

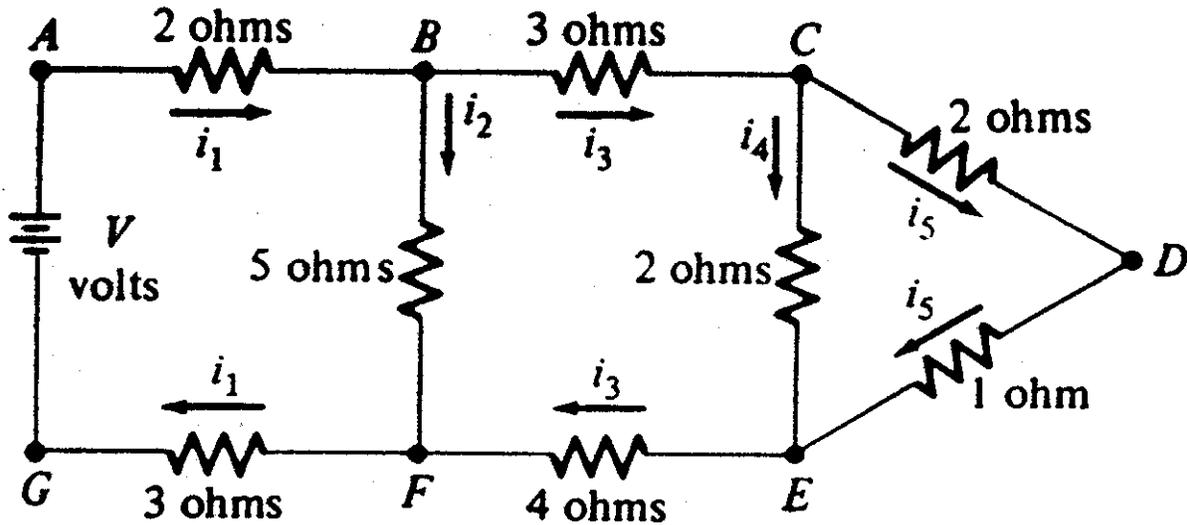
# Ift 2421

## Chapitre 3

### Résolution des systèmes d'équations linéaires

# Introduction

## Description:



$$V = R \cdot I$$

## Loi de Kirchhoff:

Le voltage sur une boucle fermée est nul.

Intensité entrante = intensité sortante.

donc

$$5 i_1 + 5 i_2 = V$$

$$i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

$$2 i_4 - 3 i_5 = 0$$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$5 i_2 - 7 i_3 - 2 i_4 = 0$$

## Exemples de situations nécessitant la résolution d'un système d'équations linéaires.

- Potentiel dans un circuit électrique
  - Tension dans une structure
- Flot dans un réseau hydraulique
- Mélange de produits chimiques
- Vibration d'un système mécanique
  - Élasticité
  - Transfert de chaleur
- Réduction d'équation différentielles

Ift 2455

## Notation :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Ce système sera noté par :  
(en notation matricielle)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ou aussi

$$A \cdot x = b$$

## 10 Rappels sur les matrices :

1. Multiplications entre matrices conformes seulement : si A est  $K \times L$  et B est  $M \times N$  alors A.B existe ssi  $L=M$ .
2. On a l'associativité du produit :  $A.(B.C)=(A.B).C$
3. On n'a pas de façon générale de commutativité :  $A.B \neq B.A$
4. Un vecteur est une matrice dont l'une des dimensions est 1.
5. Une matrice  $1 \times 1$  est associée de façon bijective à un nombre réel.
6. La transposée  $A^T$  d'une matrice A est obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes.
7. Une matrice carrée  $N \times N$  est dite d'ordre N.
8. La matrice Zéro (notée 0) est entièrement composée de zéros.
9. La matrice identité (notée I) a des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.
10. La trace d'une matrice est la somme des éléments de sa diagonale.

## Méthode de Cramer

Si  $A \cdot x = b$  est un système de  $n$  équations  
avec  $n$  inconnues

tel que  $\det(A) \neq 0$

alors le système a une solution unique qui est

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

avec  $A_j$  la matrice obtenue en remplaçant la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$   
par le vecteur  $b$ .

Ordre de la méthode:

$$O(n!)$$

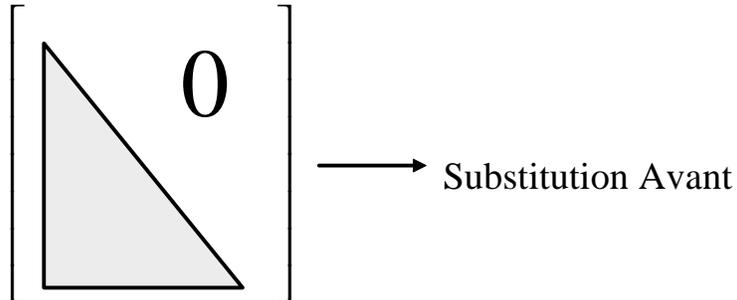
$$n > 20$$

$\Leftrightarrow$

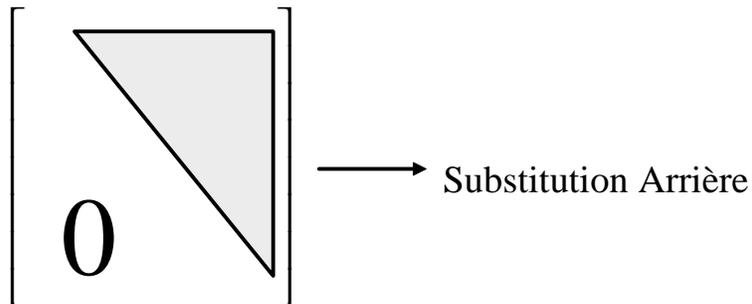
5 fois la vie de l'univers.

## Systeme triangulaire :

- Inferieur



- Superieur



Résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \\ -42 \end{bmatrix}$$

et le système :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 22 \\ -19 \end{bmatrix}$$

Matrice augmentée :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & 0 & 22 \\ 2 & 7 & -21 & -19 \end{array} \right]$$

## Systemes equivalents

2 systemes sont equivalents

$\Leftrightarrow$

Ils peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre avec uniquement des opérations élémentaires.

Deux systemes equivalents ont la même solution.

## Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

1. Multiplication d'une rangée par une constante
2. Les équations peuvent être permutées.
3. Combinaison linéaire des rangées.

Exemple de système

$$R_1: 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$R_2: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$R_3: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et de systemes equivalents

$$2R_1: 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 24$$

$$R_3: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

$$R_2 + R_3: 3x_1 + 2x_3 = 13$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

## Élimination de Gauss

2 étapes :

1. Transformation du système original en un système triangulaire supérieur.

2. Résolution du système triangulaire par substitution arrière.

Exemple de système :

$$R_1: 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$R_2: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$R_3: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

Second pivot ( $a_{22} = 7/3$ ) :

$$R_1: 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$R_2: (7/3)x_2 + (7/3)x_3 = 7$$

$$R_3 - ((-4/3) / (7/3))R_2: -x_3 = -2$$

Premier pivot ( $a_{11} = 3$ ) :

$$R_1: 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$R_2 - \frac{1}{3}R_1: \frac{7}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 7$$

$$R_3 - \frac{2}{3}R_1: -\frac{4}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_3 = -6$$

Substitution arrière :

$$x_3 = 2$$

$$\begin{aligned} x_2 &= (3/7)[7 - (7/3)x_3] \\ &= (3/7)[7 - (7/3)2] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (1/3)[12 + x_2 - 2x_3] \\ &= (1/3)[12 + 1 - 2(2)] = 3 \end{aligned}$$

## Remarques sur la méthode de Gauss

1. Un pivot est une valeur par laquelle on doit diviser pour résoudre le système linéaire.
2. On n'a pas utilisé la seconde opération élémentaire.
3. On peut aussi travailler avec la matrice augmentée.

### Coût :

Ordre  $O(n^3/3)$  flops

(Floating point operations)

### Notes :

Substitution arrière

Ordre  $O(n^2/2)$  flops

négligeable lorsque  $n$  tend vers infini.

### Méthode de Gauss Jordan

- fait disparaître les coefficients en haut et en bas de la diagonale.

- Pas de substitution arrière.

### Coût :

Ordre  $O(n^3/2)$  flops

déconseillée

## Pivotage

Technique de **pivotage partiel** :

Permute 2 lignes pour avoir le pivot maximum en valeur absolue.

Technique de **pivotage complet** :

Permute 2 lignes de la matrice augmentée, puis interchange 2 inconnues du système pour avoir le pivot maximum en valeur absolue.

### Raisons du pivotage

Division par un très petit pivot

$$\frac{\text{valeur} + \text{erreur}}{\text{Pivot}} = \frac{\text{valeur} + \text{erreur}}{10^{-15}} = \text{valeur}10^{15} + \text{erreur}10^{15}$$

Exemple :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -32 & 3 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{array} \right]$$

Pivotage partiel ( $R_1 \leftrightarrow R_3$ )

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & -32 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

Suffisant pour éviter les divisions par 0.

Peut aussi améliorer la précision des calculs.

## Pivotage Complet

Étape 1 : ( $R_1 \leftrightarrow R_2$ )

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -32 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{array} \right]$$

Étape 2 : ( $C_1 \leftrightarrow C_3$ )

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -32 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \end{array} \right]$$

Attention :

Garder l'ordre des inconnues.

$$O = (3, 2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -32 \\ 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -32 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -32 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} -32 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## Pivotage (autre exemple)

Cet exemple montre que la précision peut être améliorée par le pivotage. Considérons un système avec  $b= 10$  et  $s = 4$ .  
(Arrondi à chaque opération)

Soit le système  $A x = b$  tel que :

$$A = \begin{bmatrix} -0.002 & 4.000 & 4.000 \\ -2.000 & 2.906 & -5.387 \\ 3.000 & -4.031 & -3.112 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7.998 \\ -4.481 \\ -4.143 \end{bmatrix}$$

La matrice triangulaire supérieure sans pivotage est :  
(augmentée)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -0.002 & 4.000 & 4.000 & 7.998 \\ 0 & -3.997 & -4.005 & -8.002 \\ 0 & 0 & -10.00 & 0.000 \end{array} \right]$$

ce qui donne la solution :  $x^* = (-1496, 2.000, 0.000)$

Si on utilise le pivot partiel :

$$A = \begin{bmatrix} 3.000 & -4.031 & -3.112 \\ -0.002 & 4.000 & 4.000 \\ -2.000 & 2.906 & -5.387 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -4.143 \\ 7.998 \\ -4.481 \end{bmatrix}$$

La matrice triangulaire supérieure avec pivotage est :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3.000 & -4.031 & -3.112 & -4.143 \\ 0 & 3.997 & 3.998 & 7.995 \\ 0 & 0 & -7.681 & -7.681 \end{array} \right] \quad \text{ce qui donne} \quad x^* = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

## Normalisation partielle (Scaling)

Diviser chaque élément d'une rangée de la matrice par l'élément maximum de la rangée.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sans normalisation  
( $b=10$ ,  $s=3$ )

$$x_1 = 1.00, x_2 = 1.09, x_3 = 0.94$$

Avec normalisation :  
 $R_1/100$ ,  $R_2/100$ ,  $R_3/2$

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.02 & 1.00 \\ -0.01 & 0.03 & 1.00 \\ 0.50 & 1.00 & -0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.02 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

Puis pivot partiel

$$x_1 = 1.00, x_2 = 1.00, x_3 = 1.00$$

### Remarques :

1. Peut détruire la symétrie.
2. Surcroît de calcul : à employer seulement dans les cas difficiles.
3. Utiliser le pivotage partiel dans la plupart des cas.

## Plusieurs membres de droite

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On a en fait deux systèmes avec la même matrice.

On travaille alors avec la matrice augmentée de plusieurs membres de droite.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 2 & 12 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 11 & 14 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

Réduction de cette matrice

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 2 & 12 & 14 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 & 28/3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

On résout le système pour tous les membres de droite à la fois.

### Problème

Si on veut résoudre le système pour un nouveau membre de droite plus tard.

On trouve :

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$$

et

$$y_1 = 4, y_2 = 2, y_3 = 2$$

## Méthode de factorisation triangulaire (décomposition LU)

Décomposer la matrice  $A$  en un produit de deux matrices triangulaires.

$$A \cdot x = b$$

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} \text{triangle} & 0 \\ \hline & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \text{triangle} \end{array} \right]$$

Étape 1. Décomposition

Étape 2. Résolution

Poser  $y = U \cdot x$

$$A \cdot x = L \cdot U \cdot x = b$$

où  $L$  et  $U$  sont simples

1. Résoudre  $L \cdot y = b$  par substitution avant.

2. Résoudre  $U \cdot x = y$  par substitution arrière.



1. Calcul de  $L_{i1}$  et  $U_{1j}$  :

$$L_{11} = a_{11}$$

$$L_{21} = a_{21}$$

$$L_{31} = a_{31}$$

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}}$$

$$U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}}$$

2. Calcul de  $L_{i2}$  et  $U_{2j}$  :

$$L_{22} = a_{22} - L_{21} U_{12}$$

$$L_{32} = a_{32} - L_{31} U_{12}$$

$$U_{23} = \frac{a_{23} - L_{21} U_{13}}{L_{22}}$$

3. Calcul de  $L_{33}$  :

$$L_{33} = a_{33} - L_{31} U_{13} - L_{32} U_{23}$$

## Exemple Factoriser la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calcul de  $L_{i1}$  et  $U_{1j}$  :

$$L_{11} = 2$$

$$L_{21} = 0$$

$$L_{31} = 6$$

$$U_{12} = \frac{-1}{2} \quad U_{13} = \frac{-1}{2}$$

2. Calcul de  $L_{i2}$  et  $U_{2j}$  :

$$L_{22} = -4 - 0 * (-1/2) = -4$$

$$L_{32} = -3 - 6 * (-1/2) = 0$$

$$U_{23} = \frac{2 - 0 * (-\frac{1}{2})}{-4} = -\frac{1}{2}$$

3. Calcul de  $L_{33}$  :

$$L_{33} = 0 - 6 * (-\frac{1}{2}) - 0 * (-\frac{1}{2}) = 3$$

on trouve :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple: résoudre le système

$$A x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

or  $A = L.U$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Résoudre  $L.y = b$  par substitution avant

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_3 = 1$$

Résoudre  $U.x = y$  par substitution arrière

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

**Formules générales de factorisation  
d'une matrice d'ordre N  
sous la forme L.U**

Pour les éléments de L :

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj} \quad j \leq i \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Pour les éléments de U :

$$U_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} \right] \quad i < j \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

## Stockage compact

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Décomposition stockée sous la forme :

$$A = L.U = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

On peut détruire A en cours de calcul de L et U.

## Avantages

1. Une factorisation même s'il y a plusieurs seconds membres.

Factorisation =  $O(n^3)$  flops. ( $>$  Gauss)  
Résolution =  $O(n^2)$  flops. (économie)

2. Peu de mémoire.

Stockage compact de LU dans A.

3. Préserve le profil de la matrice originale ;  
les zéros les plus extrêmes sont conservés (matrice creuse)

## Inconvénients

1. Pour une matrice symétrique, l'information de la symétrie  
n'est pas prise en compte.  
(voir factorisation  $LL^T$  ou  $LDL^T$   $O(n^3/6)$ )

2. Le pivotage se complique par rapport à la méthode de Gauss.

## Algorithme de la méthode de décomposition LU

Pour transformer une matrice  $n \times n$   
en un produit de matrice L et U.

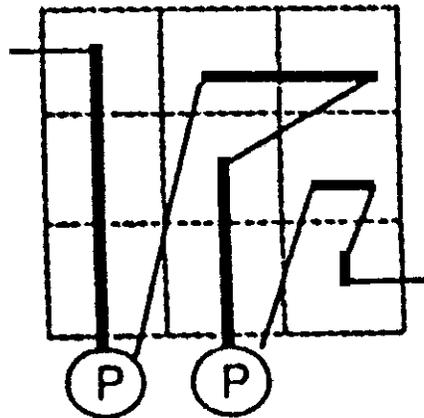
```
Faire pour i = 1 jusqu'à n , pas = 1 :  
    L[i,1] = A[i,1] ;  
fin faire pour.  
Faire pour j=1 to n, U[1,j]/L[1,1]  
Faire pour j = 2 jusqu'à n , pas = 1 :  
  
    Faire pour i = j jusqu'à n , pas = 1 :  
        Faire pour k = 1 jusqu'à j-1 , pas = 1 :  
            Accumuler Somme de L[i,k] * U[k,j]  
            en double précision;  
        fin faire pour.  
        L[i,j] = A[i,j] - Somme ;  
    fin faire pour.  
  
    U[j,j] = 1 ;  
  
    Faire pour i = j + 1 jusqu'à n , pas = 1 :  
        Faire pour k = 1 jusqu'à j-1 , pas = 1 :  
            Accumuler Somme de L[j,k] * U[k,i]  
            en double précision;  
        fin faire pour.  
        U[j,i] = ( A[j,i] - Somme ) / L[j,j] ;  
    fin faire pour.  
fin faire pour.
```

## Factorisation triangulaire avec pivotage

1. Utilise les opérations élémentaires  
de ligne sur la partie non augmentée de la matrice.  
Garder un vecteur des permutations.

2. Pivotage  
Immédiatement  
après calcul d'une colonne de L.

Ordre des calculs :



D'abord colonne, ensuite pivot puis ligne.

Remarque :

Le pivotage détruit la structure de la matrice originale.

Exemple :

Matrice originale

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Calcul de  $L_{i1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Premier pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Calcul de  $U_{1j}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Calcul de  $L_{i2}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Second pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Calcul de  $U_{2j}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Calcul de  $L_{33}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Attention à garder l'ordre des permutations !

### Exemple (suite)

Soit le système :

$$A x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

or, avec pivotage,

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on doit donc résoudre

$$L \cdot U \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Lors du premier pivot

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit P la matrice nxn des permutations

$A \cdot x = b$  est équivalent à  $LU x = P \cdot b$

LU étant obtenu avec pivotage.

Au début,  $P = I$ .

à chaque permutation de  $L_i$  et  $L_j$  dans la matrice compacte,  
permuter  $C_i$  et  $C_j$  dans P.

# Systemes linéaires rectangulaires

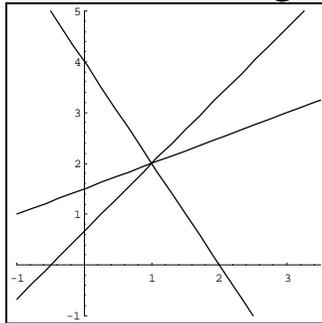
**plus d'équations**  
que d'inconnues:

**moins d'équations**  
que d'inconnues:

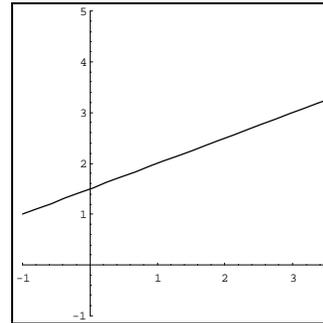
1. Équations supplémentaires

**redondantes:**

système NxN déguisé

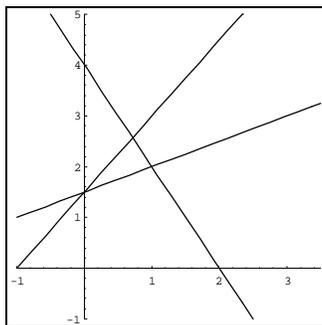


**infinité de solutions.**



2. Équations supplémentaires

**inconsistantes:** pas de  
solution.



Exemple 1:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 &= -3 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Exemple 2:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 &= -3 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

## Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés

Systeme surdetermine

$$A x = b$$

peut ne pas avoir de solution.

Trouver  $x_0$  qui minimise

$$r = A x - b \quad (\mathbf{r} = \text{résidu})$$

Il suffit de résoudre

$$A^T A x_0 = A^T b$$

si  $A^T A$  inversible, 1 solution unique.

Minimiser la <sup>norme</sup> distance de  $r$  à 0,  
minimisons ici

$$\begin{aligned} F(x) &= \| r \|^2 = \| A x - b \|^2 \\ &= (A x - b)^T (A x - b) \end{aligned}$$

Dérivées :

$$\frac{dF}{dx} = 2(A^T A x - A^T b)$$

Au minimum,  $x = x_0$ ,  
dérivée = 0.

$$\text{donc } A^T A x_0 = A^T b$$

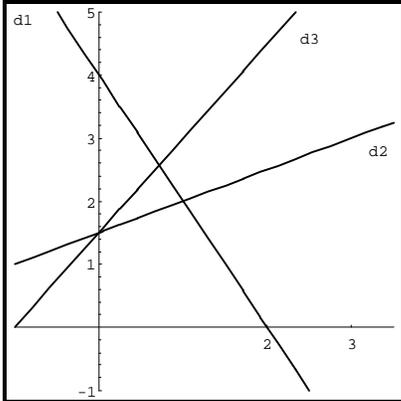
Utilisons la méthode  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$

Exemple 1:

$$2x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 = -3$$

$$-3x_1 + 2x_2 = 3$$

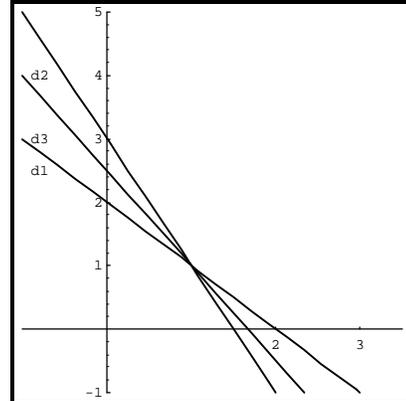


Exemple 2:

$$y_1 + y_2 = 2$$

$$2y_1 + y_2 = 3$$

$$3y_1 + 2y_2 = 5$$



Formons la matrice augmentée

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Multiplions par la matrice transposée

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Nous devons donc résoudre

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 14 & -6 & -4 \\ -6 & 9 & 16 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 149 & 23 \\ 9 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

Ce qui donne

$$x_1 = 100/45 = 2.22$$

$$x_2 = 2/3 = 0.67$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 1$$

Calculer les résidus  $\mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$

## Systemes singuliers et non singuliers pour des matrices carrées

Matrice **singulière** = 1 pivot nul ou plus  
avec Gauss et pivotage.

**Rang d'une matrice** = nombre de pivots non nuls.

Matrice NxN régulière  
si son rang = N.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

On permute les lignes 2 et 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Après le premier pivot :

Après le second pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc matrice singulière de rang 2.

## Rang versus vecteur linéairement indépendants

Des vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont linéairement **dépendants**

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

avec  $a_n$  tous non nuls

Rang = nombre de rangées ou de colonnes linéairement indépendantes d'une matrice.

Exemple :

$$\begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ R_1 \left[ \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right] \\ R_2 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ R_3 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ R_4 \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

Dans ce cas,  
pour les lignes

$$R_3 = R_1 - 2 R_2$$

$$R_4 = R_1 - R_2$$

et

pour les colonnes

$$C_3 = C_2$$

$$C_4 = C_1$$

donc le rang est 2.

## Déterminant d'une matrice carrée

**Cofacteur**  $\text{cof}_{ij}(A)$  d'une matrice  $A$  obtenu:

1. en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $A$
2. en calculant le déterminant de la matrice résultante
3. en multipliant par le signe  $(-1)^{i+j}$

Le déterminant  $|A|$  de la matrice  $A$  est donné par la relation

$$|A| = \sum_j a_{ij} \text{cof}_{ij}(A) = \sum_i a_{ij} \text{cof}_{ij}(A)$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Les cofacteurs de la première ligne sont :

$$\text{cof}_{11}(A) = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$\text{cof}_{12}(A) = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$\text{cof}_{13}(A) = + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 24$$

Le déterminant de  $A$  est donc

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \text{cof}_{11}(A) + a_{12} \text{cof}_{12}(A) \\ &\quad + a_{13} \text{cof}_{13}(A) \\ &= 2 \text{cof}_{11}(A) + (-1) \text{cof}_{12}(A) \\ &\quad + (-1) \text{cof}_{13}(A) \\ &= 2(6) + (-1)(12) + (-1)(24) = -24 \end{aligned}$$

**Note** : N'importe quelle ligne ou colonne peut être utilisée pour développer le déterminant.

## Propriétés des déterminants

$$|A B| = |A| |B|$$

$$|A^T| = |A|$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow A \text{ est singulière}$$

et pour une matrice triangulaire L:

$$|L| = \prod_i L_{ii}$$

Exemple de calcul du déterminant  
après une factorisation  $A = L U$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|L| = 2 \operatorname{cof}_{11}(L) = (2) (-4) (3) = -24$$

$$|U| = 1 \operatorname{cof}_{11}(U) = (1) (1) (1) = 1$$

donc

$$|A| = |L| |U| = (-24) (1) = -24$$

## Effet sur le déterminant des opérations élémentaires de lignes

1. Multiplier une ligne par une constante  $R'_j = k R_j$

Exemple  $R'_2 = k R_2$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k a_{21} & k a_{22} & k a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A'| = k |A|$$

Le déterminant est aussi multiplié par k.

2. Permuter deux lignes de la matrice  $R'_i = R_j$  et  $R'_j = R_i$

Exemple  $R'_3 = R_2$  et  $R'_2 = R_3$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$|A'| = - |A|$$

Le déterminant change de signe à chaque permutation.

3. Additionner une constante k fois une ligne à une autre ligne

$R'_i = R_i + k R_j$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k a_{31} & a_{22} + k a_{32} & a_{23} + k a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A'| = |A|$$

Le déterminant reste inchangé.

**Calcul du déterminant après  
factorisation triangulaire  
avec pivotage:**

1. Multiplier les pivots
  2. Faire un changement de signe à chaque fois qu'on permute deux lignes
  3. Ne pas employer l'opération 1 de multiplication par une constante
- ! ne pas oublier le dernier coefficient**

Exemple :

Calcul du déterminant de la matrice factorisée ci dessous.

$$(-1)(3)(-1)(2)(-1/3) = -2$$

Matrice originale

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Calcul de  $L_{i1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Premier pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Calcul de  $U_{1j}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Calcul de  $L_{i2}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Second pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Calcul de  $U_{2j}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Calcul de  $L_{33}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

## Inversion de matrices carrées

L'inverse de A est notée par  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I$$

Calculer  $A^{-1} \Rightarrow$  résoudre un système  
avec N membres de droites :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Exemple :

Calculer l'inverse de

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Par élimination de Gauss  
ou Gauss-Jordan.

2. Par factorisation  
triangulaire.

Remarque :

Pour la factorisation, utiliser  
la propriété suivante :

$$(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$$

appliqué à la décomposition

$$A = L . U$$

on en déduit

$$A^{-1} = U^{-1} . L^{-1}$$

$U^{-1}$  et  $L^{-1}$  se trouvent  
rapidement par substitution  
avant et arrière.

## Résolution de systèmes linéaires par l'inverse

Si on veut résoudre  
 $A x = b$   
on multiplie de chaque côté  
par l'inverse  $A^{-1}$

$$A^{-1} A x = A^{-1} b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1} b$$

Exemple : Résoudre par  
l'inverse le système

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

L'inverse de la matrice est

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

La solution est donc :

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Méthode avantageuse  
seulement si:

1. Il y a beaucoup de  
systèmes  
à résoudre avec la même  
matrice

$$A x_i = b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

2. La matrice est pleine  
(elle ne comporte que peu de  
0), car  
l'inversion détruit le profil.

Note: Seules les matrices  
non singulières sont  
inversibles.

## Propriétés équivalentes d'une matrice non singulière

Soit  $A$  une matrice  $N \times N$ ,  
les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La matrice est non singulière.
2. La matrice est inversible.
3. Le système a une solution unique.
4. Aucun pivot nul lors de l'élimination de Gauss avec pivotage partiel.
5.  $\text{Rang}(A) = N$ .
6. Les rangées sont linéairement indépendantes.
7. Les colonnes sont linéairement indépendantes.
8.  $\det(A) \neq 0$ .

## Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur  $v$  est nombre réel noté  $\|v\|$  tel que:

1.  $\|v\| \geq 0$
2.  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3.  $\|k v\| = |k| \|v\|$   
pour tout scalaire  $k$  et tout vecteur  $v$
4.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$   
pour tous vecteurs  $v$  et  $w$
5.  $\|v \cdot w\| \leq \|v\| \cdot \|w\|$   
pour tous vecteurs  $v$  et  $w$

Pour un vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^n$

Norme euclidienne (longueur)

$$\|v\|_e = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

Autre façon de définir une norme:

Les normes  $p$  sont de la forme

$$\|v\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ainsi  $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \|v\|_e$$

## Exemple

Calculer les normes  
pour  $p=1, 2$   
et la norme infinie  
pour le vecteur

$$x = (1.25, 0.02, -5.15, 0)$$

$$\|x\|_1 = 6.42$$

$$\|x\|_2 = 5.2996$$

$$\|x\|_\infty = 5.15$$

## Norme d'une Matrice

$\| A \|$  avec

1.  $\| A \| \geq 0$
2.  $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
3.  $\| k A \| = |k| \| A \|$   
pour tout scalaire  $k$  et toute matrice  $A$ .
4.  $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$   
pour toutes matrices  $A$  et  $B$
5.  $\| A B \| \leq \| A \| \| B \|$   
pour toutes matrices  $A$  et  $B$

### Théorème:

Si  $\| \cdot \|$  est une norme vectorielle  
alors

$$\| A \| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

est une norme matricielle

On dit que c'est une norme matricielle naturelle  
associée à la norme vectorielle.

Pour une matrice  $A$  d'ordre  $n$ , les normes 1 et infinie sont de la forme :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

La norme matricielle 2,  $\|A\|_2$ , associée à la norme vectorielle 2 n'est pas facile à calculer car elle dépend des valeurs propres de la matrice  $A$ .

$\|A\|_2$  est la plus petite des normes de  $A$ . Elle est donc la plus précise des mesures de norme de  $A$ .

$\|A\|_2$  est aussi appelé la norme spectrale. (rarement utilisée à cause de sa complexité de calcul)

On peut définir aussi la norme euclidienne pour une matrice par extension de la norme euclidienne d'un vecteur:

$$\|A\|_e = \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

1.

Soit  $x$  un vecteur colonne de  $n$  éléments tel que

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1$$

$Ax$  est donc aussi un vecteur colonne de  $n$  éléments.

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq n} |(Ax)_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_{\infty} \end{aligned}$$

or  $\|x\|_{\infty} = 1$

$$\|A\|_{\infty} = \|Ax\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

2.

Si  $p$  est un entier,  $1 \leq p \leq n$ , tel que

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{pj} \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Choisissons  $x$  tel que:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{pj} \geq 0 \\ -1, & \text{si } a_{pj} \leq 0 \end{cases}$$

$$\|x\|_\infty = 1 \text{ et } a_{pj}x_j = |a_{pj}| \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

on a donc

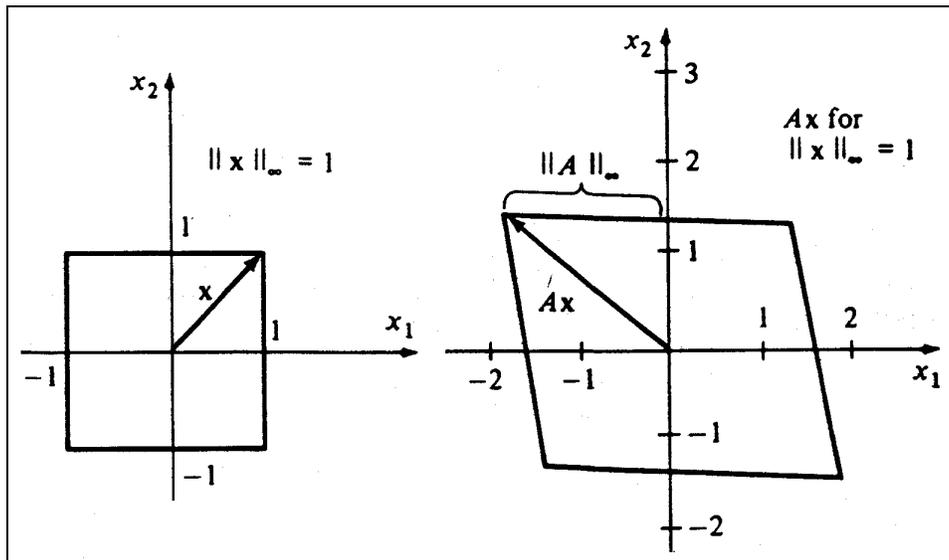
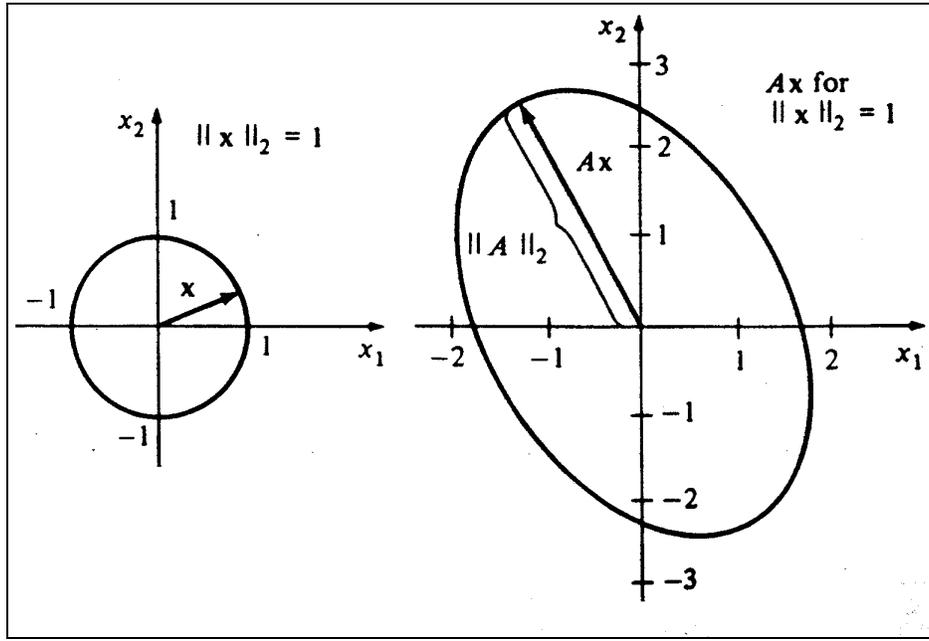
$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

3.

les résultats de 1 et 2 donnent:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Une illustration, pour  $n = 2$ , des normes infinie et 2 est:



Exemple :

Calculer ces 3 normes pour la  
matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 16$$

$$\|A\|_e = 15$$

$$\|A\|_\infty = 17$$

$$\|A\|_2 = 12.03$$

Remarque

Utilités des normes:

Les normes servent à borner les erreurs commises lors de la solution de systèmes linéaires et à mesurer la convergences des méthodes itératives.

## Compatibilité des normes:

Une norme matricielle est compatible avec une norme vectorielle si:

pour tout vecteur  $x$  et toute matrice  $A$  l'inégalité suivante est respectée:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Pour une matrice  $A$  d'ordre  $n$ , la norme euclidienne est de la forme

$$\|A\|_e = \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

Les deux normes du maximum sont compatibles avec les normes  $p$  vectorielles correspondantes. Mais pas la norme euclidienne.

## Remarques sur les normes

1. La norme de I est toujours  $\geq 1$ :

$$\|A\| \leq \|IA\| \leq \|I\| \|A\|$$

donc  $\|I\| \geq 1$ .

2. La norme de  $A^{-1}$  est toujours supérieure ou égale

à

l'inverse de la norme de A:

$$1 \leq \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

donc

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$$

## Conditionnement

Un système linéaire est mal conditionné lorsque certaines équations sont quasi redondantes.

Conséquence:

erreurs d'arrondi  
dues à des soustractions  
entre nombres quasi égaux.

Exemple

$$2.1 x_1 + 3.1 x_2 = 5.2$$

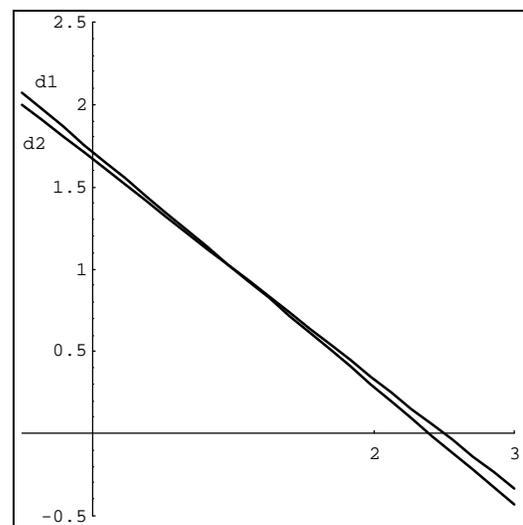
$$2 x_1 + 3 x_2 = 5$$

On dit que la matrice

$$\begin{bmatrix} 2.1 & 3.1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

est mal conditionnée.

On représente sur la figure les droites correspondant aux deux équations.



## Nombre de condition

Notation

Nombre de condition =  $\text{cond}(A)$

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

A est bien conditionnée

$\Leftrightarrow$

$$\text{cond}(A) \approx 1.$$

Remarques:

1. Le nombre de condition dépend du type de norme matricielle qu'on utilise.

2.  $\text{cond}(A) \geq 1$  toujours.

Exemple précédent

$$A = \begin{bmatrix} 2.1 & 3.1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & -31 \\ -20 & 21 \end{bmatrix}$$

Calculer le nombre de condition en utilisant les normes :

$\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_\infty$  et  $\| \cdot \|_e$

Réponses : 317.2, 317.2 et 270.2

## **Théorèmes relatifs au conditionnement**

Soit un système linéaire  $A x = b$

Comment les erreurs sur  $A$  et/ou sur  $b$   
sont amplifiées pour  $x$  ?

nombre de conditionnement.

---

Soit un système linéaire  $A x = b$

### Théorème no.1 :

$x^*$  = approximation de  $x$

résidu  $r = b - A x^*$

alors:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Signification:

Si  $\text{cond}(A)$  est petit,  $r$  mesure bien la précision relative de  $x$  .

### Corollaire au théorème 1 :

$b^*$  = approximation de  $b$   
 $x^*$  = solution de  $A x^* = b^*$

alors :

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|}$$

Signification:

Le conditionnement amplifie l'effet des erreurs dans  $b$ .

### Théorème no.2:

$A^*$  = approximation de  $A$   
 $x^*$  = solution de  $A^* x^* = b$

alors :

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|}$$

Signification:

Le conditionnement amplifie l'effet des erreurs dans  $A$ .

Démonstration théorème 1 :

$$r = b - A x^* = A x - A x^* = A (x - x^*) = A e$$

$$\text{donc } e = A^{-1} r$$

Si nous considérons des normes compatibles, nous avons :

$$\| e \| \leq \| A^{-1} \| \| r \|$$

or, à partir de  $r = A e$ , nous avons  $\| r \| \leq \| A \| \| e \|^2$

$$\frac{\| r \|}{\| A \|} \leq \| e \| \leq \| A^{-1} \| \| r \|^2$$

En appliquant le même raisonnement sur  $A x = b$  et  $x = A^{-1} b$ , nous avons :

$$\frac{\| b \|}{\| A \|} \leq \| x \| \leq \| A^{-1} \| \| b \|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\| A^{-1} \| \| b \|} \leq \frac{1}{\| x \|} \leq \frac{\| A \|}{\| b \|}$$

$$\frac{1}{\| A \| \| A^{-1} \| \| b \|} \leq \frac{\| r \|}{\| x \|} \leq \| A \| \| A^{-1} \| \frac{\| r \|}{\| b \|}$$

$\frac{1}{\text{cond}(A) \  b \ } \leq \frac{\  x^* - x \ }{\  x \ } \leq \text{cond}(A) \frac{\  r \ }{\  b \ }$
---

## Démonstration théorème 2 :

En utilisant  $A x = b$  et  $A^* x^* = b$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}x &= A^{-1} b = A^{-1} (A^* x^*) = A^{-1} (A + A^* - A) x^* \\&= [I + A^{-1} (A^* - A)] x^* \\&= x^* + A^{-1} (A^* - A) x^*\end{aligned}$$

$$x - x^* = A^{-1} (A^* - A) x^*$$

Si nous considérons des normes compatibles, nous avons :

$$\|x - x^*\| \leq \|A^{-1}\| \|A - A^*\| \|x^*\| = \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|} \|x^*\|$$

et donc

$$\boxed{\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|}}$$

## Perturbation sur un système

soit le système

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Il a pour solution :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'inverse de A est :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

La norme infinie de A est :  $\| A \|_{\infty} = 33$

La norme infinie de  $A^{-1}$  est :  $\| A^{-1} \|_{\infty} = 136$

Le conditionnement de A en norme infinie est

$$\text{Cond} ( A )_{\infty} = 33 \times 136 = 4488$$

La matrice est donc très mal conditionnée.

S'il y a des erreurs sur  $b$  :

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons la solution :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{bmatrix}$$

$$\|b^* - b\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.1$$

$$\frac{\|b^* - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{0.1}{33} = 0.00303$$

$$\|u^* - u\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 8.2 \\ -13.6 \\ 3.5 \\ -2.1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 13.6$$

$$\frac{\|u^* - u\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \frac{13.6}{1} = 13.6$$

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|}$$

S'il y a des erreurs sur A :

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7 & 5.01 & 6 & 5.02 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9.1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons la solution :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.33 \\ 8.02 \\ -0.73 \\ 2.09 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A^* - A\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7 & 5.01 & 6 & 5.02 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9.1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & .01 & 0 & .02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.3 \end{aligned}$$

$$\|u^* - u\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -3.33 \\ 8.02 \\ -0.73 \\ 2.09 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -4.33 \\ 7.02 \\ -1.73 \\ 1.09 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 7.02$$

$$\frac{7.02}{8.02} \leq 4488 \frac{0.3}{33} = 40.8$$

$$\boxed{\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|}}$$

## Amélioration itérative.

Solution approchée  $x^* = x$   
pour le problème  $A x = b$ .  
 $\text{Cond}(A)$  raisonnable.

3 étapes pour l'améliorer:

1. calculer  $r = b - A x^*$  en double précision.
2. résoudre  $A e = r$  (rapide).
3. poser  $x \approx x^* + e$ .

Exemple :

Nous voulons résoudre

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

par l'inverse, mais cet inverse  
est entaché d'erreurs :

$$(A^{-1})^* = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.25 \\ -0.25 & 0.55 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.375 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons

$$x^* = (A^{-1})^* b = \begin{bmatrix} 1.15 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} -1.10 \\ -1.05 \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} -0.1775 \\ -0.3025 \end{bmatrix}$$

Avec un raffinement itératif,  
nous trouvons :

$$x = x^* + e = \begin{bmatrix} 0.9725 \\ 0.9475 \end{bmatrix}$$

Remarques:

1. On peut effectuer plusieurs  
étapes d'amélioration d'erreur.  
dans l'exemple, un second  
raffinement conduit à

$$x = \begin{bmatrix} 1.005 \\ 1.011 \end{bmatrix}$$

2. Cette technique fonctionne  
bien lorsque  $\text{cond}(A)$  n'est  
pas trop grand  
(voir Théorème no.1)

3. L'amélioration itérative  
est équivalente  
à une méthode de point fixe.  
 $x^{n+1} = G(x^n)$

# Méthodes itératives

## 1. Jacobi :

Soit le système

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

$$2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12$$

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$

Nous pouvons réarranger le système :

$$x_1 = 1.000 - 0.125x_2 + 0.125x_3$$

$$x_2 = 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3$$

$$x_3 = 1.333 - 0.222x_1 - 0.111x_2$$

Estimations successives de la solution : (méthode de Jacobi)

	1 <sup>ère</sup>	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>	4 <sup>ème</sup>	5 <sup>ème</sup>	6 <sup>ème</sup>	7 <sup>ème</sup>	8 <sup>ème</sup>
$x_1$	0	1.000	1.095	0.995	0.993	1.002	1.001	1.000
$x_2$	0	0.571	1.095	1.026	0.990	0.998	1.001	1.000
$x_3$	0	1.333	1.048	0.969	1.000	1.004	1.001	1.000

C'est la même méthode que la méthode appliquée à une simple équation mais appliquée à un ensemble d'équations.

Nous pouvons réécrire le système sous la forme :

$$x^{n+1} = G(x^n) = b' - B x^n$$

Point fixe

Où  $x^{n+1}$  et  $x^n$  sont les  $n^{\text{ième}}$  et  $(n+1)^{\text{ième}}$  itérés du vecteur  $x$ .

$G$  est une transformation linéaire plutôt qu'une fonction non linéaire

Considérons la notation matricielle du système

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Posons  $A = L + D + U$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A x = (L + D + U) x = b$$

$$\Leftrightarrow$$

$$D x = - (L + U) x + b$$

$$x = - D^{-1} (L + U) x + D^{-1} b$$

$$x^{n+1} = - D^{-1} (L + U) x^n + D^{-1} b$$

$$x^{n+1} = G(x^n)$$

Exemple (suite)

$$b' = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.571 \\ 1.333 \end{bmatrix}, B = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & .124 & -.125 \\ -.143 & 0 & -.286 \\ .222 & .111 & 0 \end{bmatrix}$$

La Méthode que nous venons de décrire est la méthode de Jacobi, ou méthode des déplacements simultanés.

### Algorithme de la méthode de Jacobi

Pour résoudre un système linéaire de  $N$  équations, réarranger les lignes pour que chaque élément de la diagonale soit le plus grand des éléments de sa ligne.

Soit  $A x = b$  ce réarrangement.

En partant d'une solution initiale  $x^{(1)}$ , chaque élément du vecteur  $x^{(n+1)}$  est donné par :

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} \quad n = 1, 2, \dots$$

Une condition suffisante de convergence est

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Si cette condition est vérifiée, alors  $x^{(n)}$  va converger vers la solution quelque soit le vecteur initial  $x^{(0)}$ .

## 2.Gauss-Seidel :

$$A x = ( L + D + U ) x = b$$

$$( L + D ) x = - U x + b$$

Nous avons le processus itératif :

$$x^{(n+1)} = - D^{-1} L x^{(n+1)} - D^{-1} U x^{(n)} + D^{-1} b$$

Estimations successives de la solution :  
(méthode de Gauss-Seidel)

	1 <sup>ière</sup>	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>	4 <sup>ème</sup>	5 <sup>ème</sup>	6 <sup>ème</sup>
$x_1$	0	1.000	1.041	0.997	1.001	1.000
$x_2$	0	0.714	1.014	0.996	1.000	1.000
$x_3$	0	1.032	0.990	1.002	1.000	1.000

Exemple :

$$x_1^{(n+1)} = 1.000 - 0.125x_2^{(n)} + 0.125x_3^{(n)}$$

$$x_2^{(n+1)} = 0.571 + 0.143x_1^{(n+1)} + 0.286x_3^{(n)}$$

$$x_3^{(n+1)} = 1.333 - 0.222x_1^{(n+1)} - 0.111x_2^{(n+1)}$$

en commençant avec  $x_1 = (0,0,0)^T$ .

## Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel

Pour résoudre un système linéaire de  $N$  équations, réarranger les lignes pour que chaque élément de la diagonale soit le plus grand des éléments de sa *ligne*.

Soit  $Ax = b$  ce réarrangement.

En partant d'une solution initiale  $x^{(1)}$ , chaque élément du vecteur  $x^{(n+1)}$  est donné par :

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} \quad n = 1, 2, \dots$$

Une condition suffisante de convergence est

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Si cette condition est vérifiée, alors  $x^{(n)}$  va converger vers la solution quelque soit le vecteur initial  $x^{(0)}$ .

## 2. Relaxation :

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \frac{w}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^{(n)} \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

La convergence ne se produit habituellement que pour  $0 < w < 2$ .

Note :

Si  $w < 1$ , on parle de sousrelaxation.

Si  $w = 1$ , c'est la méthode de Gauss Seidel.

Si  $w > 1$ , on parle de surrelaxation.

Exemple :

Étude de la convergence pour différentes valeurs de  $w$  avec le système :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution est  $x = (-1, -1, -1, -1)^T$ .

$$x^{(1)} = (0, 0, 0, 0)^T.$$

w	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
nb	25	18	13	11	14	18	24	35	55	100

nb le nombre d'itérations pour avoir une erreur inférieure à  $10^{-5}$

# Ift 2421

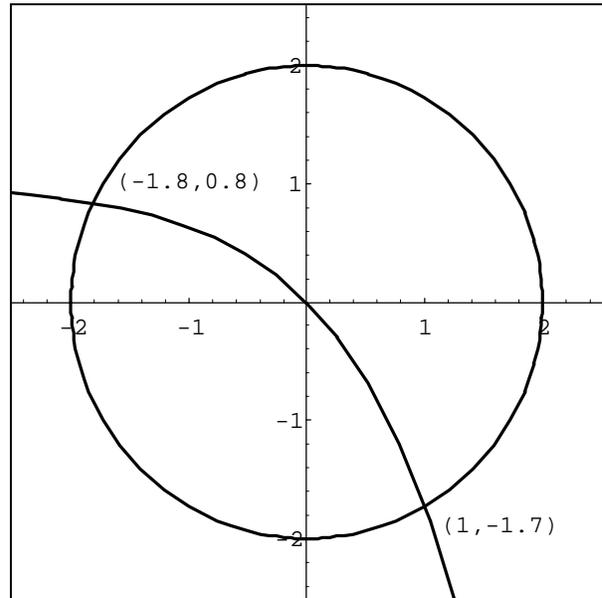
## Chapitre 3

### Résolution des systèmes d'équations non linéaires

## Exemple de système non linéaire

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$e^x + y = 1$$



### Méthodes de résolution:

#### 1. Point fixe (à plusieurs variables)

$$x^{(n+1)} = G(x^{(n)})$$

avec  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

#### 2. Newton (à plusieurs variables)

a.  $x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F'(x^{(n)})]^{-1} F(x^{(n)})$

avec  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

b. Différence finie pour approcher la différentielle (type sécante).

# Méthode du point fixe à plusieurs variables

Exemple :

1. Prendre un réarrangement du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ e^x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{4 - y^2} \\ 1 - e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(x, y) \\ G_2(x, y) \end{bmatrix}$$

2. Convergence si :

$$\left| \frac{\partial G_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial G_2}{\partial x} \right| < 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial G_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial G_2}{\partial y} \right| < 1$$

3. Algorithme :  $x^{(0)}$  donné et itérations

Avec  $x^{(0)} = (-2, 1)^T$ , nous avons :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (-1.73205, 0.86447)^T, \\ x^{(2)} &= (-1.80343, 0.82308)^T, \\ x^{(3)} &= (-1.82278, 0.83527)^T, \\ x^{(4)} &= (-1.81723, 0.83843)^T, \\ x^{(5)} &= (-1.81578, 0.83753)^T, \\ x^{(6)} &= (-1.81619, 0.83729)^T, \end{aligned}$$

## Méthode de Newton à plusieurs variables

a.

$$1. F(x) = 0$$

Prendre un réarrangement du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ e^x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ e^x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Calcul de

$$F' = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & -2y \\ -e^x & -1 \end{bmatrix}$$

3. Algorithme :  $x^{(0)}$  donné et itérations

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F'(x^{(n)})]^{-1} F(x^{(n)})$$

Note : L'opération  $[F'(x^{(n)})]^{-1} F(x^{(n)})$  consiste à résoudre un système linéaire 2x2 à chaque itération. (coûteux)

Avec  $x^{(0)} = (-2, 1)^T$ , nous avons :

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.1353 \end{bmatrix} \text{ et } F'(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -0.1353 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.1708 \\ 0.1584 \end{bmatrix} \text{ et } x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.8292 \\ 0.8416 \end{bmatrix}$$

## b. Méthode de différences finies pour évaluer la différentielle

1. Il faut choisir un petit paramètre delta de perturbation.

2. Les dérivées partielles sont approchées par

$$\frac{\partial G_i}{\partial x} \approx \frac{1}{d_x} [G_i(x + d_x, y) - G_i(x, y)]$$

et

$$\frac{\partial G_i}{\partial y} \approx \frac{1}{d_y} [G_i(x, y + d_y) - G_i(x, y)]$$

3. Les itérés se font comme dans la méthode de Newton à plusieurs variables.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ &= \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \end{aligned}$$

Note :

Parfois, la matrice inverse des dérivées partielles n'est pas évaluée à chaque itération ; mais plutôt à toutes les n itérations.