	.00142365	0.00000000	9.14574

et les valeurs du tableau 8.1.

On remarque que durant ces 3 itérations, le changement sur  $J_1$  fut monotone et inférieur à .02.

On peut utiliser la même approche qu'aux deux chapitres précédents pour estimer des "bornes" sur l'erreur entre  $V_1$  et  $V_*$ . Après la dernière itération, quadruplons le nombre de points  $\tau_i$  sur chaque axe. On prend  $\tau_i = (i-1) 5.50/56$  pour  $i=1,\dots,56$ , ce qui nous donne  $56 \times 57/2 = 1596$  points d'évaluation où l'on réévalue  $J(V)$ . On calcule ensuite le minimum  $\delta^-$  et le maximum  $\delta^+$  de l'erreur réelle d'approximation  $J(V)-J_1$  en ces points. En vertu de (8.14), on peut "borner" l'erreur entre  $T(V)$  et  $V_1$  par  $\delta^- \leq T(V)-V_1 \leq \delta^+$ , qui correspond à (3.25). On utilise ensuite les formules (3.15-3.17) pour calculer des "bornes" sur  $V_*-V_1$  (à noter qu'on a les mêmes bornes pour  $J(V_*)-J_1$  sur l'enveloppe convexe des points d'évaluation).



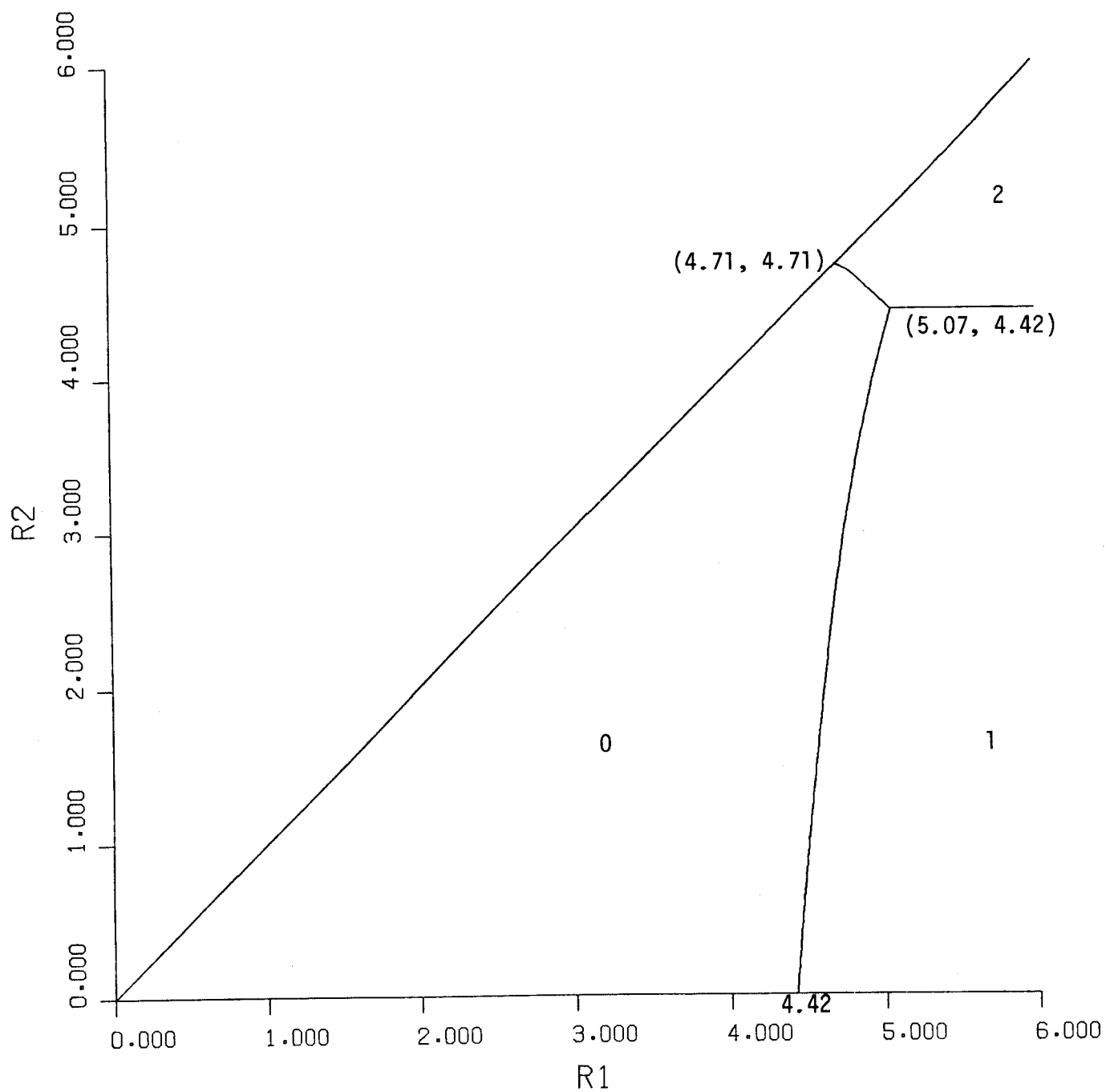
On obtient ici  $\delta^- = .0034$ ,  $\delta^+ = .0000$  et  $-.094 \leq V_* - V_1 \leq .038$ . Le demi-écart entre ces bornes est  $.066$ , ce qui est à peu près  $0.6\%$  de la valeur de  $V_1$ , qui se situe partout entre  $11.14$  et  $13.15$ .

On utilisera  $V_1$  pour approximer  $V_*$ .

Il reste à déterminer une politique, c'est à dire une règle qui dans chaque état  $s$ , va nous dire quelles composantes remplacer et à quelle date fixer le prochain remplacement planifié.

L'ensemble des composantes à remplacer est l'ensemble  $R$  qui fait atteindre le minimum dans (8.14). Ici, il appert que  $J_1$  est croissante, de sorte que ce  $R$  contient toujours les composantes les plus âgées. De plus,  $R$  n'est jamais vide. Il suffit donc de connaître le nombre  $\ell$  de composantes supplémentaires à remplacer en plus de la composante (celle qui est en panne s'il y en a une, la plus âgée sinon) que l'on doit remplacer obligatoirement. Après ce premier remplacement obligatoire, le système se trouve dans un état  $(r_1, r_2)$  de  $X$  et le graphique de la figure 8.2 nous indique le nombre  $\ell(r_1, r_2)$  de composantes supplémentaires à remplacer.

On voit que la surface du cône  $X$  est partitionnée, selon la valeur de  $\ell$ , en 3 régions connexes.



## NOMBRE DE REMPLACEMENTS SUPPLEMENTAIRES

Figure 8.2: Nombre de remplacements supplémentaires en fonction de l'âge des 2 composantes restantes.

On remarque aussi que  $\ell$  n'est pas une fonction croissante. On a, par exemple,  $\ell(4.5, 4) = 0 < 1 = \ell(4.5, 0)$ . Ce comportement peut s'interpréter comme suit. Dans l'état  $(4.5, 0, 0)$ , remplacer une composante ramène le système à l'état neuf, tandis que dans l'état  $(4.5, 4, 0)$ , cette même action laissera une composante d'âge 4. Afin de vraiment diminuer le taux de panne et s'assurer une certaine fiabilité pour les prochains instants, il faudrait remplacer aussi cette composante. Mais il s'avère que cela coûte trop cher, qu'il vaut mieux ne rien remplacer du tout et attendre la prochaine panne ou l'expiration du délai jusqu'au prochain remplacement planifié. Dans ce cas-ci (voir tableau 8.1), ce délai sera fixé à 8.121.

Dans tous les cas, une fois l'ensemble  $R$  choisi, on se retrouve dans un état de  $X$  situé dans la région où  $\ell$  vaut 0, et il reste à déterminer le délai optimal jusqu'à la prochaine inspection prévue. A cet effet, on peut réévaluer 8.11 au point qui nous intéresse après avoir posé  $V:=V_1$ , ou on peut interpoler les valeurs du "délai optimal" obtenues aux points d'évaluation, à la dernière itération, et qui apparaissent au tableau 8.1.

Considérons le cas d'un système neuf à l'instant 0. Suivant le tableau 8.1, on doit planifier la prochaine intervention pour l'instant 10.964. Si la prochaine panne survient à  $\zeta$  et si  $4.714 \leq \zeta < 10.964$ , on profitera de l'occasion pour remplacer préventivement, en plus de

la composante défailante, les deux autres composantes, d'âge  $\zeta$ . Par contre, si  $\zeta < 4.714$ , seulement la composante en panne sera remplacée.

On voit clairement que cette politique est différente d'une politique de remplacement selon l'âge. Ici, l'âge auquel on décide de remplacer une composante dépend de l'âge des autres composantes.

Par ailleurs, si on augmente le nombre de composantes, la politique optimale risque de devenir encore plus compliquée. On pourra quand même l'approximer convenablement, à condition de pouvoir approximer convenablement la fonction  $J(V)$ , définie sur un ensemble de dimension  $m-1$ .

Si  $m$  n'est pas trop grand, on peut utiliser une approche semblable à celle adoptée ici pour  $m=3$ , qui s'inspire des méthodes d'éléments finis. Les méthodes d'éléments finis sont probablement les méthodes les plus couramment utilisées lorsqu'il s'agit d'approximer des fonctions à 2 ou 3 variables.

Pour  $m=4$ , par exemple, on peut choisir  $n$  et  $\tau_n > \dots > \tau_1 = 0$ , puis partitionner le volume de  $X' \equiv \{(r_1, r_2, r_3) | \tau_n \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq 0\}$  en un nombre fini de boîtes rectangulaires, de cylindres triangulaires et de tétraèdres, dont les sommets se situent tous dans l'ensemble des points d'évaluation  $\Omega \equiv \{(\tau_i, \tau_j, \tau_k) | 1 \leq k \leq j \leq i \leq n\}$ .



$J_1$  interpolera  $J(V)$  aux points de  $\Omega$ , et sera trilinéaire sur les boîtes rectangulaires, affine sur les tétraèdres, tandis que sur les cylindres rectangulaires, elle sera du type  $f(x,y,z) = a+bx+cy+dz+kxy+\ell xz$ .

Une autre approche consiste à triangulariser  $X'$  en un nombre fini de tétraèdres, selon la méthode de Hermeline (1982), puis à choisir une fonction  $J_1$  qui sera égale, sur chaque tétraèdre, à la fonction affine interpolant  $J(V)$  aux sommets du tétraèdre.

Malheureusement, lorsque  $m$  est trop grand, ces approches deviennent trop compliquées et probablement inefficaces.

En général, les techniques d'approximation des fonctions à plusieurs variables sont présentement peu développées. Toutefois, certains travaux en cours concernant les fonctions splines multivariées (Dahmen (1980), Höllig (1982)) semblent prometteurs.

L'utilisation en programmation dynamique de fonctions B-splines multivariées d'interpolation ou d'approximation est un sujet qui mérite certainement beaucoup d'attention et devra faire l'objet de recherches futures.



## CONCLUSION

Nous avons introduit et étudié, dans cette thèse, un modèle de PDMED très général, généralisant les modèles de PRMC avec actualisation déjà connus, et permettant de traiter des problèmes qu'on ne pouvait pas traiter de façon satisfaisante auparavant. Nous avons proposé un algorithme permettant de tirer parti des techniques d'approximation de fonctions les plus élaborées, pour obtenir une politique  $\varepsilon$ -optimale.

Trois problèmes de remplacement préventif ont été placés dans le cadre de ce modèle et des exemples numériques ont été résolus en utilisant l'algorithme proposé.

Il reste cependant des choses à faire.

D'abord, tout au long de cette thèse, nous avons supposé qu'à chaque instant d'observation, on pouvait observer parfaitement l'état du système avant de choisir l'action appropriée. Mais souvent, dans les situations pratiques, le décideur n'a accès qu'à une observation partielle de l'état. Lors de l'inspection d'un moteur d'avion, par exemple, l'observation de certaines pièces est impossible ou trop coûteuse, et on doit se contenter d'une inspection partielle pour mesurer l'état de détérioration du moteur.

Par ailleurs, nous avons aussi supposé que le noyau de transition  $Q$ , la fonction de coût  $g$  et le facteur d'actualisation  $\rho$  étaient parfaitement connus. Cela nous a permis d'éviter les problèmes d'estimation. Mais en pratique, habituellement,  $Q$ ,  $g$  et  $\rho$  doivent être estimés. On peut les estimer d'abord et utiliser le modèle de PD MED ensuite, mais si on veut exploiter toute l'information disponible à chaque prise de décision, on utilisera plutôt un modèle de commande adaptative. Cette dernière approche équivaut à considérer  $Q$ ,  $g$  et  $\rho$  comme faisant partie de l'état et à se ramener à un modèle de PD MED partiellement observé.

En général, les modèles de programmation dynamique avec observation partielle de l'état sont beaucoup plus complexes, à plusieurs points de vue, que ceux où l'observation est parfaite.

Dans le cas d'un modèle avec actualisation, on peut théoriquement modéliser un PD MED partiellement observé par un modèle de PD MED complètement observé. Il s'agit de remplacer l'état  $x$  du processus par une distribution de probabilité sur l'espace d'états  $X$ . Le nouvel espace d'états est l'espace des distributions de probabilité sur  $X$  et on obtient un modèle de programmation dynamique bayésien.

Mais on devra s'assurer que ce "super" modèle bayésien vérifie les hypothèses du modèle de PD MED du chapitre 2 si on veut en utiliser les propriétés. Cela risque d'amener de nouvelles difficultés. De plus,

le nouvel espace d'états pouvant être relativement complexe, la mise en oeuvre de l'algorithme risque de devenir pénible. Beaucoup de travail reste à faire dans ce domaine.



## APPENDICE A

### QUELQUES RESULTATS AYANT TRAIT AUX ESPACES BORELIENS

Un certain nombre de propriétés sont énoncées dans cet Appendice. Ces propriétés sont utilisées dans le texte, notamment au chapitre 2, et on peut trouver les preuves en consultant les références indiquées. On utilise ici les définitions et la notation du paragraphe 2.2.

#### A.1 [Bertsekas et Shreve (1978), p.177]

Soit  $X$  un espace Borélien,  $D$  un sous-ensemble analytique de  $X$  et  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

a)  $f$  est semi-analytique inférieurement (s.a.i.)

$$\Leftrightarrow \{x \in D \mid f(x) < c\} \text{ est analytique } \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in D \mid f(x) \leq c\} \text{ est analytique } \forall c \in \mathbb{R}.$$

b) Si  $\{f_n: D \rightarrow \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}\}$  est une suite de fonctions s.a.i., alors  $\inf_n f_n$ ,  $\sup_n f_n$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  sont s.a.i. En particulier, si  $f_n \rightarrow f$ , alors  $f$  est s.a.i.

c) Si  $Y$  est un sous-espace Borélien,  $h: X \rightarrow Y$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable et  $f: h(X) \rightarrow \mathbb{R}^*$  s.a.i., alors  $f \circ h$  est aussi s.a.i.

d) Si  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f$  et  $g$  s.a.i., alors  $f+g$  est s.a.i. De plus, si  $g \geq 0$  et  $g$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable, ou si  $g \geq 0$  et  $f \geq 0$ , alors  $f \cdot g$  est s.a.i. (en convenant que  $0 \cdot (\pm \infty) = (\pm \infty) \cdot 0 = 0$ ).

A.2 [ Bertsekas et Shreve (1978), p. 139 ]

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces Boréliens et  $p \in \mathbb{P}(X \times Y)$ . Alors il existe un noyau stochastique  $\mathcal{B}$ -mesurable  $Q$  sur  $Y|X$  tel que

$p(\underline{X} \times \underline{Y}) = \int_{\underline{X}} Q(\underline{Y}|x) r(dx) \quad \forall \underline{X} \in \mathcal{B}(X) \quad \text{et} \quad \forall \underline{Y} \in \mathcal{B}(Y)$ , où  $r$  est la loi marginale de  $p$  sur  $X$ .

A.3 [ Bertsekas et Shreve (1978), p. 175 ]

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite d'espaces Boréliens,  $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$  et  $Y = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $Q_n$  un noyau stochastique  $\mathcal{U}$ -mesurable sur  $X_{n+1}|Y_n$ . Alors  $\forall Q_0 \in \mathbb{P}(X_1)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe une mesure de probabilité unique  $p_n \in \mathbb{P}(Y_n)$  telle que  $\forall \underline{X}_1 \in \mathcal{B}(X_1), \dots, \underline{X}_n \in \mathcal{B}(X_n)$ ,

$$p_n(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n) = \int_{\underline{X}_1} \dots \int_{\underline{X}_{n-1}} Q_{n-1}(\underline{X}_n | x_1, \dots, x_{n-1}) Q_{n-2}(dx_{n-1} | x_1, \dots, x_{n-2}) \dots Q_0(dx_1).$$

si  $f: Y_n \rightarrow \mathbb{R}^*$  est  $\mathcal{U}$ -mesurable et si  $\int f^+ dp_n < \infty$  ou  $\int f^- dp_n < \infty$ , alors

$$\int_{Y_n} f dp_n = \int_{\underline{X}_1} \dots \int_{\underline{X}_n} f(x_1, \dots, x_n) Q_{n-1}(dx_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \dots Q_0(dx_1).$$

De plus, il existe une mesure de probabilité unique  $p \in \mathbb{P}(Y)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  est la loi marginale de  $p$  sur  $Y_n$ .

A.4 [ Bertsekas et Shreve (1978), p. 177 ]

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces Boréliens et  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*$   $\mathcal{U}$ -mesurable. Si  $Q$  est un noyau stochastique  $\mathcal{U}$ -mesurable sur  $Y|X$ , alors  $g: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par  $g(x) = \int f(x, y) Q(dy|x) \quad \forall x \in X$  est  $\mathcal{U}$ -mesurable.



A.5 [Bertsekas et Shreve (1978) p. 146 à 153]

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces séparables métrisables.

- a) Si  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  et  $g: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  sont semi-continues inférieurement (s.c.i.), et bornées inférieurement sur  $X$ , alors  $f+g$  et  $\alpha f$  sont s.c.i.

$\forall \alpha > 0$ .

- b) Si  $Q$  est un noyau stochastique continu sur  $Y|X$  et  $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable, s.c.i. et bornée inférieurement, alors  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par

$$f(x) = \int h(x,y)Q(dy|x) \text{ est s.c.i. et bornée inférieurement.}$$

- c) Si  $H: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*$  est s.c.i. et  $Y$  est compact, alors  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par

$$f(x) = \inf_{y \in Y} h(x,y) \text{ est s.c.i. et l'infimum est atteint } \forall x \in X.$$

- d) Si  $Y$  est compact,  $D$  sous-ensemble fermé de  $X \times Y$ ,  $h: D \rightarrow \mathbb{R}^*$  s.c.i. et

$$f: \text{proj}_X(D) \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ définie par } f(x) = \min_{y \in D_x} h(x,y), \text{ alors } \text{proj}_X(D)$$

est fermé dans  $X$ ,  $f$  est s.c.i., et  $\exists \phi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$   $\mathcal{B}$ -mesurable telle que  $(x, \phi(x)) \in D$  et  $h(x, \phi(x)) = f(x) \forall x \in \text{proj}_X(D)$ .

Si  $X$  est aussi compact, alors, par Choquet (1969, p.36, Théorème 11.11),  $\text{proj}_X(D)$  est aussi compact.

A.6 [Bertsekas et Shreve (1978), p. 180]

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces Boréliens,  $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^*$  une fonction s.a.i. et  $Q$  un noyau stochastique  $\mathcal{B}$ -mesurable sur  $Y|X$ . Alors  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \int h(x,y)Q(dy|x)$  est s.a.i.

A.7 [Bertsekas et Shreve (1978), p. 179 et 184]

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces Boréliens,  $D$  un sous-ensemble analytique de  $X \times Y$  et  $h: D \rightarrow \mathbb{R}^*$  une fonction semi-analytique inférieurement. Soit  $f: \text{proj}_X(D) \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \inf_{y \in D_x} h(x, y)$ . Soit  $I = \{x \in X \mid \exists y \in D_x \text{ tel que } h(x, y) = f(x)\}$ . Alors

- a)  $f$  est semi-analytique inférieurement et  $I$  est  $\mathcal{U}$ -mesurable.
- b)  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $\phi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$   $\mathcal{U}$ -mesurable telle que  $\forall x \in \text{proj}_X(D)$ , on a  $(x, \phi(x)) \in D$  et

$$h(x, \phi(x)) = \begin{cases} = f(x) & \text{si } x \in I \\ \leq f(x) + \varepsilon & \text{si } x \notin I \text{ et } f(x) > -\infty \\ \leq -1/\varepsilon & \text{si } x \in I \text{ et } f(x) = -\infty . \end{cases}$$

APPENDICE BAPPLICATIONS CONTRACTANTES ET THEOREMEDU POINT FIXE

Soit  $B$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|$  et  $B_2$  un sous-ensemble fermé de  $B$ . Soit  $\phi: B_2 \rightarrow B_2$ . On dit que  $\phi$  est une application contractante s'il existe  $\alpha \in [0,1)$  tel que  $\|\phi(V_2) - \phi(V_1)\| \leq \alpha \|V_2 - V_1\|$   $\forall V_1, V_2 \in B_2$ .

B.1 THEOREME DU POINT FIXE [Bertsekas et Shreve (1978), p. 55].

Si  $T: B_2 \rightarrow B_2$  et  $\exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $T^m$  soit une application contractante, alors  $\exists \tilde{V} \in B_2$  tel que  $T(\tilde{V}) = \tilde{V}$ . De plus,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(V) - \tilde{V}\| = 0 \quad \forall V \in B_2$ .



APPENDICE C  
AJUSTEMENT DES  
PREUVES DES PROPOSITIONS DU CHAPITRE 2 POUR  
LE CAS D'UN MODELE I SUR HORIZON FINI

Dans la version I du modèle de PRMC décrit au chapitre 4, on peut remplacer la condition (4.7) par:

$$g(\tau, s, a) = 0 \quad \text{si } \tau \geq T \quad (\text{C.1})$$

$$K_1 + K_2 \alpha(\tau, s, a) \leq g(\tau, s, a) \leq g_1 \quad \text{si } \tau < T \quad (\text{C.2})$$

pour chaque  $(\tau, s, a)$  dans  $\Gamma$ , où  $T < \infty$  est l'horizon.

Dans ce cas, la condition (2.22) du modèle I de PD MED n'est plus satisfaite et on doit donc vérifier le lemme 2.6 et les propositions 2.8 à 2.14. Nous n'allons pas réécrire les preuves au complet, ce serait inutilement trop long, nous allons plutôt indiquer comment modifier les preuves données au chapitre 2 pour qu'elles demeurent valides.

D'abord, on redéfinit  $B_2$  comme suit:

$$B_2 \equiv \{V \in B_1 \mid K_1 + \min(0, K_2) \leq V(\tau, s) \leq \frac{g_1}{1-\delta_1} \text{ pour } \tau < T$$

$$\text{et } V(\tau, s) = 0 \quad \text{pour } \tau \geq T\}.$$

Dans la preuve du lemme 2.6, il suffit de remplacer  $\Phi$  par  $\Phi' \equiv \{i \in \Phi \mid \tau_i < T\}$  et la preuve tient.

Si on remplace (2.33) par

$$T(V)(\tau, s) \geq \begin{cases} [K_1 + \min(0, K_2)] & \text{si } \tau < T \\ 0 & \tau \geq T \end{cases}$$

la preuve de la proposition 2.8 tient. Dans la preuve de la proposition

2.9, il suffit de remplacer  $\frac{1}{\beta(x)} \int_H \beta(x_i) dP_{\pi, x}$  par

$$\int_H e^{-\rho(\tau_i - \tau)} \prod_{\tau_n < T} dP_{\pi, \tau, s} \quad \text{partout où cette expression apparaît.}$$

Le lemme 2.12 ne tient plus, mais on peut le remplacer par l'énoncé suivant, qui se démontre de façon similaire: "Si  $P_{\pi, \tau, s}[\tau_i < T \quad \forall i \in \mathbb{N}] = p > 0$ , alors  $V_{\pi(\tau, s)} = \infty$ ". Dans la preuve de la proposition 2.11, au lieu d'utiliser le lemme 2.12, on peut raisonner comme suit: puisque  $V_\mu$  est bornée,

$$\text{on a } P_{\pi, x}[\tau_i < T \quad \forall i \in \mathbb{N}] = 0 \Rightarrow P_{\pi, x}[\exists i \in \mathbb{N} \mid \tau_i \geq T] = 1$$

$$\Rightarrow \int_H (\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\rho(\tau_n - \tau_0)} V(\tau_n, s_n)) dP_{\pi, x} = 0 \quad \text{et par (2.49), } \tilde{V}_\mu(x) = V_\mu(x).$$

Enfin, les preuves des propositions 2.13 et 2.14 tiennent sans modification.



```

* CARTE 3
*
* NITER I3 NOMBRE D'ITERATIONS A EFFECTUER
* K I3 ORDRE DES SPLINES
* IDON I3 = 1 SI ON DOIT LIRE LES VALEURS INITIALES
* DANS LE FICHER DHF
* INTERPO I3 = 1 SI ON VEUT INTERPOLER
* SINON ON APPROXIME (DANS CE CAS , IL FAUT K=4)
* NXK I3 NOMBRE DE POINTS DE JONCTION DANS LE CAS
* D'UNE APPROXIMATION
* INEU I3 = 0 SI ON UTILISE NEWNOT
* = 1 SI TAU EST UNIFORME ET NOEUD EST CALCULE
* = 2 SI TAU EST LU ET NOEUD EST CALCULE
*
* CARTE 4
*
* N I3 NOMBRE DE POINTS D'EVALUATION A LA
* PREMIERE ITERATION
* NADD I3 (SI INEU=0) NOMBRE DE POINTS A AJOUTER
* A CHAQUE ITERATION
* IDIVTAU I3 APRES L'ITERATION NITER, SI IDIVTAU .GT. 1 ,
* ON MULTIPLIE LE NOMBRE DE POINTS D'EVALUATION
* PAR IDIVTAU POUR ESTIMER DELTAP ET DELTAM
* SI IDIVTAU = 1 , ON UTILISE PLUTOT L'ECART MAX.
* ENTRE DEUX VALEURS SUCCESSIVES DE T(V)
* IMPDIV I3 SI ON VEUT REEIMPRIMER CES POINTS D'EVALUATION
* ET LES VALEURS DE T(V) QU'ON Y OBTIENT.
* NSEC I3 NOMBRE DE BISSECTIONS
* POUR RAFFINER L'APPROXIMATION DE DELAI(.)
* ENTIER .GE. 0
*
* CARTE DE DONNEES 5 :
*
* IMPV2 I1 = 1 SI ON VEUT IMPRIMER V DANS LE
* FICHER 3.
* IMPV I1 = 1 SI ON VEUT IMPRIMER V SUR L'OUTPUT
* ICALDEL I1 = 1 S'IL FAUT CALCULER DELAI(.) AUX
* VALEURS A LIRE PLUS LOIN
* IMPDEL I1 = 1 SI ON VEUT IMPRIMER LES VALEURS DE
* DELAI
* IGRADEL I1 = 1 SI ON VEUT STOCKER N, TAU(.) ET DELAI(.)
* DANS LE FICHER 3.
* IGRATV I1 = 1 SI ON VEUT STOCKER N, TAU(.) ET TV(.)
* DANS LE FICHER 3.
* IELACT I1 = 1 SI ON VEUT CALCULER ET IMPRIMER DMAX ,
* ALPHA , ET ALPHA /(1-ALPHA)
* ITMUMT I1 = 1 SI ON VEUT CALCULER L'ERREUR ENTRE TMU ET T
* = 2 SI ON VEUT AUSSI L'MPRIMER SUR TOUT LE
* MAILLAGE
* = 0 SI ON NE VEUT PAS LA CALCULER
*
* CARTE DE DONNEES 6 :
*
* NO I3 PUISSANCE DE L'OPERATEUR DE LA P.D. QUI LE
* REND CONTRACTANT DE FACTEUR ALPHA1.
* ALPHA1 F7.5 FACTEUR DE CONTRACTION.
*
* SI INEU = 2 :
*
* N POINTS D'EVALUATION EN FORMAT 25(8F10.6/) , PAS NECESSAIREMENT
* TRIES. L'UN VAUT 0.0 , UN AUTRE VAUT T , ILS SONT TOUS DISTINCTS
* ET CHACUN EST UN MULTIPLE DE 2*DELXI.
*
* SI ICALDEL = 1
*
* NADD I3 NOMBRE DE VALEURS ADDITIONNELLES OU IL FAUT
* CALCULER DELAI(.).
* PUIS, SUR LES CARTES SUIVANTES, LES NADD VALEURS ADDITIONNELLES,
* EN FORMAT 25(8F10.6/). LES N+NADD VALEURS DOIVENT ETRE DISTINCTES,
* ET TOUTES MULTIPLES DE DELXI.

```



```

*
* SI ITMUMT .GE. 1
*
* DEL      F10.6  DISTANCE ENTRE LES POINTS DE REEVALUATION POUR
*              ESTIMER EPSILON 0.
*
* SI IDON .EQ. 1
*
* LES VALEURS INITIALES DOIVENT ETRE SUR L'UNITE 1.
* CARTE 1 :
*   K1      I1      ORDRE DES MORCEAUX DE POLYNOMES.
*   L       I4      NOMBRE DE MORCEAUX.
* CHACUNE DES L+1 CARTES SUIVANTES :
*   BREAK(I) F10.6 BORNE GAUCHE DU I-IEME MORCEAU.
*   COEF(II,I),II=1,K1 EN FORMAT 5F13.9.
*
* PARAMETER ( KMAX=5 , NMAX=202 , NPMAX=2002 )
* PARAMETER ( NFLP6=2500 )
*
*   KMAX .GE. K
*   NMAX .GE. N+K
*   NPMAX .GE. T/DELXI + 1
*   NFPL6 .GE. N*(NXK+6)
*
* REAL Q(NFLP6),CO(NMAX,3),NOEUD(NMAX),BCOEF(NMAX)
* COMMON /CV/ V(NPMAX)
* COMMON /VAL/ BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX),DELV1V,DELVV1,NP,DELXI
* COMMON /IT/ CR,F0,K0,T,NSEC,N,L,TAU(NMAX),TV(NMAX),DELA1(NMAX)
* +   ,PRECDEL,RHO,C(NPMAX),CPKAP(NPMAX),DENSAC(NPMAX),FBARAC(NPMAX)
* +   ,TAUCOU(NPMAX),DS3,DINF,DSUP,DDEL
*
* F0=1.0-FFBARAC(0.0,0.0)
* K0=FKAP(0.0)
* F0 = F(0) ; K0 = KAPPA(0)
*
* READ(5,1000) T,RHO,CR,DELXI,PRECDEL
* READ(5,1000) DINF,DSUP,DDEL
* READ(5,1001) NITER,K,IDON,INTERPO,NXK,INEU
* READ(5,1001) N,NADD,IDIPTAU,IMPDIV,NSEC
* READ(5,1005) IMPV3,IMPV,ICALDEL,IMPDEL,IGRADEL,IGRATV,IELACT
* +   ,ITMUMT
* READ(5,1012) NO,ALPHA1
* WRITE(6,2000) T,RHO,CR,DELXI,NITER,K,NSEC,PRECDEL
* WRITE(6,2001) DINF,DSUP,DDEL
*
* NP SERA LE NOMBRE DE POINTS D'EVALUATION DE LA FONCTION POUR
* EVALUER L'INTEGRALE DE 0 A T.
* NP = NINT(T/DELXI) + 1
* DS3 = DELXI/3.0
* XI = 0.0
* ICI ON STOCKE LES VALEURS QUI SERONT UTILISEES AFIN DE
* DIMINUER LES TEMPS DE CALCUL.
* A NOTER QUE DENSAC EST LA DENSITE MULTIPLIEE PAR DELXI/3
* DO 10 II=1,NP
*   C(II) = FC(XI,RHO)
*   CPKAP(II) = FKAP(XI) + C(II)
*   DENSAC(II) = FDENSAC(XI,RHO) * DS3
*   FBARAC(II) = FFBARAC(XI,RHO)
*   TAUCOU(II) = FKAP(XI)*TAUPAN(XI) + FPETITC(XI)
*   V(II) = CR
* 10 XI = XI + DELXI
*

```

```

IF (IDON .EQ. 1) THEN
*   LECTURE DES VALEURS INITIALES SOUS FORME PP ET CALCUL DE LA
*   FONCTION V INITIALE SUR LE MAILLAGE FIN DE TAILLE DELXI.
    READ(1,1100) K1,L
    WRITE(6,2010) L
    LP1 = L + 1
    DO 12 I=1,LP1
12      READ(1,1105) BREAK(I),(COEF(J,I),J=1,K1)
        WRITE(6,2012) BREAK(I),(COEF(J,I),J=1,K1)
        CALL VALPP(K1,L)
    ELSE
*   S'IL N'Y A PAS DE DONNEES INITIALES , ON DISPOSE L=N-K+2 NOEUDS
*   A INTERVALLES REGULIERS ET ON INITIALISE LES COEFFICIENTS POUR
*   QUE V SOIT IDENTIQUEMENT EGALE A CR.
        WRITE(6,2009)
        K1 = K
        L = N-K1+1
        LP1 = L+1
        DO 14 I=1,LP1
            BREAK(I) = T * FLOAT(I-1)/FLOAT(L)
            COEF(1,I) = CR
            DO 14 J=2,K1
14              COEF(J,I) = 0.
        ENDIF
*
*   IF (NITER .EQ. 0) THEN
        CALL VALPP(K1,L)
        GO TO 21
    ENDIF
*
*   ON PLACE LES NOEUDS ET LES PROCHAINS POINTS D'EVALUATION
*   SELON LA METHODE CHOISIE.
*   ICI , BREAK ET COEF NE SONT PAS MODIFIES.
    IF (INEU .EQ. 0) THEN
        CALL NOEUDO(K1,L,K,N,BREAK,COEF,DELXI,NOEUD,TAU)
        WRITE(6,2002) N,NADD
    ENDIF
    IF (INEU .EQ. 1) THEN
        CALL NOEUD1(K,N,T,DELXI,NOEUD,TAU)
        WRITE(6,2006)
    ENDIF
    IF (INEU .EQ. 2) THEN
        CALL NOEUD2(K,N,NOEUD,TAU)
        WRITE(6,2006)
    ENDIF
*
*   IF (INTERPO .EQ. 1) THEN
        WRITE(6,2007)
    ELSE
        WRITE(6,2008)
    ENDIF
    WRITE(6,2014)
*
*   DEBUT DES ITERATIONS DE L'ALGORITHME DE LA PROGRAMMATION DYNAM.
    DO 20 ITER = 1,NITER
*   CALCUL DE T(V) AUX POINTS D'EVALUATION CHOISIS.
        IF (ITER .EQ. 1) THEN
            CALL ITERER(K1)
        ELSE
            CALL ITERER(K)
        ENDIF
*   IF (INTERPO .EQ. 1) THEN
            ON DETERMINE V PAR INTERPOLATION PAR DES SPLINES
            CALL SPLINT(TAU,TV,NOEUD,N,K,BCOEF,IFLAG)
            CALL BSPLPP(NOEUD,BCOEF,N,K,BREAK,COEF,L,TV(N))
        ELSE
*   ON DETERMINE V PAR APPROX. MOINDRES CARRS , PAR UNE
*   FONCTION SPLINE CUBIQUE.
*   PUIS ON REMET LES COEFFICIENTS SOUS FORME COMPATIBLE
*   AVEC NOS SOUS-ROUTINES.
            IF (ITER .EQ. 1) THEN

```

```

*          SI ON A CHOISI D'APPROXIMER V PAR UNE METHODE DE MOINDRES
*          CARRÉS AVEC DES SPLINES CUBIQUES, ON PLACE LES NXK NOEUDS
*          A INTERVALLES REGULIERS.
          L = NXK
          LP1 = L + 1
          DO 17 I=1,LP1
17          BREAK(I) = T * FLOAT(I-1)/FLOAT(L)
          ENDIF
          CALL ICSVKU(TAU,TV,N,BREAK,LP1,BCOEF,CO,NMAX,ERR,Q,IER)
          DO 15 I=1,L
          COEF(4,I) = CO(I,3) * 6.0
          COEF(3,I) = CO(I,2) * 2.0
          COEF(2,I) = CO(I,1)
15          COEF(1,I) = BCOEF(I)
          D = BREAK(LP1)-BREAK(L)
          COEF(4,LP1) = 0.0
          COEF(3,LP1) = 0.0
          COEF(2,LP1) = 0.0
          COEF(1,LP1) = ((CO(L,3)*D + CO(L,2))*D + CO(L,1))*D
+          + BCOEF(L)
          ENDIF

*          CALCUL DES VALEURS DE V SUR LE MAILLAGE FIN.
          CALL VALPP(K,L)
          WRITE(6,2020) ITER,N,L,DELV1V,DELVV1,V(1)
          IF ((INEU .EQ. 0) .AND. (ITER .LT. NITER)) THEN
*          ON AJOUTE NADD NOEUDS ET ON "REOPTIMISE" LA POSITION DES NOEUDS
          N = N + NADD
          CALL NOEUDO(K,L,K,N,BREAK,COEF,DELXI,NOEUD,TAU)
          ENDIF
20          CONTINUE

*          IF (INTERPO .EQ. 1) THEN
          NPK = N + K
          WRITE(6,2025) NPK,(NOEUD(I),I=1,NPK)
          ELSE
          WRITE(6,2026) LP1,(BREAK(I),I=1,LP1)
          ENDIF
          WRITE(6,2030) N,(TAU(I),I=1,N)
          WRITE(6,2035) (TV(I),I=1,N)
          IF (IMPDEL .EQ. 1) WRITE(6,2040) (DELA(I),I=1,N)

*          CALCUL DES MESURES D'ERREUR
21          DELTAM = 0.0
          DELTAP = 0.0
          IF (IDIVTAU .GT. 1) THEN
*          ON DIVISE LA TAILLE DES INTERVALLES ENTRE LES POINTS PAR
*          IDIVTAU, ON Y PLACE DES NOUVEAUX POINTS D'EVALUATION,
*          PUIS ON CALCULE T(V) EN CES POINTS.
*          LES VALEURS OBTENUES SONT COMPAREES AVEC LES
*          VALEURS CORRESPONDANTES DE V ET SERVENT A ESTIMER
*          DELTAM ET DELTAP.
          N = (N-1)*IDIVTAU + 1
          CALL NOEUD1(K,N,T,DELXI,NOEUD,TAU)
          CALL ITERER(K)
          DO 22 I=1,N
          NTAUP1 = NINT(TAU(I)/DELXI) + 1
          DELTAP = AMAX1(DELTAP , TV(I)-V(NTAUP1))
22          DELTAM = AMAX1(DELTAM , V(NTAUP1)-TV(I))
          WRITE(6,2022) IDIVTAU,DELTAM,DELTAP
          IF (IMPDIV .EQ. 1) THEN
          WRITE(6,2030) N,(TAU(I),I=1,N)
          WRITE(6,2035) (TV(I),I=1,N)
          ENDIF
          ELSE
24          DO 24 I=2,N
          DELTAM = AMAX1( DELTAM , TV(I-1)-TV(I) )
          DELTAP = DELTAM
          WRITE(6,2023) DELTAM,DELTAP
          ENDIF

```

```

*
*   EPSM = NO*DELTAM + (NO-1)*DELVV1
*   EPSP = NO*DELTAP + (NO-1)*DELV1V
*   ERRM = (EPSM + ALPHA1*DELVV1)/(1.0-ALPHA1)
*   ERRP = (EPSP + ALPHA1*DELV1V)/(1.0-ALPHA1)
*   WRITE(6,2024) DELVV1,DELV1V,EPSP,ERRM,ERRP
*
*   CALCUL D'UN NOUVEAU DMAX ET D'UN NOUVEAU ALPHA1.
*   ELIMINATION D' ACTIONS.
*   IF ( IELACT .EQ. 1 )
+   CALL ELACT(ERRM,ERRP,NP,DELXI,DELTAM,DELTAP,DELVV1,DELV1V)
*
*   IF ( IMPV .EQ. 1 ) WRITE(6,2045) NP,(V(II),II=1,NP)
*
*   IMPRESSION DE LA FONCTION V TERMINALE DANS LE FICHER RHF
*   SOUS FORME PP.
*
*   LP1 = L + 1
*   WRITE(2,1100) K,L
*   DO 30 I=1,LP1
30  WRITE(2,1105) BREAK(I),(COEF(J,I),J=1,K)
*
*   IF ( IMPV3 .EQ. 1 ) WRITE(3,2050) (V(II),II=1,NP)
*   IMPRESSION DES VALEURS DE V SUR LE MAILLAGE FIN
*
*   IF ( IGRATV .EQ. 1 ) THEN
*   STOCKAGE DES VALEURS SERVANT A TRACER LE GRAPHIQUE
*   DE V
*   WRITE(3,1008) N,1
*   WRITE(3,1150) (TAU(I),I=1,N)
*   WRITE(3,1150) (TV(I),I=1,N)
*   ENDIF
*
*   IF ( ICALDEL .EQ. 1 ) THEN
*   ON LIT NADD NOUVEAUX POINTS QU'ON AJOUTE A TAU, PUIS
*   ON RECALCULE T(V) ET DELAI. CELA NOUS PERMETTRA DE
*   MIEUX VISIONNER LA FONCTION DELAI(.).
*   READ(5,1008) NADD
*   READ(5,1150) (TAU(N+I),I=1,NADD)
*   N = N + NADD
*   DO 32 J=N,2,-1
*   DO 32 I=2,J
*   IF ( TAU(I).LT.TAU(I-1) ) THEN
*   TAMPON = TAU(I)
*   TAU(I) = TAU(I-1)
*   TAU(I-1) = TAMPON
*   ENDIF
32  CONTINUE
*   CALL ITERER(K)
*   WRITE(6,2040) (DELA(I),I=1,N)
*   ENDIF
*
*   IF ( IGRADEL .EQ. 1 ) THEN
*   STOCKAGE DES VALEURS SERVANT A TRACER LE GRAPHIQUE
*   DE DELAI.
*   WRITE(3,1008) N,DELV1V,DELVV1,EPSP,ALPHA1
*   WRITE(3,1150) (TAU(I),I=1,N)
*   WRITE(3,1150) (DELA(I),I=1,N)
*   ENDIF
*
*   IF ( ITMUMT .GE. 1 ) CALL TMUMT(K,ITMUMT,EPSP,ALPHA1)
*   CALCUL DE EPSILON 0 ET DE EPSILON.
*
*   STOP
*

```

```

1000 FORMAT(4F6.3,E10.3)
1001 FORMAT(7I3)
1005 FORMAT(8I1)
1008 FORMAT(I3,5F10.7)
1012 FORMAT(I3,F7.5)
1100 FORMAT(I1,I4)
1105 FORMAT(F10.6,5F13.9)
1150 FORMAT(25(8F10.6/))
*
2000 FORMAT(///// ' HORIZON FINI'/// ' T =',F8.2/' RHO =',F7.3/' CR=',F8.2/
+ ' DELXI =',F6.4//I4,' ITERATIONS,',
+ ' ON UTILISE DES SPLINES D'ORDRE K = ',I1/
+ ' NSEC = ',I4,' PRECDEL = ',E8.3/)
2001 FORMAT(' DINF = ',F6.3,' DSUP = ',F6.3,' DDEL = ',F6.3/)
2002 FORMAT(// ' A CHAQUE ITERATION, LES NOEUDS SONT CHOISIS PAR LA SOUS
+-ROUTINE NEWNOT'
+ ' ET LES POINTS D'EVALUATION PAR LA FORMULE DE C.DE BOOR.'/
+ ' ON DEBUTE AVEC',I3,' POINTS D'EVALUATION ET ON EN AJOUTE',I3,'
+A CHAQUE ITERATION.'//)
2006 FORMAT('/ ' LES POINTS D'EVALUATION SONT FIXES A PRIORI'//)
2007 FORMAT('/ ' INTERPOLATION'//)
2008 FORMAT('/ ' APPROXIMATION DE MOINDRES CARRÉS PAR DES SPLINES CUBIQU
+ES, AVEC NOEUDS VARIABLES'//)
2009 FORMAT(' LA FONCTION PP INITIALE EST PARTOUT EGALE A CR')
2010 FORMAT(' LA FONCTION PP INITIALE POSSEDE',I4,' MORCEAUX.'/
+ ' LES COEFFICIENTS DU POLYNOME A DROITE DE CHAQUE POINT DE RUPTURE
+ SONT :'/
+ ' POINT DE RUPTURE      CONSTANTE      DERIVEE      DERIVEE SEC.      DER
+IVEE TROIS.'//)
2012 FORMAT(F15.6,4X,6F14.9)
2014 FORMAT('/ ' ITERATION      N      L      DELTA(V1,V)      DELTA(V,V1)',
+ ' V1(0)'//)
2020 FORMAT(I6,I8,I6,2F14.9,2F14.6)
2022 FORMAT(// ' APRES L'ITERATION NITER, ON MULTIPLIE LE NOMBRE DE',
+ ' POINTS D'EVALUATION PAR',I3/' LES NOUVEAUX NOEUDS ET POINTS '
+ ' D'EVALUATION SONT CHOISIS PAR LA SOUS-ROUTINE NOEUDO'/
+ ' CELA PERMET D'ESTIMER DELTAM=-INF(T(V1)-V1) ET ',
+ ' DELTAP=SUP(T(V1)-V1)'//)
+ ' ON OBTIENT DELTAM = ',F10.7,' , ET DELTAP = ',F10.7)
2023 FORMAT(//, ' DES BORNES SUR T(V)-V1 SONT OBTENUES EN UTILISANT',
+ ' L'ECART MAXIMUM ENTRE DEUX VALEURS SUCCESSIVES DE T(V)'//
+ ' DELTAM = ',F10.7,' ET DELTAP = ',F10.7)
2024 FORMAT('/ ' ON PEUT ALORS CALCULER DES BORNES -ERRM ET ERRP POUR ',
+ ' V*-V1'/// ' DELVV1 = ',F12.7,' DELV1V = ',F12.7
+ ' EPSM = ',F12.7,' EPSP = ',F12.7/
+ ' ERRM = ',F12.7,' ERRP = ',F12.7)
2025 FORMAT(// ' LES',I4,' NOEUDS A LA DERNIERE ITERATION SONT :'/,25(8
+F10.6/))
2026 FORMAT(// ' LES',I4,' POINTS DE JONCTION SONT :'/,25(8F10.6/))
2030 FORMAT(// ' LES',I4,' POINTS D'EVALUATION SONT :'/,
+ 30(6F13.6/))
2035 FORMAT('/ ' LES VALEURS DE T(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT :'/
+ 30(2X,6F13.8/))
2040 FORMAT('/ ' LES VALEURS OPTIMALES DE D OBTENUES EN CES POINTS ',
+ ' SONT :'/,30(6F13.6/))
2045 FORMAT('/ ' VALEURS DE V :'/,400(10F13.8/))
2050 FORMAT(I5/700(6F13.9/))
END

```

```

*      SUBROUTINE NOEUD0(K1,L,K,N,BREAK,COEF,DELXI,NOEUD,TAU)
*      "OPTIMISATION" DE LA POSITION DES NOEUDS PAR LA SOUS-ROUTINE
*      NEWNOT DE C.DE BOOR.
*      LES POINTS D'EVALUATION SONT AUSSI EVALUES SELON UNE FORMULE
*      SUGGEREE PAR C.DE BOOR.
*      PARAMETER (NMAX=202 , KMAX=5)
*      NMAX .GE. N+K
*      REAL BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX),NOEUD(NMAX),TAU(NMAX)
+      ,BREAKN(NMAX)
*      CALL NEWNOT(BREAK,COEF,L,K1,BREAKN,N-K+1)
*      DO 2 I=1,K
*          NOEUD(I) = BREAKN(1)
*      2   NOEUD(N+I) = BREAKN(N-K+2)
*      NMKP1 = N-K+1
*      DO 4 I=2,NMKP1
*      4   NOEUD(I+K-1) = BREAKN(I)
*      KM1 = K-1
*      DO 8 I=1,N
*          TAU(I) = 0.
*          DO 6 J=1,KM1
*      6   TAU(I) = TAU(I) + NOEUD(I+J)
*      8   TAU(I) = 2.0*DELXI * FLOAT(NINT(TAU/(2.0*DELXI*FLOAT(KM1))))
*      RETURN
*
*      END
*
*      SUBROUTINE NOEUD1(K,N,T,DELXI,NOEUD,TAU)
*      LES POINTS D'EVALUATION SONT PLACES A INTERVALLES REGULIERS
*      PUIS LA POSITION DES NOEUDS EST CALCULEE PAR LA FORMULE
*      DE C.DE BOOR.
*      PARAMETER ( NMAX=202 )
*      REAL NOEUD(NMAX),TAU(NMAX)
*      D = T/FLOAT(N-1)
*      DO 2 I=1,N
*          P = FLOAT(I-1)*D
*      2   TAU(I) = 2.0*DELXI * FLOAT(NINT(P/(2.0*DELXI)))
*      DO 3 I=1,K
*          NOEUD(I) = TAU(1)
*      3   NOEUD(N+I) = TAU(N)
*      NMK = N-K
*      KM1 = K-1
*      DO 6 I=1,NMK
*          SOM = 0.
*          DO 4 J=1,KM1
*      4   SOM = SOM + TAU(I+J)
*      6   NOEUD(K+I) = SOM/FLOAT(KM1)
*      RETURN
*
*      END
*      SUBROUTINE NOEUD2(K,N,NOEUD,TAU)
*      LA POSITION DES POINTS D'EVALUATION EST LUE , PUIS ON CALCULE
*      LA POSITION DES NOEUDS PAR LA FORMULE DE C.DE BOOR.
*      PARAMETER ( NMAX=202 )
*      REAL NOEUD(NMAX),TAU(NMAX)
*      READ(5,1150) (TAU(I),I=1,N)
1150  FORMAT(25(8F10.6/))
*      DO 2 J=N,2,-1
*          DO 2 I=2,J
*              IF ( TAU(I).LT.TAU(I-1) ) THEN
*                  TAMPON = TAU(I)
*                  TAU(I) = TAU(I-1)
*                  TAU(I-1) = TAMPON
*              ENDIF
*      2   CONTINUE
*      DO 3 I=1,K
*          NOEUD(I) = TAU(1)
*      3   NOEUD(N+I) = TAU(N)

```

```

      NMK = N-K
      KM1 = K-1
      DO 6 I=1,NMK
        SOM = 0.
        DO 4 J=1,KM1
          SOM = SOM + TAU(I+J)
4       NOEUD(K+I) = SOM/FLOAT(KM1)
6       RETURN
*
      END
*
      SUBROUTINE VALPP(K,L)
      CALCUL DES VALEURS DE V SUR UN MAILLAGE DE TAILLE DELXI ,
      C.-A-D. EN NP POINTS EQUIDISTANTS , A PARTIR DE LA
      REPRESENTATION DE V SOUS FORME PP.
*
      LES QUANTITES DELVV1 ET DELV1V SONT AUSSI CALCULEES ICI.
      PARAMETER ( KMAX=5 , NMAX=202 , NPMAX=2002 )
      INTEGER IBREAK(NMAX)
      COMMON /CV/ V(NPMAX)
      COMMON /VAL/ BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX),DELV1V,DELVV1,NP,DELXI
      LP1 = L + 1
      DO 200 I=1,LP1
200     IBREAK(I) = NINT(BREAK(I)/DELXI) + 1
          M = 0
          DELV1V = 0.
          DELVV1 = 0.
          DO 210 II=1,NP
            IF (II .GE. IBREAK(M+1)) THEN
              M = M+1
              X = 0.
              VAL = COEF(1,M)
            ELSE
              X = X + DELXI
              VAL = 0.
              F = K
              DO 220 J=K,1,-1
                VAL = (VAL/F)*X + COEF(J,M)
220             F = F - 1.0
              ENDIF
              DELV1V = AMAX1(VAL-V(II) , DELV1V)
              DELVV1 = AMAX1(V(II)-VAL , DELVV1)
210     V(II) = VAL
          RETURN
*
      END
*
      REAL FUNCTION PPVALU ( BREAK, COEF, L, K, X, JDERIV )
      CALCUL DE LA JDERIV-IEME DERIVEE DE V AU POINT X
      PARAMETER ( KMAX=5 , NMAX=202 )
      REAL BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX)
      PPVALU =0.
      FMMJDR = K-JDERIV
      IF ( FMMJDR .LE. 0. ) RETURN
      IF (X .GE. BREAK(L+1)) THEN
        IF (JDERIV .EQ. 0) PPVALU = COEF(1,L+1)
        RETURN
      ENDIF
      CALL INTERV ( BREAK,L,X,I,NDUMMY )
      H = X - BREAK(I)
      DO 10 M=K,JDERIV+1,-1
        PPVALU = (PPVALU/FMMJDR)*H + COEF(M,I)
10     FMMJDR = FMMJDR - 1.0
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE ITERER(K)
*   CALCUL DE T(V) ET DE DELAI AUX POINTS D'EVALUATION.
*   LE DELAI OPTIMAL EST RAFFINE AU PLUS NSEC FOIS ,
*   OU JUSQU'A CE QU'IL BOUGE DE MOINS QUE PRECDEL.
*
PARAMETER ( KMAX=5 , NMAX=202 , NPMAX=2002 )
COMMON /CV/ V(NPMAX)
COMMON /VAL/ BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX),DELV1V,DELVV1,NP,DELXI
COMMON /IT/ CR,FO,KO,T,NSEC,N,L,TAU(NMAX),TV(NMAX),DELAI(NMAX)
+   ,PRECDEL,RHO,C(NPMAX),CPKAP(NPMAX),DENSAC(NPMAX),FBARAC(NPMAX)
+   ,TAUCOU(NPMAX),DS3,DINF,DSUP,DDEL
INTEGER NPSP1(20)
REAL INTEGR,INTEXAC,PS(20)
*
NM1 = N-1
DO 390 I=1,NM1
  NTAU = NINT(TAU(I)/DELXI)
  NTAUP1 = NTAU + 1
  NTMTAU = NP-NTAUP1
  NI = NTMTAU + 1
  PS(1) = 0.0
  NPSP1(1) = 1
  IPS = 1
  D = DINF
  NDP1 = NINT(D/DELXI) + 1
  DSUP1 = AMIN1(DSUP-DDEL , T-TAU(I)-DDEL)
*
*   NTAU = TAU EN MULTIPLES DE DELXI
*   NTMTAU = T-TAU EN MULTIPLES DE DELXI
*   PS CONTIENT LES POINTS 0, T-TAU ET LES AUTRES POINTS
*   COMPRIS ENTRE CES DEUX BORNES QUI SONT LES REPRESENTANTS
*   D'UN MINIMUM LOCAL. NPSP1 CONTIENT CES MEMES POINTS
*   EN MULTIPLES DE DELXI , +1.
*   DSUP1 EST LA VALEUR MAXIMUM DE D POUR LA RECHERCHE D'UN
*   MINIMUM LOCAL INTERIEUR A (0,T-TAU).
  IF (D .GT. DSUP1) GO TO 335
  H2 = TAUCOU(NDP1)
+   + PPVALU(BREAK,COEF,L,K,TAU(I)+D,1)
+   - RHO * V(NTAU + NDP1)
*
300  H1 = H2
  D = D + DDEL
  NDP1 = NINT(D/DELXI) + 1
  H2 = TAUCOU(NDP1)
+   + PPVALU(BREAK,COEF,L,K,TAU(I)+D,1)
+   - RHO * V(NTAU + NDP1)
*
  IF ((H1 .LT. 0.0) .AND. (H2 .GE. 0.0)) THEN
    P1 = D - DDEL
    P2 = D
    H3 = H2
    DO 320 III=1,NSEC
      IF (K .LE. 2) THEN
        P = (P2+P1)/2.0
      ELSE
        P = P2 - (P2-P1)*H2/(H2-H1)
      ENDIF
      H = FKAP(P)*TAUPAN(P) + FPETITC(P)
+     + PPVALU(BREAK,COEF,L,K,TAU(I)+P,1)
+     - RHO * PPVALU(BREAK,COEF,L,K,TAU(I)+P,0)
      IF (H .GT. 0.0) THEN
        P2 = P
        H2 = H
      ELSE
        P1 = P
        H1 = H
      ENDIF
    ENDIF
    IF ((P2-P1) .LT. PRECDEL) GO TO 330
*
320  CONTINUE

```



```

330     IPS = IPS + 1
        IF (K .LE. 2) THEN
            PS(IPS) = (P2+P1)/2.0
        ELSE
            PS(IPS) = P
        ENDIF
        NPSP1(IPS) = 2 * NINT(PS(IPS)/(2.0*DELXI)) + 1
        H2 = H3
    ENDIF
    IF (D .LT. DSUP1) GO TO 300
*
335     DVALMIN = T - TAU(I)
        VALMIN = FBARAC(NI) * C(NI)
        AFONCS3 = DENSAC(NI) * (CPKAP(NI) + V(NP))
        INTEGR = 0.0
        DO 340 II=NTMTAU,2,-2
            IIM1 = II - 1
            FONCS3 = DENSAC(IIM1) * ( CPKAP(IIM1) + V(IIM1+NTAU) )
            INTEGR = AFONCS3 + 4.0 * DENSAC(II) * (CPKAP(II)
+             +V(II+NTAU)) + FONCS3 + INTEGR
        AFONCS3 = FONCS3
        IF (IIM1 .EQ. NPSP1(IPS)) THEN
            D = PS(IPS)
            IPS = IPS - 1
            DIF = D - FLOAT(IIM1-1)*DELXI
            DIFS2 = DIF/2.0
            D2 = D - DIFS2
            INTEXAC = INTEGR - (DIFS2/DELXI)*( AFONCS3 + DS3 *
+             FDENSAC(D,RHO)*(FC(D,RHO)+FKAP(D)+PPVALU(BREAK,COEF,L,K,
+             TAU(I)+D,0)) + 4.0 *FDENSAC(D2,RHO) *(FC(D2,RHO)+FKAP(D2)
+             +PPVALU(BREAK,COEF,L,K,TAU(I)+D2,0))*DS3 )
            VALEXAC = FFBARAC(D,RHO) * ( FC(D,RHO) +
+             PPVALU(BREAK,COEF,L,K,TAU(I)+D,0) ) - INTEXAC
        IF (VALEXAC .LT. VALMIN) THEN
            VALMIN = VALEXAC
            DVALMIN = D
        ENDIF
    ENDIF
340     CONTINUE
        TV(I) = VALMIN + INTEGR + CR + FO*(V(NTAUP1)+K0)
390     DELAI(I) = DVALMIN
        TV(N) = CR + FO*(V(NP)+K0)
        DELAI(N) = 0.0
        RETURN
    END

SUBROUTINE TMUMT(K,ITMUMT,EPSM,ALPHA1)
*
*     CALCUL DE EPSO ET EPSILON.
*
PARAMETER ( KMAX=5 , NMAX=202 , NPMAX=2002 , NG=2 )
REAL INTEGR,NOEUD(NMAX),BCOEF(NMAX),DBREAK(NMAX),DCOEF(KMAX,NMAX)
REAL X1(NPMAX),Y1(NPMAX),X(NMAX),F(NMAX)
COMMON /CV/ V(NPMAX)
COMMON /VAL/ BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX),DELV1V,DELVV1,NP,DELXI
COMMON /IT/ CR,FO,KO,T,NSEC,N,L,TAU(NMAX),TV(NMAX),DELA1(NMAX)
+     ,PRECDEL,RHO,C(NPMAX),CPKAP(NPMAX),DENSAC(NPMAX),FBARAC(NPMAX)
+     ,TAUCOU(NPMAX),DS3,DINF,DSUP,DDEL
*
*     B1 = 0.0
*
WRITE(6,2320)
READ(5,1150) DEL
*     DEL EST LA TAILLE DU MAILLAGE POUR L'ESTIMATION DE EPSILON 0.
1150 FORMAT(F10.6)
    J = 1
    JJ = 1

```

```

ERRVAL = 0.0
X(1) = TAU(1)
F(1) = DELAI(1)
DO 400 I=2,N
  IF (DELA(I) .LE. DELAI(I-1)) THEN
    RECHERCHE DES POINTS D'EVALUATION SUR UN SEGMENT CONTINU
    JJ = JJ+1
    X(JJ) = TAU(I)
    F(JJ) = DELAI(I)
  ELSE
    APPROXIMATION DE LA POLITIQUE SUR LE SEGMENT CONTINU
    PAR DES SPLINES D'ORDRE K.
    DO 250 II=1,K
      NOEUD(II) = X(1)
      NOEUD(JJ+II) = X(JJ)
    250 JJMK = JJ - K
      KM1 = K - 1
      DO 260 II=1,JJMK
        SOM = 0.0
        DO 255 III=1,KM1
          255 SOM = SOM + X(II+III)
        260 NOEUD(K+II) = SOM/FLOAT(KM1)
    CALL SPLINT(X,F,NOEUD,JJ,K,BCOEF,IFLAG)
    CALL BSPLPP(NOEUD,BCOEF,JJ,K,DBREAK,DCOEF,LD,F(JJ))
    B2 = TAU(I)
    N1 = INT((B2-B1)/DEL) + 1
    DO 270 II=1,N1
      X1(II) = B1 + FLOAT(II-1)*DEL
      270 Y1(II) = PPVALU(DBREAK,DCOEF,LD,K,X1(II),0)
    DO 390 I1=1,N1
      CALCUL DE L'ERREUR TMU(V1)-V1 AUX POINTS DONT LES
      ABCISSES SONT DANS LE VECTEUR X1.
      NTAU = NINT(X1(I1)/DELXI)
      NTAUP1 = NTAU + 1
      D = Y1(I1)
      ND = 2 * NINT(D/(2.0*DELXI))
      INTEGR = 0.0
      AFONCS3 = DENSAC(ND+1) * (CPKAP(ND+1) + V(ND+NTAUP1))
      DIF = D - FLOAT(ND) * DELXI
      DIFS2 = DIF/2.0
      D2 = D - DIFS2
      XX = X1(I1) + D
      F2 = DS3 * FDENSAC(D,RHO) * ( FC(D,RHO) + FKAP(D)
      + PPVALU(BREAK,COEF,L,K,XX,0) )
      XX = X1(I1) + D2
      F1 = DS3 * FDENSAC(D2,RHO) * ( FC(D2,RHO) + FKAP(D2)
      + PPVALU(BREAK,COEF,L,K,XX,0) )
      INTEGR = INTEGR - (AFONCS3 + F2 + 4.0*F1) *DIFS2/DELXI
      DO 320 II=ND,2,-2
        IIM1 = II - 1
        FONCS3 = DENSAC(IIM1) * ( CPKAP(IIM1) + V(IIM1+NTAU) )
        INTEGR = AFONCS3 + 4.0 * DENSAC(II) * (CPKAP(II)
        +V(II+NTAU)) + FONCS3 + INTEGR

```

```

320         AFONCS3 = FONCS3
*
*
340         VALAPP = INTEGR + FFBARAC(D,RHO)*FC(D,RHO) + CR
+           + FO *(V(NTAUP1)+K0)
+           IF ((T-X1(I1)-D) .GE. PRECDEL) VALAPP = VALAPP +
+           FFBARAC(D,RHO) * PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X1(I1)+D,0)
VTAUP1 = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X1(I1),0)
VALDIF = ABS( VTAUP1 - VALAPP )
390         ERRVAL = AMAX1(ERRVAL,VALDIF)
*
        PRINT *,J,JJ,B1,B2,X(JJ),F(JJ),ERRVAL,NG
        IF (J .GE. NG) GO TO 420
        J = J + 1
        JJ = 1
        B1 = B2
        F(1) = DELAI(I)
*
        PRINT *, ' ENDIF ',B1,B2,X(1),F(1)
        ENDIF
400        CONTINUE
*
420        D = V1(N1)
        NI = NINT(D/DELXI) - 1
        NIM1 = NI-1
        INTEGR = 0.0
        AFONCS3 = DENSAC(NI)
        DO 410 II=NIM1,2,-2
            IIM1 = II-1
            FONCS3 = DENSAC(IIM1)
            INTEGR = AFONCS3 + FONCS3 + 4.0*DENSAC(II) + INTEGR
410        AFONCS3 = FONCS3
        ALPHA = FO + FBARAC(NI) + INTEGR
        EPS0 = ERRVAL + DELVV1
        EPS = EPSM + (DELVV1+EPS0)*ALPHA1/(1.0-ALPHA1) + EPS0
+         + (DELVV1V + EPS0)*ALPHA/(1.0-ALPHA)
*
        WRITE(6,2310) DEL,ERRVAL,EPS0,ALPHA,EPS
        RETURN
*
2310        FORMAT(// ' APRES REEVALUATION A TOUS LES ',F8.5,' ON OBTIENT :'/
+         ' DIFFERENCE MAXIMUM ENTRE TMU(V1) ET V1 :',F12.6/
+         ' EPS0 = ',F12.6,'      ALPHA = ',F10.6,' EPSILON =',F12.6)
2300        FORMAT(I7,5(3X,F12.5))
2320        FORMAT(// ' RESULTATS DE LA SOUS ROUTINE TMUMT'//)
        END

SUBROUTINE ELACT(ERRM,ERRP,NP,DELXI,DELTAM,DELTAP,DELVV1,DELVV1V)
*
*   SOUS ROUTINE EXAMINANT LA POSSIBILITE D'ELIMINER DES ACTIONS.
*   SI C'EST POSSIBLE ET SI CELA MODIFIE LE FACTEUR DE CONTRACTION
*   POUR UN MODELE C , ALORS LA SOUS ROUTINE CALCULE LE NOUVEAU
*   FACTEUR DE CONTRACTION ALPHA.
*
PARAMETER ( KMAX=5 , NMAX=202 , NPMAX=2002 )
REAL INTEGR
COMMON /CV/ V(NPMAX)
COMMON /IT/ CR,FO,K0,T,NSEC,N,L,TAU(NMAX),TV(NMAX),DELA1(NMAX)
+         ,PRECDEL,RHO,C(NPMAX),CPKAP(NPMAX),DENSAC(NPMAX),FBARAC(NPMAX)
+         ,TAUCOU(NPMAX),DS3,DINF,DSUP,DDEL
*
        WRITE(6,2030)
        F = 1.0-FO
        DMAX = 0.0
        D0 = 0.0
5        B0 = CR + FO*(K0-ERRM)-ERRP
        VALPREC = -F*ERRM + B0
        IF (VALPREC .LE. 0.) THEN
            WRITE(6,2026)
            RETURN

```

```

ELSE
  D2 = T
  DO 15 I=1,20
    D = (D0 + D2) /2.0
    IF ((D2-D0) .LT. 0.0001) GO TO 20
    ID = NINT(D/DELXI)
    FD = EXP(-RHO*D)*F
    B = -ERRM*FD + B0
    NTMAX = NP - ID
    VALMIN = -F*V(1) + FD*V(1+ID) + B
    DO 10 II=2,NTMAX
      VALEUR = F*V(II) + FD*V(II+ID) + B
      IF (VALEUR .LT. VALMIN) VALMIN = VALEUR
10     CONTINUE
      IF (VALMIN .GE. 0.0) THEN
        D0 = D
        ELSE
          D2 = D
        ENDIF
15     CONTINUE
  ENDIF
*
*   ON CONNAIT MAINTENANT DO
20   NI = NINT(D0/DELXI) - 1
*
  NIM1 = NI-1
  INTEGR = 0.0
  AFONCS3 = DENSAC(NI)
  DO 340 II=NIM1,2,-2
    IIM1 = II-1
    FONCS3 = DENSAC(IIM1)
    INTEGR = AFONCS3 + FONCS3 + 4.0*DENSAC(II) + INTEGR
340  AFONCS3 = FONCS3
  ALPHA = F0 + FBARAC(NI) + INTEGR
  A = ALPHA/(1.0-ALPHA)
  WRITE(6,2023) D0,ALPHA,A
*
  IF ((D0-DMAX) .LE. 0.001) GO TO 400
  DMAX = D0
  ERRM = (DELTAM + ALPHA*DELVV1)/(1.0-ALPHA)
  ERRP = (DELTAP + ALPHA*DELVV1)/(1.0-ALPHA)
  GO TO 5
400 WRITE(6,2040) ERRM,ERRP
2023 FORMAT(/' D0 = ',F10.5,5X,'ALPHA = ',F7.5,5X,
+ 'ALPHA /(1 - ALPHA) =',F10.5)
2024 FORMAT(F7.5)
2026 FORMAT(' D0 = 0.0')
2030 FORMAT(/' RESULTATS DU PROCESSUS D"ELIMINATION D"ACTIIONS'/)
2040 FORMAT(/' ERRM = ',F12.7,' ERRP = ',F12.7)
  RETURN
  END
*
```

```

*      FUNCTION TAUPAN(X)
*      TAUX DE PANNE
*      A = 0.05
*      TAUPAN = 2.0 * A * X
*      RETURN
*      END
*
*      FUNCTION FPETITC(X)
*      COUT PAR UNITE DE TEMPS POUR UNE COMPOSANTE D'AGE X.
*      FPETITC = ( EXP(-X) + X ) /10.0
*      RETURN
*      END
*
*      FUNCTION FC(X,RHO)
*      DEFINITION DE LA FONCTION DE COUTS DE FONCTIONNEMENT CUMULES
*      FC = ( (EXP(RHO*X)-EXP(-X))/(1.0 +RHO)
+      + (EXP(RHO*X)-RHO*X-1.0)/(RHO*RHO) ) /10.0
*      RETURN
*      END
*
*      FUNCTION FKAP(X)
*      DEFINITION DE LA FONCTION DE COUTS DE PANNE
*      FKAP = 5.0 + ALOG(1.0+X)
*      RETURN
*      END
*
*      FUNCTION FDENSAC(X,RHO)
*      FONCTION DE DENSITE ACTUALISEE
*      A = 0.05
*      FDENSAC = 0.95 * EXP(-(A*X+RHO)*X) * 2.0 * A * X
*      RETURN
*      END
*
*      FUNCTION FFBARAC(X,RHO)
*      FONCTION DE SURVIE FBAR ACTUALISEE
*      A = 0.05
*      FFBARAC = 0.95 * EXP(-(A*X+RHO)*X)
*      RETURN
*      END

```

### D.3 Programmes du chapitre 7.

```

*      SOLUTION D'UN PROBLEME DE REMPLACEMENT SELON L'AGE AVEC
*      POSSIBILITE DE REPARATION MINIMALE LORS D'UNE PANNE.
*      REF: THESE DE DOCTORAT DE P.LECUYER, CHAP. 7.

```

```

*      ON DOIT DISPOSER LES DONNEES COMME SUIT :

```

```

*      CARTE 1 :

```

```

*      RHO      F10.4  TAUX D'ACTUALISATION
*      CR       F10.4  COUT DE REMPLACEMENT
*      CP       F10.4  COUT DE PANNE
*      M        F10.4  COUT MOYEN D'UNE REPARATION MINIMALE
*      LAMBDA   F10.4  CONSTANTE DEFINISSANT LE TAUX DE PANNE;

```



```

READ(5,1000) RHO,CR,CP,M,LAMBDA
READ(5,1000) DELXI,GVMIN,DELGV,GVMAX
READ(5,1001) NITER,K,N,IDON,IDIVTAU,NSEC
READ(5,1005) IGRAPH
READ(5,1012) NO,ALPHA1
WRITE(6,2000) RHO,CR,CP,M,LAMBDA,DELXI,GVMIN,DELGV,GVMAX,NSEC
WRITE(6,2001) NITER,K
*
IF (IDON .EQ. 1) THEN
*   LECTURE DES VALEURS INITIALES SOUS FORME PP
    READ(1,1100) K1,L
    WRITE(6,2010) L
    LP1 = L + 1
    DO 12 I=1,LP1
12      READ(1,1105) BREAK(I),(COEF(II,I),II=1,K1)
        WRITE(6,2012) BREAK(I),(COEF(II,I),II=1,K1)
    ELSE
*   S'IL N'Y A PAS DE DONNEES INITIALES , ON DISPOSE L=N-K+2 NOEUDS
*   A INTERVALLES REGULIERS ET ON INITIALISE LES COEFFICIENTS POUR
*   QUE J SOIT IDENTIQUEMENT EGALE A 0.
        WRITE(6,2009)
        K1 = K
        L = N-K1+1
        LP1 = L+1
        DO 14 I=1,LP1
            BREAK(I) = GVMAX * FLOAT(I-1)/FLOAT(L)
            DO 14 II=1,K1
14              COEF(II,I) = 0.
        ENDIF
*
    CALL CALDO(K1)
    DO 16 II=1,NPMAX
        X = DELXI*FLOAT(II-1)
        IF (X .GT. BREAK(LP1)) GO TO 18
16      J(II) = PPVALU(BREAK,COEF,L,K1,X,0)
18      VAL = PPVALU(BREAK,COEF,L,K1,DO,0)
        DO 20 III=II,NPMAX
20      J(III) = VAL
        WRITE(6,2014)
*
*   DEBUT DES ITERATIONS DE L'ALGORITHME DE LA PROGRAMMATION DYNAM.
    DO 30 ITER = 1,NITER
        IF (ITER .GT. 1) CALL CALDO(K)
        CALL NOEUDI(K,N,DO,NOEUD,TAU)
*       CALCUL DE J(V) AUX POINTS D'EVALUATION CHOISIS.
*
        IF (ITER .EQ. 1) THEN
            CALL CALJV(K1)
        ELSE
            CALL CALJV(K)
        ENDIF
*       ON DETERMINE J PAR INTERPOLATION PAR DES SPLINES
        CALL SPLINT(TAU,JV,NOEUD,N,K,BCOEF,IFLAG)
        CALL BSPLPP(NOEUD,BCOEF,N,K,BREAK,COEF,L,JV(N))
*
        DELJ1J = 0.0
        DELJ2J = 0.0
        DO 24 II=1,NPMAX
            X = DELXI*FLOAT(II-1)
            IF (X .GT. DO) GO TO 26
            VAL = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X,0)
            DELJ1J = AMAX1(VAL-J(II),DELJ1J)
            DELJ2J = AMAX1(J(II)-VAL,DELJ2J)
24      J(II) = VAL

```

```

*
26 VAL = JV(N)
   DO 28 III=11,NPMAX
       DELJ1J = AMAX1(VAL-J(III),DELJ1J)
       DELJ1J = AMAX1(J(III)-VAL,DELJ1J)
28   J(III) = VAL
30   WRITE(6,2020) ITER,N,L,DO,DELJ1J,DELJ1J,JV(1)
*
*   IMPRESSION DES NOEUDS, DES POINTS D'EVALUATION, ET DES
*   VALEURS CALCULEES.
*
   NPK = N + K
   WRITE(6,2025) NPK,(NOEUD(I),I=1,NPK)
   WRITE(6,2030) N,(TAU(I),I=1,N)
   WRITE(6,2035) (JV(I),I=1,N)
*
   DELTAM = 0.0
   DELTAP = 0.0
   IF (IDIVTAU .GT. 1) THEN
*     ON DIVISE LA TAILLE DES INTERVALLES ENTRE LES POINTS PAR
*     IDIVTAU, ON Y PLACE DES NOUVEAUX POINTS D'EVALUATION,
*     PUIS ON CALCULE T(V) EN CES POINTS.
*     LES VALEURS OBTENUES SONT COMPAREES AVEC LES
*     VALEURS CORRESPONDANTES DE J ET SERVENT A ESTIMER
*     DELTAM ET DELTAP.
       N = (N-1)*IDIVTAU + 1
       CALL NOEUD1(K,N,DO,NOEUD,TAU)
       CALL CALJV(K)
       DO 40 I=1,N
           JTAUI = PVALU(BREAK,COEF,L,K,TAU(I),0)
           DELTAM = AMAX1(DELTAM,JTAUI-JV(I))
           DELTAP = AMAX1(DELTAP,JV(I)-JTAUI)
40        WRITE(6,2022) IDIVTAU,DELTAM,DELTAP
       ELSE
           DO 50 I=2,N
               DELTAM = AMAX1(DELTAM,JV(I-1)-JV(I))
               DELTAP = DELTAM
50          WRITE(6,2023) DELTAM,DELTAP
       ENDIF
*
   EPSM = NO*DELTAM + (NO-1)*DELJ1J
   EPSP = NO*DELTAP + (NO-1)*DELJ1J
   ERRM = (EPSM + ALPHA1*DELJ1J)/(1.0-ALPHA1)
   ERRP = (EPSP + ALPHA1*DELJ1J)/(1.0-ALPHA1)
   WRITE(6,2024) DELJ1J,DELJ1J,EPSP,ERRM,ERRP
*
*   IMPRESSION DE LA FONCTION V TERMINALE DANS LE FICHIER RHF
*   SOUS FORME PP.
   LP1 = L + 1
   WRITE(2,1100) K,L
   DO 60 I=1,LP1
60   WRITE(2,1105) BREAK(I),(COEF(II,I),II=1,K)
*
*   IF (IGRAPH .EQ. 1) THEN
*     STOCKAGE DES DONNEES POUR L'IMPRESSION DU GRAPHIQUE DU
*     SEUIL DE REPARATION.
       WRITE(3,1008) N
       WRITE(3,1150) (TAU(I),I=1,N)
       VAL = JV(1)
       DO 70 I=1,N
           JV(I) = CR + VAL - JV(I)
70        WRITE(3,1150) (JV(I),I=1,N)
       ENDIF
*

```



STOP

```

*
1000 FORMAT(6F10.4)
1001 FORMAT(7I3)
1005 FORMAT(8I1)
1008 FORMAT(2I3)
1012 FORMAT(I3,F7.5)
1100 FORMAT(I1,I4)
1105 FORMAT(F10.4,5F16.9)
1150 FORMAT(40(8F10.6/))
*
2000 FORMAT(1H1,' MODELE DE REMPLACEMENT SELON L'AGE AVEC SEUIL DE REP
+ARATION.'// 'TAUX D'ACTUALISATION RHO = ',T30,
+F7.3/' COUT DE REMPLACEMENT = ',T30,F7.3/' COUT DE PANNE = ',T30,
+F7.3/' LE COUT D'UNE REPARATION MINIMALE EST UNE V.A. EXPONENTIEL
+LE DE MOYENNE ',F7.3/
+' LE TAUX DE PANNE POUR UNE COMPOSANTE D'AGE T EST 2.0 *',F6.4,
+' * T (LOI WEIBULL).'// 'ET SON COUT DE FONCTIONNEMENT PAR UNITE D
+E TEMPS EST T + EXP(-T).'//
+' POUR EVALUER L'INTEGRALE LORS DU CALCUL DE J(V) AUX POINTS D'IE
+VALUATION, ON UTILISE'/
+' LA METHODE DE SIMPSON AVEC UN MAILLAGE DE TAILLE DELXI = ',F8.4
+/' ET POUR DETERMINER D0(V), ON EXAMINE D'ABORD G(V) A PARTIR DE'
+,F7.3,' A TOUS LES',F7.3,' JUSQU' 'A',F8.1/
+' PUIS ON TROUVE LA POSITION EXACTE EN FAISANT',I4,' BISSECTIONS.'
+//)
2001 FORMAT(I5,' ITERATIONS, ON UTILISE DES SPLINES D'ORDRE K = ',
+I1//)
2009 FORMAT(' LA FONCTION PP INITIALE EST PARTOUT EGALE A CR')
2010 FORMAT(' LA FONCTION PP INITIALE POSSEDE',I4,' MORCEAUX.'/
+' LES COEFFICIENTS DU POLYNOME A DROITE DE CHAQUE POINT DE RUPTURE
+ SONT : '//
+' POINT DE RUPTURE      CONSTANTE      DERIVEE      DERIVEE SEC.  DER
+IVEE TROIS.'//)
2012 FORMAT(F15.6,4X,6F14.9)
2014 FORMAT('/' ITERATION      N      L      D0      DELTA(J1,J)  DELTA(J
+,J1)      JV(0)'//)
2020 FORMAT(I6,I8,I6,F14.6,2F14.9,F14.6)
2022 FORMAT('/' APRES L'ITERATION NITER, ON DIVISE LA TAILLE DU MAILLA
+GE PAR',I3/' POUR OBTENIR DES NOUVEAUX POINTS D'EVALUATION.'
+/' PUIS ON RECALCULE J(V) EN CES POINTS.'/
+' CELA PERMET D'ESTIMER DELTAM=-INF(T(J1)-J1) ET ',
+' DELTAP=SUP(T(J1)-J1)'//
+' ON OBTIENT DELTAM = ',F10.7,' , ET DELTAP = ',F10.7)
2023 FORMAT('/' DES BORNES SUR T(V)-V1 SONT OBTENUES EN UTILISANT',
+' /' L'ECART MAXIMUM ENTRE DEUX VALEURS SUCCESSIVES DE T(V)'/
+' DELTAM = ',F10.7,' ET DELTAP = ',F10.7)
2024 FORMAT('/' ON PEUT ALORS CALCULER DES BORNES -ERRM ET ERRP POUR ',
+' J*-J1'//' DELJJ1 = ',F12.7,' DELJ1J = ',F12.7
+' /' EPSM = ',F12.7,' EPSP = ',F12.7//
+' ERRM = ',F12.7,' ERRP = ',F12.7)
2025 FORMAT('/' LES',I4,' NOEUDS A LA DERNIERE ITERATION SONT : '//,25(8
+F10.6/))
2030 FORMAT('/' LES',I4,' POINTS D'EVALUATION SONT : '//,
+' 30(6F13.6/))
2035 FORMAT('/' LES VALEURS DE J(V) OBTENUES EN CES POINTS SONT : '//
+' 30(2X,6F13.8/))
END

```

```

SUBROUTINE CALDO(K)
*
*
PARAMETER ( KMAX=5 , NMAX=501 )
*
*   KMAX .GE. K
*   NMAX .GE. N+K
*
REAL M,LAMBDA,J0,JT,BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX)
COMMON /C1/ RHO,CR,M,DO,L,BREAK,COEF
COMMON /C2/ NSEC,GVMIN,DELGV,GVMAX
COMMON /C4/ CP,LAMBDA
*
J0 = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,0,0)
CST = -RHO*(CR+J0)
P1 = 0.0
*
DO 20 I=1,1000
  P2 = GVMIN + FLOAT(I-1) * DELGV
  JT = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,P2,0)
  FT = CR + J0 - JT
  G2 = CST + 2.0*LAMBDA*P2*(M -FT -M*EXP(-FT/M)) + CLAMKAP(P2)
  IF (G2 .GE. 0.0) GO TO 30
  IF (P2 .GE. GVMAX) THEN
    PRINT *, ' DO EST PLUS GRAND QUE GVMAX '
    RETURN
  ENDIF
20  P1 = P2
*
30 DO 40 I=1,NSEC
  P = (P1+P2)/2.0
  JT = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,P,0)
  FT = CR + J0 - JT
  G = CST + 2.0*LAMBDA*P*(M -FT -M*EXP(-P/M)) + CLAMKAP(P)
  IF (G .GE. 0.0) THEN
    P2 = P
  ELSE
    P1 = P
  ENDIF
40  CONTINUE
*
DO = P2
RETURN
END
*
SUBROUTINE CALJV(K)
*
*   KMAX .GE. K
*   NMAX .GE. N+K
*
REAL M,LAMBDA,J0,JX,INTEGR,INTEXAC,TAU(NMAX),JV(NMAX)
+ ,BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX)
COMMON /C1/ RHO,CR,M,DO,L,BREAK,COEF
COMMON /C3/ DELXI,N,TAU,JV
COMMON /C4/ CP,LAMBDA
*
INTEGR = 0.0
J0 = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,0,0)
CST = EXP(-DO*(RHO+LAMBDA*DO)) * (CR+J0)
NP = DO/DELXI + 2
I = N
X = DO
JX = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X,0)
FX = CR + J0 - JX
F2 = ( CLAMKAP(X) + 2.0*LAMBDA*X*(M*(1.-EXP(-FX/M))+JX) )

```

```

+ * EXP(-X*(LAMBDA*X + RHO))
*
DO 300 II=1,NP,2
  IF (TAU(I) .GT. (X-2.0*DELXI)) THEN
    DIFS2 = (X-TAU(I))/2.0
    X = X - DIFS2
    JX = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X,0)
    FX = CR + J0 - JX
    FF1 = ( CLAMKAP(X) + 2.0*LAMBDA*X*(M*(1.-EXP(-FX/M))+JX) )
+ * EXP(-X*(LAMBDA*X + RHO))
    X = TAU(I)
    JX = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X,0)
    FX = CR + J0 - JX
    FFO = ( CLAMKAP(X) + 2.0*LAMBDA*X*(M*(1.-EXP(-FX/M))+JX) )
+ * EXP(-X*(LAMBDA*X + RHO))
    INTEXAC = INTEGR*DELXI/3.0 + (F2 + 4.0*FF1 + FFO)*DIFS2/3.0
    JV(I) = (INTEXAC + CST) * EXP(TAU(I)*(RHO+LAMBDA*TAU(I)))
    IF (I .EQ. 1) RETURN
    I = I - 1
  ENDIF
*
  X = DO - FLOAT(II)*DELXI
  JX = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X,0)
  FX = CR + J0 - JX
  F1 = ( CLAMKAP(X) + 2.0*LAMBDA*X*(M*(1.-EXP(-FX/M))+JX) )
+ * EXP(-X*(LAMBDA*X + RHO))
  X = X - DELXI
  JX = PPVALU(BREAK,COEF,L,K,X,0)
  FX = CR + J0 - JX
  F0 = ( CLAMKAP(X) + 2.0*LAMBDA*X*(M*(1.-EXP(-FX/M))+JX) )
+ * EXP(-X*(LAMBDA*X + RHO))
  INTEGR = INTEGR + F0 + 4.0*F1 + F2
300 F2 = F0
PRINT *, ' ON EST SORTI DE CALJV SANS CALCULER JV(I).'
RETURN
END
*
SUBROUTINE NOEUD1(K,N,T,NOEUD,TAU)
* LES POINTS D'EVALUATION SONT PLACES A INTERVALLES REGULIERS
* PUIS LA POSITION DES NOEUDS EST CALCULEE PAR LA FORMULE
* DE C.DE BOOR.
PARAMETER ( NMAX=501 )
REAL NOEUD(NMAX),TAU(NMAX)
D = T/FLOAT(N-1)
DO 2 I=1,N
2 TAU(I) = FLOAT(I-1)*D
DO 3 I=1,K
NOEUD(I) = TAU(1)
3 NOEUD(N+I) = TAU(N)
NMK = N-K
KMI = K-1
DO 6 I=1,NMK
SOM = 0.
DO 4 J=1,KMI
4 SOM = SOM + TAU(I+J)
6 NOEUD(K+I) = SOM/FLOAT(KMI)
RETURN
*
*
*
END
*
REAL FUNCTION PPVALU ( BREAK, COEF, L, K, X, JDERIV )
* CALCUL DE LA JDERIV-IEME DERIVEE DE V AU POINT X
PARAMETER ( KMAX=5 ,NMAX=501 )
REAL BREAK(NMAX),COEF(KMAX,NMAX)

```

```

PPVALU = 0.
FMMJDR = K-JDERIV
IF ( FMMJDR .LE. 0. ) RETURN
IF (X .GE. BREAK(L+1)) THEN
  IF (JDERIV .EQ. 0) PPVALU = COEF(1,L+1)
  RETURN
ENDIF
CALL INTERV ( BREAK,L,X,I,NDUMMY )
H = X - BREAK(I)
DO 10 M=K,JDERIV+1,-1
  PPVALU = (PPVALU/FMMJDR)*H + COEF(M,I)
10 FMMJDR = FMMJDR - 1.0
RETURN
END

*
FUNCTION CLAMKAP(X)
*
REAL LAMBDA
COMMON /C4/ CP,LAMBDA
IF (X .GE. 600.) THEN
  CLAMKAP = 0.0
  RETURN
ENDIF
CLAMKAP = EXP(-X) + X + 2.0*LAMBDA*CP*X
RETURN
END

```

### D.3 Programmes du chapitre 8.

```

*
*
* POLITIQUE OPTIMALE DE REMPLACEMENT DES COMPOSANTES POUR UN
* SYSTEME A 3 COMPOSANTES IDENTIQUES S-INDEPENDANTES.
* LE TAUX DE PANNE DE CHAQUE COMPOSANTE EST UNE FONCTION
* LINEAIRE.
* POUR UN TAUX DE PANNE PLUS GENERAL, ON DEVRA MODIFIER
* LE PROGRAMME.
* REF. : THESE DE DOCTORAT DE P.LECUYER , CHAP.8.
* LA FONCTION DE COUT ANTICIPE EST APPROXIMEE PAR UNE FONCTION
* D'INTERPOLATION BILINEAIRE PAR MORCEAUX.
*
* ON DOIT DISPOSER LES DONNEES COMME SUIT :
*
* CARTE 1 :
*
* CP      F10.3  COUT DE PANNE
* CI      F10.3  COUT FIXE D'INTERVENTION
* CR      F10.3  COUT DE REMPLACEMENT PAR COMPOSANTE
* RHO     F10.3  TAUX D'ACTUALISATION
* AMBDA   F10.3  LE TAUX DE PANNE SERA
*           LAMBDA(T) = 2 * AMBDA * T
*
* CARTE 2 :
*
* NITER   I3     NOMBRE D'ITERATIONS A EFFECTUER
* DELXI   F10.4  LONGUEUR INITIALE DES INTERVALLES POUR
*           L'INTEGRATION PAR LA METHODE DE SIMPSON.
* BORNE1  F10.4  LORSQUE XI DEPASSE BORNE1 DANS L'INTEGRALE,
*           ON COMMENCE A UTILISER UNE SUITE GEOMETRIQUE
*           D'INTERVALLES POUR L'INTEGRATION.
*           ON MULTIPLIE LA LONGUEUR DE L'INTERVALLE PAR
*           FACTEXP POUR OBTENIR LA LONGUEUR DE
*           L'INTERVALLE SUIVANT.
* BORNE2  F10.4  LORSQUE XI ATTEINT BORNE2, ON CESSE D'INTEGRER.

```

```

*   FACTEXP F10.4
*
*   CARTE 3 :
*
*   IDON    I2    SI IDON=1 , LES VALEURS INITIALES SONT LUES
*                 SUR L'UNITE 1. SINON ON POSE G=0.
*   IDIVTAU I2    APRES L'ITERATION NITER, SI IDIVTAU .GT. 1 ,
*                 ON MULTIPLIE LE NOMBRE DE POINTS D'EVALUATION
*                 SUR CHAQUE AXE PAR IDIVTAU POUR ESTIMER
*                 DELTAM ET DELTAP.
*   IGRAPH  I2    SI IGRAPH =1 , ON CALCULE LA FRONTIERE DE LA
*                 REGION OU LE NOMBRE DE REMPLACEMENTS
*                 SUPPLEMENTAIRES EST 0.
*   NPGRAPH I4    NOMBRE DE POINTS PAR TAUN(NN) UNITES DE
*                 LONGUEUR OU LA FRONTIERE EST CALCULEE SI
*                 IGRAPH=1.
*   NSEC    I4    NOMBRE D'ITERATIONS DE LA METHODE DE LA SECTION
*                 DOREE POUR L'EVALUATION DE DELAI.
*
*   CARTE 4 :
*
*   NO      I3    PUISSANCE DE L'OPERATEUR DE LA P.D. QUI LE
*                 REND CONTRACTANT DE FACTEUR ALPHA1.
*   ALPHA1  F7.5  FACTEUR DE CONTRACTION.
*
*   CARTE 5
*
*   NN      I3    NOMBRE DE POINTS D'EVALUATION SUR CHAQUE AXE.
*
*   CARTES SUIVANTES :
*
*   TAUN    LES NN POINTS D'EVALUATION SUR CHAQUE AXE,
*           8 PAR CARTE , EN FORMAT F10.2.
*
*   SI IDON=1, LES VALEURS INITIALES DOIVENT ETRE SUR L'UNITE 1.
*
*   G REPRESENTE LA FONCTION J(V) AUX POINTS D'EVALUATION.
*   DELAI REPRESENTE LE DELAI JUSQU'AU PROCHAIN REMPLACEMENT
*   PLANIFIE.
*   TAUN EST LE VECTEUR DEFINISSANT LE NOUVEAU MAILLAGE DES
*   POINTS D'EVALUATION.
*   TAU0 EST L'ANCIEN.
*   I CORRESPOND A LA PLUS VIEILLE COMPOSANTE
*   J CORRESPOND A LA SECONDE PLUS VIEILLE
*   LA PLUS JEUNE EST TOUJOURS D'AGE 0.
*
*   PROGRAM CHAP8(INPUT,OUTPUT,TAPE1,TAPE2,TAPE3,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUT
* + PUT)
*
*   PARAMETER ( ND=20 , NDIDIV=100 )
*
*   INTEGER IBLOC(NDIDIV)
*   REAL TAU0(ND),TAUN(ND)
*   COMMON /GC/ G(ND,ND),C(ND,ND),C1(ND,ND),C2(ND,ND),C12(ND,ND)
*   COMMON /RESTE/ CP,CI,CR,RHO,AMBDA,CIPR,DELXI,FACTEXP
* + ,BORNE1,BORNE2,NSEC
*   COMMON /EV/ DELJ1J,DELJ11,DELAI(ND,ND),NSUPL(ND,ND)
*
*   READ(5,1000) CP,CI,CR,RHO,AMBDA
*   READ(5,1010) NITER,DELXI,BORNE1,BORNE2,FACTEXP
*   READ(5,1015) IDON, IDIVTAU, IGRAPH,NPGRAPH,NSEC
*   READ(5,1025) NO,ALPHA1
*   READ(5,1005) NN,(TAUN(I),I=1,NN)
*

```

```

WRITE(6,2000) CP,CI,CR,RHO,AMBDA
WRITE(6,2004) DELXI,BORNE1,FACTEXP,BORNE2
*
IF (IDON .EQ. 1) THEN
*
  LECTURE DES VALEURS INITIALES SUR L'UNITE 1.
  READ(1,1005) NA,(TAUA(I),I=1,NA)
  WRITE(6,2008)
  WRITE(6,2009)
  DO 12 J=NA,1,-1
    READ(1,1020) (G(I,J),I=1,NA)
    12  WRITE(6,2010) TAUA(J),(G(I,J),I=1,NA)
        WRITE(6,2012) (TAUA(I),I=1,NA)
  ELSE
*
    S'IL N'Y A PAS DE DONNEES INITIALES, NA ET TAUA SONT
    INITIALISES A NN ET TAUN RESPECTIVEMENT ET ON POSE G=0.
    WRITE(6,2015)
    NA = NN
    DO 14 J=1,NA
      TAUA(J) = TAUN(J)
      DO 14 I=1,NA
        14  G(I,J) = 0.0
    ENDIF
*
    CIPR = CI + CP + CR
    TAUA(NA+1) = 1.0E+20
    TAUN(NN+1) = 1.0E+20
    WRITE(6,2020)
    DO 30 ITER=1,NITER
      IF (ITER .EQ. 1) THEN
        CALL COEFINT(NA,TAUA)
        CALL EVAL(NA,NN,TAUA,TAUN)
      ELSE
        CALL COEFINT(NN,TAUN)
        CALL EVAL(NN,NN,TAUN,TAUN)
      ENDIF
    30  WRITE(6,2030) ITER,NN,DELJ1J,DELJ1,G(1,1)
*
    IMPRESSION DES RESULTATS DE LA DERNIERE ITERATION.
*
    WRITE(6,2040)
    WRITE(6,2009)
    DO 40 J=NN,1,-1
      DO 38 I=1,J
        G(I,J) = G(J,I)
        DELAI(I,J) = DELAI(J,I)
        NSUPL(I,J) = NSUPL(J,I)
      38  WRITE(6,2010) TAUN(J),(G(I,J),I=1,NN)
    40  WRITE(6,2012) (TAUN(I),I=1,NN)
*
    WRITE(6,2042)
    DO 42 J=NN,1,-1
      42  WRITE(6,2010) TAUN(J),(DELAJ(I,J),I=1,NN)
          WRITE(6,2012) (TAUN(I),I=1,NN)
    WRITE(6,2044)
    DO 44 J=NN,1,-1
      44  WRITE(6,2048) TAUN(J),(NSUPL(I,J),I=1,NN)
          WRITE(6,2012) (TAUN(I),I=1,NN)
*
    STOCKAGE DES RESULTATS.
*
    WRITE(2,1005) NN,(TAUN(I),I=1,NN)
    DO 48 J=NN,1,-1
      48  WRITE(2,1020) (G(I,J),I=1,NN)
*

```

```

IF ((IDIVTAU .EQ. 1) .AND. (IGRAPH .NE. 1)) STOP
CALL COEFINT(NN,TAUN)
*
IF (IDIVTAU .GT. 1) THEN
*
*   ESTIMATION DE DELTAM ET DELTAP.
*
DELTAM = 0.0
DELTAP = 0.0
N = NN*IDIVTAU
DEL = TAUN(NN)/FLOAT(N-1)
NNN = 1
DO 60 I=1,N
  R1 = DEL * FLOAT(I-1)
  IF ( R1 .GT. TAUN(NNN+1) ) THEN
50     NNN = NNN + 1
        GO TO 50
  ENDIF
  IBLOC(I) = NNN
  DO 60 J=1,I
    M1 = NNN
    R2 = DEL * FLOAT(J-1)
    M2 = IBLOC(J)
60     CALL CALCULG(M1,M2,R1,R2,DELTAM,DELTAP,X,Y,NN,TAUN)
  WRITE(6,2050) IDIVTAU,DELTAM,DELTAP
*
  EPSM = NO*DELTAM + (NO-1)*DELJJ1
  EPSP = NO*DELTAP + (NO-1)*DELJ1J
  ERRM = (EPSM + ALPHA1*DELJJ1)/(1.0-ALPHA1)
  ERRP = (EPSP + ALPHA1*DELJ1J)/(1.0-ALPHA1)
  WRITE(6,2052) DELJJ1,DELJ1J,EPSM,EPSP,ERRM,ERRP
*
  ENDIF
*
*   CALCUL DE LA FRONTIERE DE LA REGION OU LE NOMBRE DE
*   REMPLACEMENTS SUPPLEMENTAIRES EST 0.
*
IF (IGRAPH .EQ. 1) CALL GRAPH(NPGRAPH,CR,NN,TAUN)
*
STOP
1000 FORMAT(6F10.3)
1010 FORMAT(I3,5F10.4)
1005 FORMAT(I3/4(8F10.2/))
1015 FORMAT(3I2,2I4)
1020 FORMAT(5(6F13.8/))
1025 FORMAT(I3,F7.5)
2000 FORMAT(IH1,' SYSTEME A 3 COMPOSANTES IDENTIQUES'/
+ ' MODELE EN TEMPS CONTINU'/
+ ' POLITIQUE OPTIMALE POUR LE REMPLACEMENT DES COMPOSANTES.'//
+ ' COUT ENCOURE LORS D'UNE PANNE:',T42,F6.2/' COUT FIXE D''INT
+ERVENTION:',T42,F6.2/' COUT DE REMPLACEMENT PAR COMPOSANTE:'
+ ,T42,F6.2/' COEFFICIENT D'ACTUALISATION RHO =',F4.2/' LA DIST
+RIBUTION DE DUREE DE VIE DES COMPOSANTES EST WEIBULL, AVEC TAUX DE
+ PANNE LAMBDA(T) = 2',F6.3,' * T'//)
2004 FORMAT(/
+ ' LONGUEUR INITIALE DES INTERVALLES POUR L'INTEGRATION: DELXI=
+ ',F6.3/' ON UTILISE CETTE LONGUEUR JUSQU''A',F8.3,
+ /' ON LA MULTIPLIE ENSUITE PAR',F6.3,
+ ' A CHAQUE PAIRE D'INTERVALLES.'/
+ ' ON INTEGRE JUSQU''A',F9.3/)
2009 FORMAT(/)
2008 FORMAT(' LA FONCTION G INITIALE EST LA SUIVANTE :')
2010 FORMAT(F8.2,2X,16F7.3/2(10X,16F7.3/))
2012 FORMAT(/10X,16F7.2/2(10X,16F7.2/))

```

```

2015 FORMAT(' LA FONCTION G INITIALE EST PARTOUT EGALE A 0')
2020 FORMAT('/' ITERATION N DELTA(J1,J) DELTA(J,J1) JV(0,0):
+ /)
2030 FORMAT(I6,I8,2F14.8,F14.5)
2040 FORMAT('/' RESULTATS DE LA DERNIERE ITERATION AUX POINTS D'EVALUA
+ TION.'/' VALEURS DE J(V) :'/)
2042 FORMAT('/' VALEUR OPTIMALE DU DELAI JUSQU''A LA PROCHAINE INSPECT
+ ION PREVUE'/
+ ' SI AUCUNE COMPOSANTE N'EST REMPLACEE IMMEDIATEMENT :'/)
2044 FORMAT('/' NOMBRE DE COMPOSANTES SUPPLEMENTAIRES A REMPLACER IMME
+ DIATEMENT :'/)
2048 FORMAT(F8.2,2X,16I7/2(10X,16I7/))
2050 FORMAT('/' APRES L'ITERATION NITER, ON DIVISE LA TAILLE DU MAILLA
+ GE PAR 'I3/' POUR OBTENIR DES NOUVEAUX POINTS D'EVALUATION.'
+ /' PUIS ON RECALCULE J(V) EN CES POINTS.'/
+ ' CELA PERMET D'ESTIMER DELTAM=-INF(T(J1)-J1) ET ',
+ ' DELTAP=SUP(T(J1)-J1)'/)
+ ' ON OBTIENT DELTAM = ',F10.7,' , ET DELTAP = ',F10.7)
2052 FORMAT('/' ON PEUT ALORS CALCULER DES BORNES -ERRM ET ERRP POUR ',
+ ' J*-J1'/'/ DELJJI = ',F12.7,' DELJ1J = ',F12.7
+ /' EPSM = ',F12.7,' EPSP = ',F12.7/
+ ' ERRM = ',F12.7,' ERRP = ',F12.7)
END

```

```

SUBROUTINE EVAL(NA,NN,TAUA,TAUN)
*
*   CALCUL DES VALEURS DE G=J(V) AUX POINTS D'EVALUATION DE LA GRILLE
*   CHAQUE VALEUR EST CALCULEE PAR LA SOUS-ROUTINE CALCULG
*
PARAMETER ( ND=20 )
INTEGER IBLOC(ND),IBLOCA2(ND),IBLOCI(ND)
REAL TAUA(ND),TAUN(ND)
COMMON /GC/ G(ND,ND),C(ND,ND),C1(ND,ND),C2(ND,ND),C12(ND,ND)
COMMON /RESTE/ CP,CI,CR,RHO,AMBDA,CIPR,DELXI,FACTEXP
+ ,BORNE1,BORNE2,NSEC
COMMON /EV/ DELJ1J,DELJJI,DELAJ(ND,ND),NSUPL(ND,ND)
*
N=1
I=1
405 IF (TAUN(I) .GE. TAUA(N+1)) THEN
N=N+1
ELSE
*   IBLOC(I) EST L'INTERVALLE DE L'ANCIEN MAILLAGE DANS
*   LEQUEL SE TROUVE LE I-IEME NOUVEAU POINT TAUN(I).
*
IBLOC(I) = N
I = I+1
ENDIF
IF (I .LE. NN) GO TO 405
*
DELJ1J = 0.0
DELJJI = 0.0
*
DO 460 J=1,NN
R2 = TAUN(J)
*   ON FIXE L'AGE DE LA PLUS JEUNE COMPOSANTE ET ON FAIT
*   VARIER L'AGE DE LA PLUS VIEILLE.
*
DO 460 I=J,NN
R1 = TAUN(I)
*   D EST LA LONGUEUR DE L'INTERVALLE OU LA FONCTION EST

```



```

*          APPROXIMEE PAR UNE FONCTION QUADRATIQUE DANS LA
*          METHODE DE SIMPSON. LORSQUE XI DEPASSE BORNE1,
*          D AUGMENTE.
*
M1 = IBLOC(I)
M2 = IBLOC(J)
*
+ CALL CALCULG(M1,M2,R1,R2,DELJ1J,DELJJ1,VALG,VALD,
NA,TAUA)
G(I,J) = VALG
DELAI(I,J) = VALD
*
IF (G(I,J) .GT. (G(J,1)+CR)) THEN
NSUPL(I,J) = 1
IF (G(J,1) .GT. (G(1,1)+CR)) NSUPL(I,J) = 2
ELSE
NSUPL(I,J) = 0
IF (G(I,J) .GT. (2.*CR+G(1,1))) NSUPL(I,J) = 2
ENDIF
460 CONTINUE
RETURN
END
*
SUBROUTINE CALCULG(M1,M2,R1,R2,DELJ1J,DELJJ1,VALG,VALD,
+ NA,TAUA)
*
*          CALCUL DE J(V) AU POINT (R1,R2).
*          ON OBTIENT AUSSI LE DELAI OPTIMAL ASSOCIE.
*
PARAMETER ( ND=20 )
REAL INTEGR,TAUN(ND),TAUA(ND)
REAL INTEG0,INTEG(4),FC(4),VAL(4),P(4)
COMMON /GC/ G(ND,ND),C(ND,ND),C1(ND,ND),C2(ND,ND),C12(ND,ND)
COMMON /RESTE/ CP,CI,CR,RHO,AMBDA,CIPR,DELXI,FACTEXP
+ ,BORNE1,BORNE2,NSEC
*
D = DELXI
DS3 = D/3.0
COOPCR = C(1,1) + CR
COOP2CR = COOPCR + CR
ANCG = C(M1,M2) + R1 * C1(M1,M2) + R2 * C2(M1,M2)
+ R1 * R2 * C12(M1,M2)
M3 = 1
*
*          M1 , M2 , M3 SERONT RESPECTIVEMENT LES INTERVALLES
*          DU MAILLAGE DES POINTS D'EVALUATION DANS LESQUELS
*          SE TROUVENT R1+XI , R2+XI , XI.
*
XI = 0.0
R1PXI = R1
R2PXI = R2
G23 = C(M2,1) + C1(M2,1)*R2
G13 = C(M1,1) + C1(M1,1)*R1
COUT1 = CIPR + AMIN1(G23,COOPCR)
COUT2 = CIPR + AMIN1(G13,COOPCR)
DELMIN = 0.0
VALMIN = COUT1 - CP
INTEGR = DS3 * 2.0 * AMBDA * (COUT1*R1 + COUT2*R2)
DMIN = D
FCO = INTEGR/DS3
INTEGO = 0.0
MM1 = M1
MM2 = M2
MM3 = M3
DO 420 II=1,1000

```

```

XI = XI + D
R1PXI = R1 + XI
R2PXI = R2 + XI
IF ((R1PXI.GE.TAUA(M1+1)) .AND. (M1.LT.NA)) M1=M1+1
IF ((R2PXI.GE.TAUA(M2+1)) .AND. (M2.LT.NA)) M2=M2+1
IF ((XI.GE.TAUA(M3+1)) .AND. (M3.LT.NA)) M3=M3+1
G23 = C(M2,M3) + C1(M2,M3)*R2PXI + C2(M2,M3)*XI
+ C12(M2,M3)*R2PXI*XI
G13 = C(M1,M3) + C1(M1,M3)*R1PXI + C2(M1,M3)*XI
+ C12(M1,M3)*R1PXI*XI
G12 = C(M1,M2) + C1(M1,M2)*R1PXI + C2(M1,M2)*R2PXI
+ C12(M1,M2)*R1PXI*R2PXI
G20PCR = C(M2,1) + C1(M2,1)*R2PXI + CR
G30PCR = C(M3,1) + C1(M3,1)*XI + CR
COUT1 = CIPR + AMIN1(G23,G30PCR,C00P2CR)
COUT2 = CIPR + AMIN1(G13,G30PCR,C00P2CR)
COUT3 = CIPR + AMIN1(G12,G20PCR,C00P2CR)
FACTEUR = EXP( -XI *(RHO +AMBDA*(3.*XI+2.*(R1+R2))))
FONC = FACTEUR *2.0 *AMBDA *DS3 *
+ (R1PXI*COUT1 + R2PXI*COUT2 + XI*COUT3)
* FONC EST LA VALEUR DE LA FONCTION A INTEGRER
* MULTIPLIEE PAR D/3.0 .
*
IF ((2*(II/2)) .NE. II) THEN
INTEGR = INTEGR + FONC*4.0
ELSE
FIN D'UN SEGMENT DANS LA METHODE DE SIMPSON.
*
INTEGR = INTEGR + FONC
VALEUR = INTEGR + FACTEUR*(COUT1-CP)
IF (VALEUR .LT. VALMIN) THEN
VALMIN = VALEUR
DELMIN = XI
DMIN = D
FC0 = FONC/DS3
INTEGO = INTEGR
MM1 = M1
MM2 = M2
MM3 = M3
ENDIF
* IF ((FACTEUR .LT. 1.0E-20).OR.(XI .GE.BORNE2))GO TO 430
* ON TERMINE L'INTEGRATION
*
IF (XI .GE. BORNE1) THEN
D = FACTEXP * D
DS3 = D/3.0
INTEGR = INTEGR + FONC*FACTEXP
ELSE
INTEGR = INTEGR + FONC
ENDIF
ENDIF
420 CONTINUE
*
* ON A TROUVE UNE PREMIERE APPROXIMATION DU DELAI OPTIMAL
* TOUT EN EFFECTUANT L'INTEGRATION.
* ON VA MAINTENANT RAFFINER CETTE APPROXIMATION EN UTILISANT
* LA METHODE DE LA SECTION DOREE.
* VALD SERA LA VALEUR RETENUE POUR LE DELAI "OPTIMAL"
* ET VALG SERA LA VALEUR DE J(V) AU POINT (R1,R2).
*
430 P(1) = AMAX1(0.0 , (DELMIN - DMIN) )
P(4) = DELMIN + DMIN*FACTEXP
DIST = P(4) - P(1)
P(2) = P(4) - 0.618 * DIST

```

```

P(3) = P(1) + 0.618 * DIST
M1 = MM1
M2 = MM2
M3 = MM3
DO 440 II=2,3
  DO 440 III=1,2
    IF (III .EQ. 1) THEN
      D = P(II) - DELMIN
      INTEGR = INTEG0 + FC0 * D/6.0
      XI = DELMIN + D/2.0
    ELSE
      XI = P(II)
    ENDIF
    R1PXI = R1 + XI
    R2PXI = R2 + XI
    G23 = C(M2,M3) + C1(M2,M3)*R2PXI + C2(M2,M3)*XI
    + C12(M2,M3)*R2PXI*XII
    G13 = C(M1,M3) + C1(M1,M3)*R1PXI + C2(M1,M3)*XI
    + C12(M1,M3)*R1PXI*XII
    G12 = C(M1,M2) + C1(M1,M2)*R1PXI + C2(M1,M2)*R2PXI
    + C12(M1,M2)*R1PXI*R2PXI
    G20PCR = C(M2,1) + C1(M2,1)*R2PXI + CR
    G30PCR = C(M3,1) + C1(M3,1)*XI + CR
    COUT1 = CIPR + AMIN1(G23,G30PCR,C00P2CR)
    COUT2 = CIPR + AMIN1(G13,G30PCR,C00P2CR)
    COUT3 = CIPR + AMIN1(G12,G20PCR,C00P2CR)
    FACTEUR = EXP( -XI *(RHO +AMBDA*(3.*XI+2.*(R1+R2))))
    + (R1PXI*COUT1 + R2PXI*COUT2 + XI*COUT3)
    *
    *
    FONC EST LA VALEUR DE LA FONCTION A INTEGRER

    IF (III .EQ. 1) THEN
      INTEGR = INTEGR + FONC *D *4.0/6.0
    ELSE
      INTEGR = INTEGR + FONC *D/6.0
      VAL(II) = INTEGR + FACTEUR *(COUT1-CP)
      INTEG(II) = INTEGR
      FC(II) = FONC
    ENDIF
  440 CONTINUE
*
DO 450 II=1,NSEC
  IF (VAL(3) .LT. VAL(2)) THEN
    NEW = 3
    P(1) = P(2)
    P(2) = P(3)
    VAL(2) = VAL(3)
    INTEG(2) = INTEG(3)
    FC(2) = FC(3)
    DIST = P(4) - P(1)
    P(3) = P(1) + 0.618 * DIST
    D = P(3) - P(2)
  ELSE
    NEW = 2
    P(4) = P(3)
    P(3) = P(2)
    VAL(3) = VAL(2)
    INTEG(3) = INTEG(2)
    FC(3) = FC(2)
    DIST = P(4) - P(1)
    P(2) = P(4) - 0.618 * DIST
    D = P(2) - P(3)
  ENDIF
*

```

```

INTEGR = INTEG(NEW) + FC(NEW) * D/6.0
XI = (P(2) + P(3))/2.0
DO 450 III=1,2
  IF (III .EQ. 2) XI = XI + D/2.0
  R1PXI = R1 + XI
  R2PXI = R2 + XI
  G23 = C(M2,M3) + C1(M2,M3)*R2PXI + C2(M2,M3)*XI
+   + C12(M2,M3)*R2PXI*XI
  G13 = C(M1,M3) + C1(M1,M3)*R1PXI + C2(M1,M3)*XI
+   + C12(M1,M3)*R1PXI*XI
  G12 = C(M1,M2) + C1(M1,M2)*R1PXI + C2(M1,M2)*R2PXI
+   + C12(M1,M2)*R1PXI*R2PXI
  G20PCR = C(M2,1) + C1(M2,1)*R2PXI + CR
  G30PCR = C(M3,1) + C1(M3,1)*XI + CR
  COUT1 = CIPR + AMIN1(G23,G30PCR,COOP2CR)
  COUT2 = CIPR + AMIN1(G13,G30PCR,COOP2CR)
  COUT3 = CIPR + AMIN1(G12,G20PCR,COOP2CR)
  FACTEUR = EXP( -XI *(RHO +AMBDA*(3.*XI+2.*(R1+R2))))
+   +
  FONC = FACTEUR *2.0 *AMBDA *
        (R1PXI*COUT1 + R2PXI*COUT2 + XI*COUT3)
*   +
*   FONC EST LA VALEUR DE LA FONCTION A INTEGRER

  IF (III .EQ. 1) THEN
    INTEGR = INTEGR + FONC * D * 4.0/6.0
  ELSE
    INTEGR = INTEGR + FONC * D/6.0
    VAL(NEW) = INTEGR + FACTEUR * (COUT1-CP)
    INTEG(NEW) = INTEGR
    FC(NEW) = FONC
  ENDIF
450 CONTINUE
*
*
M = 2
IF (VAL(3) .LT. VAL(2)) M=3
VALG = VAL(M)
VALD = P(M)
DELJ1J = AMAX1(VALG-ANCG , DELJ1J)
DELJ1 = AMAX1(ANCG-VALG , DELJ1)
RETURN
END
*
*
SUBROUTINE COEFINT(N,TAU)
*
*   CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA FONCTION BILINEAIRE PAR
*   MORCEAUX INTERPOLANT J(V) AUX POINTS D'EVALUATION.
*
*   SI (X,Y) EST SUR LE MORCEAU I,J ,LA VALEUR DE LA FONCTION
*   AU POINT (X,Y) SERA :
*   C(I,J) + X*C1(I,J) + Y*C2(I,J) + X*Y*C12(I,J).
*
PARAMETER ( ND=20 )
REAL TAU(ND)
COMMON /GC/ G(ND,ND),C(ND,ND),C1(ND,ND),C2(ND,ND),C12(ND,ND)
DO 300 I=1,N
  DO 300 J=1,I
    IF((J.LT.I) .AND. (I.LT.N)) THEN
      C12(I,J) = (G(I+1,J+1)-G(I+1,J)-G(I,J+1)+G(I,J)) /
+   ((TAU(I+1)-TAU(I)) * (TAU(J+1)-TAU(J)))
    ELSE
      C12(I,J) = 0.0
    ENDIF
    IF(J.NE.I) THEN
      C2(I,J) = (G(I,J+1)-G(I,J))/(TAU(J+1)-TAU(J)) - TAU(I)*

```

```

+       C12(I,J)
      ELSE
        IF (J.EQ.N) THEN
          C2(I,J) = 0.0
        ELSE
          C2(I,J) = (G(I+1,J+1)-G(I+1,J))/(TAU(J+1)-TAU(J))
        ENDIF
      ENDIF
    IF (I.NE.N) THEN
      C1(I,J) = (G(I+1,J)-G(I,J))/(TAU(I+1)-TAU(I)) - TAU(J)*
+       C12(I,J)
    ELSE
      C1(I,J) = 0.0
    ENDIF
300   C(I,J) = G(I,J) - TAU(I)*C1(I,J) - TAU(J)*C2(I,J)
+     - TAU(I)*TAU(J)*C12(I,J)
    RETURN
  END

```



## BIBLIOGRAPHIE

- Albright, S.C. et Winston, W. (1979), "Markov Decision Models of Advertising and Pricing Decisions", Oper. Res., 27, pp.668-681.
- Alj, A. et Haurie, A. (1980), "Hierarchical Control of a Population Process with Application to Group Preventive Maintenance", Proceedings IFAC 2nd Symposium on Large Scale Systems Theory and Applications, Toulouse, France, pp.24-26, Juin 1980.
- Anderson, M.Q. (1978), Monotone Optimal Preventive Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment, R.O. Anderson Graduate School of Management, Albuquerque, New-Mexico, July 5.
- Barlow, R. et Proschan, F. (1965), Mathematical Theory of Reliability, SIAM Series in Applied Mathematics, John Wiley.
- Barlow, R. et Proschan, F. (1975), Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Rinehart and Winston.
- Beichelt, F. et Fisher, K. (1980), "General Failure Model Applied to Preventive Maintenance Policies", IEEE Trans. on Reliability, vol. R-29, no. 1, pp.39-41.
- Bellman, R. (1957a), Dynamic Programming, Princeton, 1957.
- Bellman, R. (1957b), "A Markovian Decision Process", J. Math. and Mech., vol. 6, pp.679-684.
- Bellman, R. et Dreyfus, S.E. (1962), Applied Dynamic Programming, Princeton, New-Jersey.
- Bertsekas, D.P. (1975), "Convergence of Discretization Procedures in Dynamic Programming", IEEE Trans. Automatic Control, 20, pp.415-419.
- Bertsekas, D.P. et Shreve, S.E. (1978), Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case, Academic Press.
- Bismut, J.M. (1975), "Contrôle des Processus de Sauts", C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, 281, pp.767-770.
- Birkhoff, G. (1967), Lattice Theory, Am. Math. Soc. Coll. Publ., vol. XXV, 3e édition.
- Blackwell, D. (1965a), "Discounted Dynamic Programming", Ann. Math. Statist., 36, pp.226-235.
- Blackwell, D. (1965b), "Positive Dynamic Programming", Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statis. and Probability, pp.415-418.
- Blackwell, D. et Freedman, D. et Orkin, M. (1974), "The Optimal Reward Operator in Dynamic Programming", Ann. Prob., 2, pp.926-941.
- Boel, R. et Varaiya, P. (1977), "Optimal Control of Jump Processes", SIAM J. Control Optim., 15, 1, pp.92-119.

- de Boor, C. et Rice, J.R. (1968), "Cubic Spline Approximation II - Variable Knots", Computer Sciences Department TR21, Purdue Univ., April 1968.
- de Boor, C. (1976), "Splines as Linear Combinations of B-Splines", in Approximation Theory II, édité par G.G. Lorentz, C.K. Chui, L.L. Schumaker, Academic Press, N.Y., pp.1-47.
- de Boor, C. (1978), A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, vol. 27.
- de Cani, J.S. (1964), "A Dynamic Programming Algorithm for Embedded Markov Chains when the Planning Horizon is at Infinity", Man. Sci., 10, 4, pp.716-733.
- Chitgopekar, S.S. (1969), "Continuous Time Markovian Sequential Control Processes", SIAM J. Control, 7, 3, pp.367-389.
- Choquet, G., (1969), "Cours d'Analyse, Tome II: Topologie", Masson et Cie, Paris.
- Cléroux, R. et Dubuc, S. et Tilquin, C. (1979), "The Age Replacement Problem with Minimal Repair and Random Repair Costs", Oper. Res., vol. 27, no. 6, pp.1158-1167.
- Dahmen, W.A. (1980), "On Multivariate B-Splines", SIAM J. Numer. Anal., vol. 17, no. 2, pp.179-191.
- Dahmen, W.A. et Micchelli, C.A. (1981a), "Computation of Inner Products of Multivariate B-Splines", Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 3 (3), pp.367-375.
- Dahmen, W.A. et Micchelli, C.A. (1981b), "Numerical Algorithms for Least Squares Approximation by Multivariate B-Splines", preprint no. 440, Sonderforschungsbereich 72 Approximation und Optimierung, Universität Bonn.
- Daniel, J.W. (1976), "Splines and Efficiency in Dynamic Programming", J. Math. Anal. Appl., 54, pp.402-407.
- Davis, M.H.A. (1976), "The Structure of Jump Processes and Related Control Problems", Math. Prog. Study, 6, pp.2-14.
- Denardo, E.V. (1967), "Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming", SIAM Review, 9, pp.165-177.
- Denardo, E. et Rothblum, U. (1979), "Overtaking Optimality for Markov Decision Chains", Math. of Oper. Res., 4, pp.144-152.
- Derman, C. (1963), "On Optimal Replacement Rules when Changes of State are Markovian", Mathematical Optimization Techniques, U. of California Press, Berkeley, pp.201-210.



- Dreyfus, S.E., (1957), "A Note on an Industrial Replacement Process", Oper. Res. Quart., vol. 8, pp.190-193.
- Drinkwater, R. et Hastings, N. (1967), "An Economic Replacement Model", Oper. Res. Quarterly, vol. 18, no. 2, pp.121-138.
- Fainberg, E.A. (1980), "An  $\epsilon$ -Optimal Control of a Finite Markov Chain with an Average Reward Criterion", Th. of Prob. and Appl., XXV, 1, pp.70-81.
- Federgruen, A. et Schweitzer, P.J., et Tijms, H.C. (1978), "Contraction Mapping Underlying Undiscounted Markov Decision Problems", J. Math. Anal. Appl., 65, pp.711-730.
- Federgruen, A. et Hordijk, A. et Tijms, H.C. (1979), "Denumerable State Semi-Markov Decision Processes with Unbounded Costs, Average Cost Criterion", Stoch. Proc. and Appl., 9, pp.223-235.
- Federgruen, A. et Schweitzer, P.J. (1979), "A Survey of Asymptotic Value-Iteration for Undiscounted Markovian Decision Processes", Stichting Mathematisch Centrum, report no. BW 104/79, Amsterdam.
- Federgruen, A. et Spreen, D. (1980), "A New Specification of the Multichain Policy Iteration Algorithm in Undiscounted Markov Renewal Programs", Man. Sci., 26, 12, pp.1211-1217.
- Flynn, J. (1980), "On Optimality Criteria for Dynamic Programs with Long Infinite Horizons", J. Math. Anal. Appl., 76, pp.202-208.
- Fox, B.L. (1966), "Age Replacement with Discounting", Oper. Res., vol. 14, pp.533-537.
- Fox, B.L. (1967), "Adaptive Age Replacement", J. of Math. Anal. Appl., vol. 18, no. 2, pp.365-376.
- Fox, B.L. (1971), "Finite State Approximations to Denumerable-State Dynamic Programs", J. Math. Anal. Appl., 34, pp.665-670.
- Fox, B.L. (1973), "Discretizing Dynamic Programs", J. Optim. Theory Appl., 11, pp.228-234.
- Freedman, D. (1974), "The Optimal Reward Operator in Special Classes of Dynamic Programming Problems", Ann. Probability, 2, pp.942-949.
- Furukawa, N. (1972), "Markovian Decision Processes with Compact Action Spaces", Ann. Math. Statist., 43, pp.1612-1622.
- Gertsbakh, I.B.(1976), "Sufficient Optimality Conditions for Control-Limit Policy in a Semi-Markov Process", J. Appl. Prob., 13, pp.400-406.
- Gertsbakh, I.B. (1977), Models of Preventive Maintenance, North-Holland.

- Glazebrook, K.D. (1979), "Decomposable Jump Decision Processes", Stoch. Processes and Appl., 9, pp.19-33.
- Haneveld, W.K.K. (1980), "On the Behavior of the Optimal Value Operator in Dynamic Programming", Math. Oper. Res., 5, pp.308-320.
- Hahnwald-Busch, A. et Nollau, V. (1978), "An Approximation Procedure for Stochastic Dynamic Programming in Countable State Space", Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization, 9, pp.109-117.
- Hahnwald-Busch, A. et Nollau, V. (1981), "A Method of Clustering for Discounted Markovian Decision Problems", Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization, 12, pp.137-147.
- Haurie, A. et L'Ecuyer, P., (1982), "A Stochastic Control Approach to Group Preventive Replacement in a Multicomponent System", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-27, no. 2, pp.387-393.
- van Hee, K.M. et Wessels, J. (1978), "Markov Decision Processes and Strongly Excessive Functions", Stochastic Processes and Appl., 8, pp.59-76.
- Hermeline, F., (1982), "Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension N", R.A.I.R.O. Analyse Numérique, vol. 16, no. 3, pp.211-242.
- Himmelberg, C.J. et Parthasarathy, T. et van Vleck, F.S. (1976), "Optimal Plans for Dynamic Programming Problems", Math. Oper. Res., 1, pp.390-394.
- Hinderer, K. (1970), Foundations of Non-Stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter, Lect. Notes in Oper. Res. and Math. Syst., 33, Springer-Verlag.
- Hinderer, K. (1978), "On Approximate Solutions of Finite-Stage Dynamic Programs", dans Dynamic Programming and its Applications, ed. par M.L. Puterman, Academic Press, pp.289-317.
- Höllig, K. (1982), "Multivariate Splines", SIAM J. Numer. Anal., 19, pp.1013-1031.
- Howard, R.A. (1960), Dynamic Programming and Markov Processes, J. Wiley, New-York.
- Howard, R.A. (1963), "Semi-Markovian Decision Processes", Proc. Internat. Statist. Inst., Ottawa, Canada.
- Howard, R.A. (1964), "Research in Semi-Markovian Decision Structures", J. Op. Res. Soc. Japan, 6, 4, pp.163-199.
- Hübner, G. (1980), "Bounds and Good Policies in Stationary Finite-Stage Markovian Decision Problems", Adv. Appl. Prob., 12, pp.154-173.
- Jewell, W.S. (1963), "Markov Renewal Programming I and II", Op. Res., 11, pp.939-971.
- Johnson, L.W. et Riess, R.D. (1977), Numerical Analysis, Addison-Wesley.

- Kao, E. (1973), "Optimal Replacement Rules when Changes of State are Semi-Markovian", Oper. Res., 21, pp.1231-1249.
- Kolesar, P. (1966), "Minimum Cost Replacement Under Markovian Deterioration", Man. Sci., 12, pp.694-706.
- Langen, H.-J. (1981), "Convergence of Dynamic Programming Models", Math. of Oper. Res., 6, 4, pp.493-512.
- L'Ecuyer, P., (1980), "Politiques optimales et sous-optimales pour le remplacement des composantes d'un Système", Cahier du GERAD no. G-80-05, Ecole des H.E.C., Montréal.
- MacQueen, J. (1966), "A Modified Dynamic Programming Method for Markovian Decision Problems", J. Math. Anal. Appl., 14, pp.38-43.
- MacQueen, J. (1967), "A Test for Suboptimal Actions in Markovian Decision Problems", Oper. Res., 15, pp.559-561.
- Maitra, A. (1968), "Discounted Dynamic Programming on Compact Metric Spaces", Sankhya, 30A, pp.211-216.
- McCall, J.J. (1965), "Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment: A Survey", Man. Sci., vol. 11, no. 5, pp.493-524.
- Mond, B. et Shisha, O. (1966), "On the Approximation of Functions of Several Variables", J. of Research of the Nat. Bureau of Standards - B., vol. 70B, 3, pp.211-218.
- Morin, T.L. (1978), "Computational Advances in Dynamic Programming", dans Dynamic Programming and its Applications, ed. par M.L. Puterman, Academic Press, pp.53-90.
- Nummelin, E. (1980), "A General Failure Model: Optimal Replacement with State Dependent Replacement and Failure Costs", Math. of Oper. Res., 5, 3, pp.381-387.
- van Nunen, J. et Wessels, J. (1979), "Successive Approximations for Markov Decision Processes and Markov Games with Unbounded Rewards", Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization, 10, pp.431-455.
- Pierskalla, W.P. et Voelker, A. (1976), "A Survey of Maintenance Models: The Control and Surveillance of Deteriorating Systems", N.R.L.Q., vol. 23, no. 3, pp.351-388.
- Pliska, S.R. (1975), "Controlled Jump Processes", Stoch. Processes and Appl., 3, pp.259-282.
- Porteus, E. (1971), "Some Bounds for Discounted Sequential Decision Processes", Man. Sci., 18, p.7-11.
- Porteus, E. (1975), "Bounds and Transformations for Discounted Finite Markov Decision Chains", Oper. Res., 23, 4, pp.761-784.

- Rishel, R.W. (1975), "A Minimum Principle for Controlled Jump Processes", Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling, Lecture Notes in Economics and Math. Syst., vol. 107, Springer-Verlag, pp.493-508.
- Rishel, R.W. (1976), "Controls Optimal from Time  $t$  Onward and Dynamic Programming for Systems of Controlled Jump Processes", Math. Prog. Study, 6, pp.125-153.
- Rishel, R., (1981), "Group Preventive Maintenance: An Example of Controlled Jump Processes", Proceedings of the 20th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego.
- Ross, S.M. (1969), "A Markovian Replacement Model with a Generalization to Include Stocking", Man. Sci., 15, 11, pp.702-715.
- Ross, S.M. (1970), Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden Day.
- Rudin, W. (1974), Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 2e édition.
- Sasieni, M., (1957), "A Markov Chain Process in Industrial Replacement", Oper. Res. Quart., vol. 7, pp.148-155.
- Schäl, M. (1972), "On Continuous Dynamic Programming with Discrete Time Parameter", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 32, pp.179-196.
- Schäl, M. (1974), "A Selection Theorem for Optimization Problems", Arch. Math., vol. XXV, pp.219-224.
- Schäl, M. (1975a), "Conditions for Optimality in Dynamic Programming and for the Limit of  $n$ -Stage Optimal Policies to be Optimal", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 32, pp.179-196.
- Schäl, M. (1975b), "On Dynamic Programming: Compactness of the Space of Policies", Stochastic Processes Appl., 3, pp.345-364.
- Schellhaas, H. (1979), "Semi-Regenerative Processes with Unbounded Rewards", Math. of Oper. Res., 4, 1, pp.70-78.
- Schweitzer, P. (1963), Private communication. Voir Jewell (1963).
- Serfozo, R. (1976), "Monotone Optimal Policies for Markov Decision Processes", Math. Prog. Study, 6, pp.202-216.
- Serfozo, R. (1981), "Optimal Control of Random Walks, Birth and Death Processes, and Queues", Adv. Appl. Prob., 13, pp.61-83.
- Sethi, D.P.S., (1977), "Opportunistic Replacement Policies", dans The Theory and Applications of Reliability, édité par Tsokos et Shimi, Academic Press, pp.433-447.

- Sherif, Y.S. et Smith, M.L. (1981), "Optimal Maintenance Models for Systems Subjects to Failure - A Review", N.R.L.Q., vol. 28, pp.47-74.
- Shreve, S.E. et Bertsekas, D.P. (1978), "Dynamic Programming in Borel Spaces", dans Dynamic Programming and its Applications, ed. par M.L. Puterman, pp.115-130, Academic Press.
- Shreve, S.E. et Bertsekas, D.P. (1979), "Universally Measurable Policies in Dynamic Programming", Math. of Oper. Res., 4, 1, pp.15-30.
- Stone, L.D. (1973), "Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Control of Semi-Markov Jump Processes", SIAM J. on Control, 11, pp.187-201.
- Strauch, R.E. (1966), "Negative Dynamic Programming", Ann. Math. Statist., 37, pp.871-890.
- Striebel, C. (1975), Optimal Control of Discrete Time Stochastic Systems, Lect. Notes Econ. Math. Syst. no. 110, Springer-Verlag, Berlin.
- Thomas, L.C. (1979), "Connectedness Conditions Used in Finite State Markov Decision Processes", J. Math. Anal. Appl., 68, pp.548-556.
- Topkis, D.M. (1978), "Minimizing a Submodular Function on a Lattice", Oper. Res., 26, pp.305-321.
- Varaiya, P. (1975), "Filtering and Control of Jump Processes", Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling, Lect. Notes in Economics and Math. Syst., vol. 107, Springer-Verlag, pp.508-518.
- Vergin, R.C. (1968), "Optimal Renewal Policies for Complex Systems", N.R.L.Q., vol. 15, no. 4, pp.523-534.
- White, C.C. (1980), "The Optimality of Isotone Strategies for Markov Decision Problems with Utility Criterion", dans Recent Developments in Markov Decision Processes, ed. par Hartley, Thomas et White, Academic Press, pp.261-275.
- White, D.J. (1979), "Finite State Approximation for Denumerable-State Infinite Horizon Contracted Markov Decision Processes: The Policy Space Method", J. Math. Anal. Appl., 72, pp.512-523.
- White, D.J. (1980), "Finite State Approximations for Denumerable-State Infinite Horizon Discounted Markov Decision Processes", J. Math. Anal. Appl., 72, pp.292-295.

- Whitt, W. (1978), "Approximations of Dynamic Programs I", Math. of Oper. Res., 3, pp.231-243.
- Whitt, W. (1979a), "Approximations of Dynamic Programs II", Math. of Oper. Res., 4, pp.179-185.
- Whitt, W. (1979b), "A Priori Bounds for Approximations of Markov Programs", J. Math. Anal. Appl., 71, pp.297-302.
- Wijngaard, J. (1978), "Existence of Average Optimal Strategies in Markovian Decision Problems with Strictly Unbounded Costs", dans Dynamic Programming and its Applications, ed. par M.L. Puterman, Academic Press, pp.369-386.
- Yushkevich, A.A. (1980), "Controlled Jump Markov Models", Theory of Prob. and Appl., XXV, 2, pp.244-266.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le Professeur Alain Haurie, mon directeur de recherche, grâce à qui j'ai pu réaliser cette thèse dans les meilleures conditions. Je remercie aussi tous les membres du Groupe d'Etudes et de Recherche en Analyse des Décisions (GERAD) pour leur soutien et leur encouragement.

Les professeurs Alain Haurie et Robert Cléroux, Transports Canada et l'Université Laval se sont relayés pour me soutenir financièrement durant mes études de doctorat. Cette aide fut très appréciée et je les en remercie sincèrement.

Il me fait également plaisir de souligner l'excellent travail de dactylographie effectué en parallèle par Mme Anita Beauchamp, Mme Madeleine Achard-Constantin, Mlle Lise Lessard et Mme Diane Hérard. Malgré la difficulté évidente, due aux nombreuses équations mathématiques qui apparaissent dans le texte, ce travail fut accompli avec compétence et dans les meilleurs délais.

