

2

LES METHODES HAUTE  
RESOLUTION

## 1/ INTRODUCTION :

Les méthodes haute résolution sont des méthodes à horizon infini, ou plus exactement, la précision obtenue après un temps d'observation infini est infini. Ces méthodes sont efficaces que dans un domaine d'application bien défini à elles.

Dans ce chapitre, on présente quatre de ces méthodes :

MUSIC, PROPAGATEUR, PROPAGATEUR SANS BRUIT, TUFTS-KUMARESAN.

On va accompagner chaque méthode de ses hypothèses respectives. Ces méthodes utilisent les propriétés de la matrice de densité spectrale des signaux reçus sur l'antenne, c'est pour cette raison que ce chapitre va commencer par le calcul de cette matrice qu'on appellera  $\Gamma$ . Par ailleurs, ce chapitre sera clos par l'étude de l'effet d'une sur-estimation ou d'une sous-estimation du nombre de sources  $N$  sur la détection et la localisation de sources.

## 2/ CALCUL DE LA MATRICE INTERSPECTRALE $\Gamma$ :

L'objectif du traitement d'antenne est de déterminer à partir des signaux reçus pendant un intervalle de temps de durée finie, sur un ensemble de capteurs constituant une antenne, des paramètres caractérisant les sources rayonnantes situées dans un milieu de propagation donné [8]. Ces paramètres sont :

- le nombre de sources  $N$ ,
- la direction d'arrivée de l'onde issue de chaque source, DDA ou  $\Theta$ , par rapport à un repère fixe de l'antenne,
- l'intensité des signaux émis par ces sources.

Pour cela, on dispose de  $M$  capteurs caractérisés par leur position géométrique  $\mathbf{r}_m$  ;  $m = 1, \dots, M$ , par rapport à un repère fixe de l'antenne et par leur fonction de transfert  $a_m$  appelés gains complexes et  $N$  ondes caractérisées par leurs vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_n$  ;  $n = 1, \dots, N$ .

On suppose que les capteurs et les sources se trouvent dans un même plan.

Chaque signal  $s_n(t)$  émis par l'onde  $n$  est reçu par le capteur  $m$  avec

$$\text{un retard } \tau_{m,n} = \mathbf{r}_m^T \cdot \mathbf{k}_n \quad (\text{T indique la transposition}) \quad -2.2.1-$$

et ceci par rapport au premier capteur pris comme référence,  $\tau_1 = 0$ .

Ainsi, on obtient la représentation de l'ensemble des signaux reçus par :

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{z}_n(t) + \mathbf{b}(t) \quad -2.2.2-$$

$$\text{où } \dim \mathbf{r}(t) = M, \quad -2.2.3-$$

$$\mathbf{z}_n(t) = \begin{bmatrix} a_1 s_n(t) \\ a_2 s_n(t - \tau_{1,n}) \\ \dots \\ a_M s_n(t - \tau_{M,n}) \end{bmatrix} \quad -2.2.4-$$

et  $\mathbf{b}(t)$  est un vecteur de dimension  $M$ , représentant les échantillons du bruit de mesure sur les capteurs.

En pratiquant une transformée de Fourier discrète (TFD) de -2.2.2- et -2.2.4-, on obtient une représentation pour une réalisation  $k$  du signal sous la forme :

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{U} \alpha_k + \mathbf{b}_k \quad -2.2.5-$$

$$\text{où } \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 ; \dots ; \mathbf{u}_N] \quad -2.2.6-$$

est la matrice de dimension  $(M, N)$  des vecteurs sources définis par:

$$\mathbf{u}_n = [a_1, a_2 (e^{j\phi_2(\Theta_n)}), \dots, a_M (e^{j\phi_M(\Theta_n)})]^T \quad -2.2.7-$$

où

$$\phi_m(\Theta_n) = 2\pi f \tau_{m,n} \quad -2.2.8-$$

sachant que  $\Theta$  désigne la direction d'arrivée de l'onde sur l'antenne

$$\text{et } \alpha_k = [\alpha_{1k} ; \dots ; \alpha_{Nk}]^T \quad -2.2.9-$$

est un vecteur de dimension  $N$  comprenant les amplitudes complexes des sources et le vecteur de dimension  $M$ ,  $b_k$ , représente le bruit de mesure sur chaque capteur.

En supposant que :

les  $\alpha_n$  sont des variables aléatoires centrées,

et que les  $b_k$  sont des variables aléatoires complexes, stationnaires, indépendantes entre elles ainsi qu'avec les  $\alpha_n$ , Gaussiennes et de même variance  $\sigma^2$ .

La matrice interspectrale de dimension  $(M, M)$  des signaux reçus sur l'antenne, s'écrit :

$$\Gamma = E [r_k r_k^+] = \Gamma_s + \Gamma_b \quad -2.2.10-$$

où

$$\Gamma_s = U \Gamma_\alpha U^+ \quad -2.2.11-$$

et

$$\Gamma_b = \sigma^2 \text{Id}_M \quad -2.2.12-$$

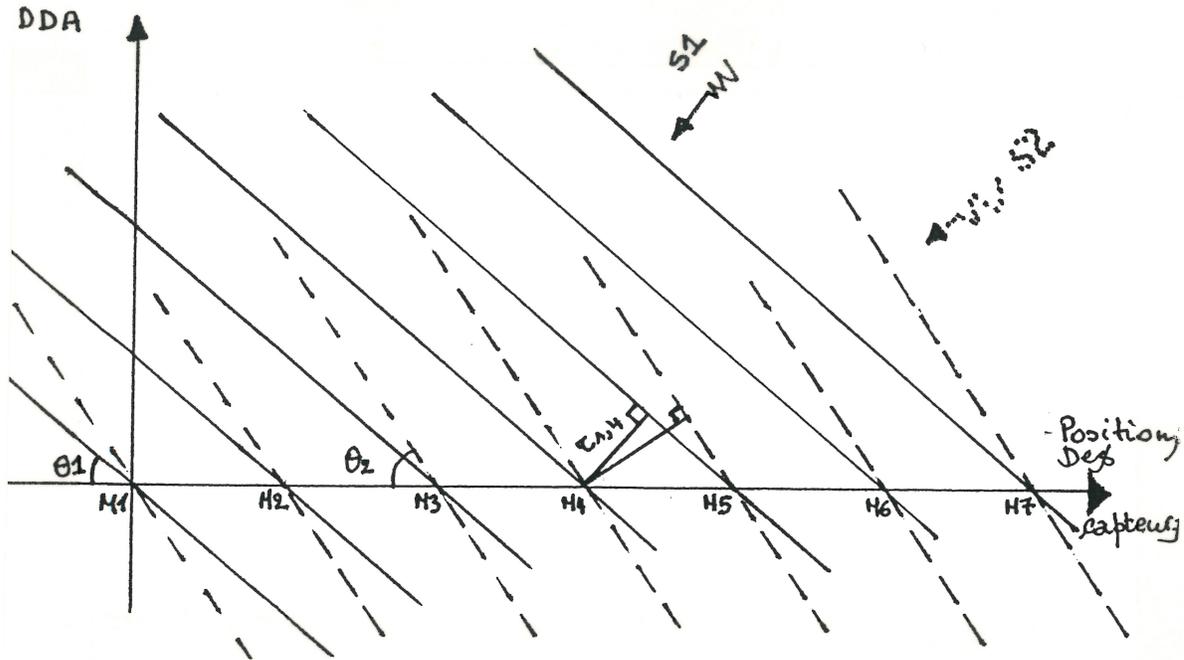
où  $\Gamma_s$  est la matrice interspectrale de dimension  $(N, N)$  des signaux issus des sources et  $\text{Id}_M$  la matrice identité de dimension  $(M, M)$ .

Dans le cas où les gains des capteurs sont tels que  $a_m = 1$ , où les fronts d'ondes sont plans et l'antenne est rectiligne à capteurs équidistants alors

$$\mathbf{u}_n = [1, e^{j\varphi_n}, e^{j2\varphi_n}, \dots, e^{j(M-1)\varphi_n}]^T \quad -2.2.13-$$

$$\text{où } \varphi_n = 2\pi f \frac{d}{c} \sin \Theta_n,$$

$f$  étant la fréquence considérée,  $d$  la distance intercepteur et  $c$  la célérité de l'onde dans le milieu considéré. C'est ce modèle qui va être utilisé lors de la simulation, graphiquement cela se traduit par -2.2.1- :



Graph -2.2.1- Direction d'arrivée des ondes (DDA) émises par deux sources

$S1, S2$  en fonction de la position des différents capteurs.

### 3/ LA METHODE MUSIC (Multiple Signal Classification) :

Dans cette approche, on détermine les directions et les puissances des sources à partir des propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice interspectrale  $\Gamma$  [9], pour cela l'hypothèse de départ est que :

$H1 : \Gamma_\alpha$  définie en -2.2.11- est non singulière.

Cette hypothèse signifie physiquement que les sources sont non totalement corrélées entre elles. On montre alors que la matrice  $\Gamma_s$  définie en -2.2.11- a  $M$  valeurs propres réelles, parmi ces dernières,  $M-N$  sont nulles et les  $N$  autres sont strictement positives car  $\Gamma_s$  est une matrice hermitienne définie positive et de rang  $N$ .

On obtient :

$$\forall j \geq N+1 ; \Gamma_s v_j = U \Gamma_\alpha U^+ v_j = \mathbf{0} \quad -2.3.1-$$

où  $\mathbf{0}$  est un vecteur nul de dimension  $M$ .

Et sous l'hypothèse H2 :

H2 : Les N vecteurs sources  $\mathbf{u}_n$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{C}^M$ ,

on obtient les trois formules suivantes:

$$\forall j \geq N+1, \dots, M \quad \mathbf{U}^+ \mathbf{v}_j = 0 \quad -2.3.2-$$

$$\forall i = 1, \dots, N ; \forall j = N+1, \dots, M ; \mathbf{u}_j^+ \mathbf{v}_i = 0 \quad -2.3.3-$$

$$\mathbf{V}_B^+ \mathbf{U} = 0 \quad -2.3.4-$$

avec

$$\mathbf{V}_B = [\mathbf{v}_{N+1}, \mathbf{v}_{N+2}, \dots, \mathbf{v}_M] \quad -2.3.5-$$

Les valeurs propres de  $\Gamma$  sont sous la forme  $\lambda_i + \sigma^2$ ,  $\lambda_i$  étant valeur propre de  $\Gamma_s$ , sachant que les valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$  vérifient la relation:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > \lambda_{N+1} = \dots = \lambda_M = \sigma^2. \quad -2.3.6-$$

De plus, les vecteurs du sous-espace bruit sont orthogonaux aux vecteurs directions des sources car  $\Gamma$  est une matrice hermitienne.

Finalement, cette méthode se réduit à déterminer :

- la plus petite valeur propre qui sera  $\sigma^2$ ,
- le nombre M-N qui correspondra au nombre de fois où on a  $\sigma^2$  afin d'obtenir N,
- résoudre -2.3.4- ,

afin de calculer, la puissance et la corrélation des sources par :

$$\Gamma_\alpha = (\mathbf{U}^+ \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^+ (\Gamma - \sigma^2 \mathbf{I}_d) \mathbf{U} (\mathbf{U}^+ \mathbf{U})^{-1} \quad -2.3.7-$$

Pratiquement, il est délicat d'obtenir les M-N valeurs de  $\sigma^2$  car elles peuvent être différentes à cause des calculs numériques. De plus, il est difficile de résoudre directement -2.3.4- .

Pour remédier à ce problème, on calcule plus exactement la norme de la projection de  $u(\Theta)$  qui ne dépend que de la DDA  $\Theta$  sur  $\text{esp}\{V_B\}$  et ceci par la relation :

$$\Theta \in ]-\pi, \pi[, F(\Theta) = \|V_B^+ u(\Theta)\|^2 = \sum_{j=N+1}^M |v_j^+ u(\Theta)|^2. \quad -2.3.8-$$

Plus  $F(\Theta)$  a ses minima proches de zéro meilleur est le modèle de propagation  $u(\Theta)$ .

#### 4/ LA METHODE DU PROPAGATEUR :

##### 4-1 Définition du propagateur :

Le propagateur est un opérateur linéaire dont la définition est due à des considérations d'algèbre linéaire [8, 10 - 12,14]. Cette méthode repose sur le partitionnement de la matrice des vecteurs sources définie en -2.2.6- en deux blocs, suivant le schéma suivant :

$$U = \begin{bmatrix} X \\ - \\ Y \end{bmatrix} \begin{matrix} \}N \\ \}M-N \end{matrix} \quad -2.4.1-$$

et sous l'hypothèse

H3 : Les vecteurs colonnes de dimension  $N$  de la matrice  $X$  sont linéairement indépendants, c'est à dire que  $X$  est non singulière,

le propagateur est l'unique opérateur linéaire  $P$  de  $\mathbb{C}^{M-N}$  dans  $\mathbb{C}^N$ , défini par:

$$P^+ X = Y \quad -2.4.2-$$

ou

$$[P^+ \ , \ -\text{Id}_{M-N}] U = Q^+ \ U = 0 \quad -2.4.3-$$

où  $\text{Id}_{M-N}$  est la matrice identité de dimension  $M-N$  et  $0$  la matrice nulle de dimension  $(M-N, N)$ .

Pour déterminer les DDA des sources, il suffit de calculer de la même façon que dans la méthode music, l'équation :

$$\mathbf{Q}^+ \mathbf{u}(\Theta) = 0 \quad -2.4.4-$$

#### 4-2 Détermination du propagateur :

Dans cette section, on va montrer comment extraire le propagateur de la matrice interspectrale des signaux reçus, pour cela , on va traiter deux cas, le cas sans bruit et le cas en présence de bruit. On donnera également une méthode qui permet d'éliminer le bruit ; elle sera appelée par abus de langage " LE PROPAGATEUR SANS BRUIT " .

##### 4-2-A Cas sans bruit :

En absence du bruit, la matrice interspectrale des signaux reçus sur l'antenne définie en -2.2.10- s'écrit :

$$\Gamma = \Gamma_s = \mathbf{U} \Gamma_\alpha \mathbf{U}^+ \quad -2.4.5-$$

En introduisant le partitionnement -2.4.1- de  $\mathbf{U}$ , on retrouve une nouvelle forme de  $\Gamma_s$  qui est :

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \Gamma_\alpha \mathbf{X}^+ & | & \mathbf{X} \Gamma_\alpha \mathbf{Y}^+ \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \mathbf{Y} \Gamma_\alpha \mathbf{X}^+ & | & \mathbf{Y} \Gamma_\alpha \mathbf{Y}^+ \end{bmatrix} \quad -2.4.6-$$

où les quatre blocs  $\mathbf{X}\Gamma_\alpha\mathbf{X}^+$ ,  $\mathbf{X}\Gamma_\alpha\mathbf{Y}^+$ ,  $\mathbf{Y}\Gamma_\alpha\mathbf{X}^+$  et  $\mathbf{Y}\Gamma_\alpha\mathbf{Y}^+$  sont de dimension (N, N), (N, M-N), (M-N, N) et (M-N, M-N) respectivement,

ou

$$\Gamma_s = [ \mathbf{G}_s , \mathbf{H}_s ] \quad -2.4.7-$$

où  $\mathbf{G}_s$  et  $\mathbf{H}_s$  sont des matrices de dimension respectives (M, N) et (M, M-N) alors, on a la relation :

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{G}_s \mathbf{P} \quad -2.4.8-$$

Sous les hypothèses précédentes (H1, H2), on a:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{G}_s^+ \mathbf{G}_s)^{-1} \mathbf{G}_s^+ \mathbf{H}_s \quad -2.4.9-$$

4-2-B En présence de bruit :

La matrice de densité spectrale du bruit est de la forme -2.2.12- .

Le partitionnement effectué auparavant ne peut être réalisé ici à cause du bruit . La seule solution évidente, est d'extraire ce bruit afin de chercher l'opérateur de propagation. Soit un scalaire positif  $\delta$  et soit la matrice

$$\Gamma(\delta) = \Gamma - \delta \text{Id}_M \quad -2.4.10-$$

Le partitionnement, nous amène à :

$$\Gamma(\delta) = [ \mathbf{G}(\delta) , \mathbf{H}(\delta) ] \quad -2.4.11-$$

Le problème est de savoir s'il existe un couple  $(\mathbf{P}, \delta)$  solution de

$$\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{G}(\delta) \mathbf{P} \quad -2.4.12-$$

En [8] , on montre que la seule solution au système -2.4.12- est

$$\delta = \sigma^2 \quad -2.4.13-$$

Pour obtenir  $\delta$ , on partitionne  $\Gamma(\delta)$  en quatre blocs sous la forme:

$$\Gamma(\delta) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 - \delta \text{Id}_n & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_2 - \delta \text{Id}_{M-n} \end{bmatrix} \quad -2.4.14-$$

où  $\Gamma_1, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}$  et  $\Gamma_2$  sont des matrices de dimensions respectives  $(n, n)$ ,  $(n, M-n)$ ,  $(M-n, n)$  et  $(M-n, M-n)$  où  $n$  est un entier variant de 1 à  $M$ .

Des relations -2.4.11- et -2.4.14-, on obtient l'équation de  $\delta$ , qui est :

$$\delta = (c_1^+ [\text{Id}_{M-N} - \Gamma_{21} (\Gamma_{21}^+ \Gamma_{21})^{-1} \Gamma_{21}^+] e_1) / (e_1^+ [\text{Id}_{M-N} - \Gamma_{21} (\Gamma_{21}^+ \Gamma_{21})^{-1} \Gamma_{21}^+] e_1) \quad -2.4.15-$$

où  $c_1$  et  $e_1$  sont les 1-ièmes colonnes des matrices  $\Gamma_2$  et  $\text{Id}_{M-N}$ .

Ainsi, la détermination de  $(P, \sigma^2)$  exige essentiellement l'inversion de deux matrices d'ordre  $N$ , obtenues dans les équations -2.4.9- et -2.4.15-, ce qui est moins coûteux que la recherche des éléments propres d'une matrice d'ordre  $M$ .

### 5/ LA METHODE DE TUFTS-KUMARESAN (T-K) ET SON EXTENSION AU PROPAGATEUR :

Elle a été introduite afin d'améliorer les performances de localisation de sources [13]. Pour cela, elle construit un vecteur  $\mathbf{d}$  de dimension  $M$  caractérisant le sous-espace bruit de  $\Gamma$ , qui est donné sous la forme :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad -2.5.1-$$

où  $\mathbf{a}$  un vecteur de dimension  $(M-1)$

$\mathbf{a}$  est déterminé de la façon suivante :

La matrice du sous-espace bruit, qu'on notera  $\mathbf{B}$  (-2.3.5- et -2.4.3- pour MUSIC et le PROPAGATEUR respectivement ), peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{B} (M, M-N) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \quad -2.5.2-$$

tel que  $\mathbf{b}_1$  est le vecteur de dimension  $(M-N)$  et  $\mathbf{B}_1$  est la matrice de dimension  $(M-1, M-N)$ .

On montre dans [13] que :

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}_1 \mathbf{b}_1 / \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 \quad -2.5.3-$$

Ainsi

$$\mathbf{d}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{b}_1 / \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \quad -2.5.4-$$

La relation -2.3.8- donnant la norme de la projection de  $u(\Theta)$  devient :

$$F_d(\Theta) = \| d_B^+ u(\Theta) \|^2 \quad -2.5.5-$$

## 6/ EFFET D'UNE SUR-ESTIMATION OU D'UNE SOUS-ESTIMATION DU NOMBRE DE SOURCES :

Ce paragraphe aura pour but de présenter les deux cas de sur-estimation et de sous-estimation du nombre de sources  $N$  et son influence sur la solution finale obtenue après localisation. Cet approche va être réalisée pour l'ensemble des méthodes utilisées auparavant.

### 1/ SUR-ESTIMATION :

Supposons que l'on veuille sur-estimer le nombre de sources  $N$  par  $N + 1$ , ceci se ramène à déterminer les  $M - N - 1$  valeurs propres égales à la plus petite valeur propre de  $\Gamma$ , alors qu'il n'en existe que  $M - N$ . Dans ce cas, le sous-espace bruit est engendré par  $\{v_{N+2}, \dots, v_M\}$ , il est de dimension  $M - N - 1$ , par ailleurs, la relation d'orthogonalité entre les vecteurs sources  $u_n$  et le sous-espace bruit reste valable et

$$v_j^+ u_n = 0 ; \forall j = N + 2, \dots, M ; \forall n = 1, \dots, N \quad -2.6.1-$$

Par contre, en plus des solutions  $u(\Theta) = u_n$ , il existe d'autres solutions que l'on appellera fantômes.

### 2/ SOUS-ESTIMATION :

Cette fois le nombre de sources  $N$  sera estimé par  $N - 1$ , dans ce cas là, le sous espace bruit aura une dimension  $M - N + 1$  et sera engendré par  $\{v_N, v_{N+1}, \dots, v_M\}$ . On remarque qu'il existe un vecteur commun  $a_i$  au sous-espace bruit et au vecteur source  $u_i$ , donc le sous-espace bruit estimé ne peut être orthogonal aux vecteurs sources, d'où les vecteurs sources  $u_i$  risquent de ne pas être tous solution de l'équation :

$$v_j^+ u_n = 0 ; \forall j = N, \dots, M ; \forall n = 1, \dots, N . \quad -2.6.2-$$

En conclusion, il vaut mieux sur-estimer le nombre de sources afin d'avoir au moins les solutions correctes, pour ne pas prendre le risque de supprimer des solutions, ce qu'on fera lors des simulations et ceci pour toutes les méthodes déjà étudiées.

**REMARQUE** : Pour appliquer les méthodes de localisation (recherche du propagateur ou des vecteurs propres de  $\Gamma$  caractérisant le sous espace bruit sur lequel on projette  $\mathbf{u}(\Theta)$ ), on a besoin de connaître le nombre de sources, dans ce qui suit, on ne cherche pas à estimer ce nombre là car on le suppose connu ou on le surestime volontairement.