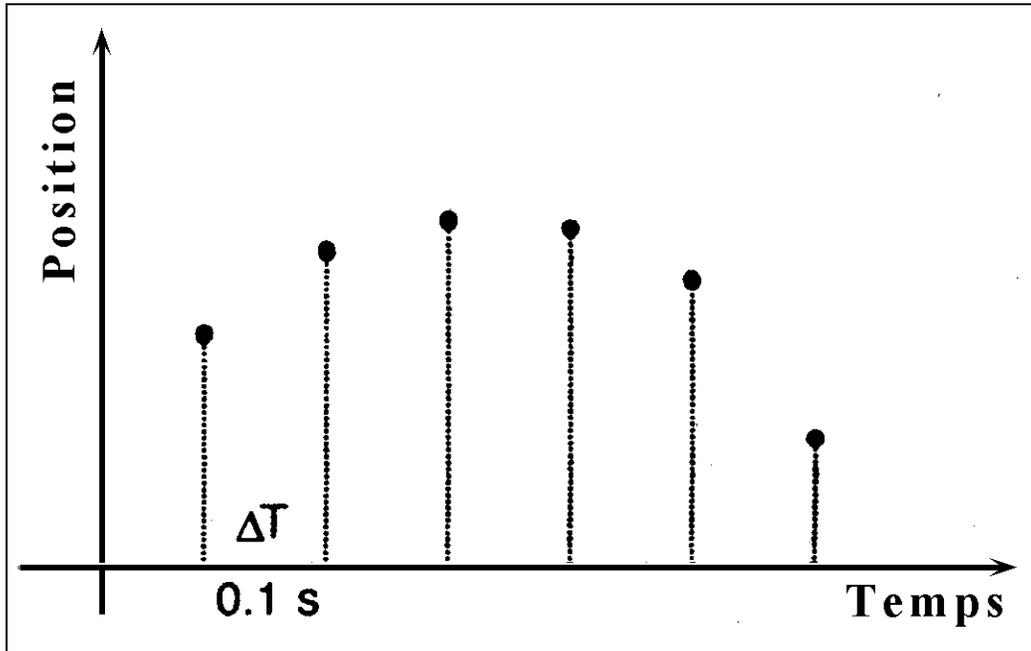


# Ift 2421

## Chapitre 5

### Dérivation numérique

# Introduction



## Dérivation et intégration numériques

Déterminer avec précision :

1. La vitesse à chaque instant
2. L'accélération de la fusée
3. La consommation de carburant

Évaluer les dérivées premières et secondes ainsi que l'intégrale de cette fonction.

# Principe général de dérivation et d'intégration numériques

Si

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

alors

$$f'(x) = P_n'(x) + E_n'(x)$$

$$f''(x) = P_n''(x) + E_n''(x)$$

etc...

et aussi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx$$

Bonne estimation de la fonction

⇒ Bonnes estimations de ses dérivées  
et de son intégrale.

## Dérivation du polynôme de Newton Grégory

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 + \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

Dériver le polynôme :

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(x)}{dx} &= \frac{dP_n(x)}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{dP_n(x)}{ds} \frac{1}{h} && \text{car } x = x_0 + sh \\ &= \frac{1}{h} \frac{d}{ds} \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \right\} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^n \frac{d}{ds} \left\{ \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left[ \begin{array}{c} \Delta f_0 + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f_0 + \\ \frac{1}{6}[(s-1)(s-2) + s(s-2) + s(s-1)]\Delta^3 f_0 + \dots \end{array} \right] \end{aligned}$$

Dérivée de l'erreur :

$$\begin{aligned} \frac{dE_n(x_0)}{dx} &= \frac{1}{h} \frac{d}{ds} \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\mathbf{x}) \\ &+ \binom{s}{n+1} h^{n+1} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Note : le terme  $f^{(n+1)}(\xi)$  dépend de  $x$ .

## Dérivation du polynôme de Newton Grégory

Pour  $s = 0, 1, \dots, n$   
les formules se simplifient.

Pour ( $s = 0$ ) :

$$P'_n(x_0) = \frac{1}{h} \left[ \begin{aligned} &\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f_0 + \\ &\frac{1}{6}[(s-1)(s-2) + s(s-2) + s(s-1)]\Delta^3 f_0 + \dots \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{h} \left[ \begin{aligned} &\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \dots \\ &-\frac{(-1)^n}{n}\Delta^n f_0 \end{aligned} \right]$$

et le terme d'erreur est :

$$\frac{dE_n(x_0)}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{ds} \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\mathbf{x})$$

$$+ \binom{s}{n+1} h^{n+1} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\mathbf{x})$$

$$E'_n(x_0) = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{terme qui est en } O(h^n)$$



## Dérivation du polynôme de Newton Grégory

Pour  $s = 0, 1, \dots, n$   
les formules se simplifient.

Cas particulier ( $s = 1$ , polynôme de degré 2) :

$$P_2'(x_1) = \frac{1}{h} \left( \Delta f_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 \right)$$

et le terme d'erreur est :

$$E_n'(x_1) = \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \quad \text{terme qui est en } O(h^2)$$

Simplification :

$$f'(x_1) \approx P_2'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

Après translation d'indice :

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \quad \text{Formule centrée}$$

## Formules de calcul des dérivées

Dérivée première :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \quad (\text{différences centrées})$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4) \quad (\text{différences centrées})$$

Dérivée seconde :

$$f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{différences centrées})$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \quad (\text{différences centrées})$$

$$\text{Dérivées d'ordre supérieur : } f^n(x_0) = \frac{\Delta^n f_0}{h^n} + O(h)$$

## Instabilité de la différentiation numérique (propagation des erreurs)

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$h \rightarrow 0$  alors erreur  $\rightarrow 0$  et  $f'$  exacte.

Erreurs sur les valeurs de la fonction

$$\begin{aligned} f_{-1} &= f_{-1}^* \pm e_{-1} \\ f_1 &= f_1^* \pm e_1 \end{aligned}$$

alors

$$f'(x_0) = \frac{f_1^* - f_{-1}^*}{2h} \pm \frac{e_1 + e_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

Si le pas  $h$  est trop réduit  $\Rightarrow$   
Beaucoup d'erreur d'arrondi

$\therefore$  La dérivation est un processus instable  
(soustraction entre termes voisins)

Calculs en double précision ?

Utile si  $e$  est une erreur machine (arrondi ou troncature).  
Inutile si  $e$  est une erreur sur les données.

## Utilisation des séries de Taylor (pour reconstruire les formules de dérivation)

au voisinage de  $x = x_0$ , nous avons :

$$x_1 = x_0 + h \quad f(x_1) = f_1 = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \dots$$

$$x_{-1} = x_0 - h \quad f(x_{-1}) = f_{-1} = f_0 - h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' - \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \dots$$

Reconstruire la formule  $f_0'$  :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

Soustraire les deux séries :

$$f_1 - f_{-1} = 2h f_0' + \frac{h^3}{3} f_0''' + \frac{h^5}{60} f_0^{v} + \dots$$

Diviser par  $2h$  et isoler  $f_0'$  :

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{h^2}{6} f_0''' + \frac{h^4}{120} f_0^{v} + \dots$$

Note : Série représentant l'erreur = puissances paires de  $h$  seulement.

L'extrapolation de Richardson gagnera 2 ordres.

## Utilisation des séries de Taylor

(pour reconstruire les formules de dérivation)

au voisinage de  $x = x_0$ .

$$x_1 = x_0 + h \quad f(x_1) = f_1 = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \dots$$

$$x_{-1} = x_0 - h \quad f(x_{-1}) = f_{-1} = f_0 - h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' - \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \dots$$

Reconstruire les formules pour  $f_0'$ ,  $f_0''$ , ...

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Avec d'autres expansions :

$$f(x_2) = f_2 = f_0 + 2h f_0' + 2h^2 f_0'' + \frac{4h^3}{3} f_0''' + \frac{2h^4}{3} f_0^{iv} + \dots$$

$$f(x_{-2}) = f_{-2} = f_0 - 2h f_0' + 2h^2 f_0'' - \frac{4h^3}{3} f_0''' + \frac{2h^4}{3} f_0^{iv} + \dots$$

Reconstruire des formules plus complexes :

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4)$$

## Ordre d'une approximation

$f(x)$  est d'ordre  $n$  au voisinage de 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| \leq M$$

Où  $M$  est une constante.

La notation employée est

$$f(x) = O(x^n)$$

Remarque : On devrait plutôt dire  $f(x)$  appartient à  $O(x^n)$ .

Exemple :

$$f(x) = \sin(x)$$

on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = 1$$

$$\text{donc } \sin(x) = O(x).$$

Il faut noter que :

$$\begin{aligned} O(1) &\supseteq O(x) \supseteq O(x^2) \supseteq \dots \\ &\supseteq O(x^n) \supseteq O(x^{n+1}) \supseteq \dots \end{aligned}$$

Remarque :

- On a toujours

$$O(h^n) = c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + \dots$$

- Un terme d'erreur  $O(h^n)$  signifie approximativement que :

Si on divise  $h$  par 2, on divise le terme d'erreur par  $2^n$ .

en effet on a :

$$c_n \left( \frac{h}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} c_n h^n$$

## Extrapolation de Richardson

- Pas = h

$$\begin{aligned}f(x) &= f_1(x) + O(h^n) \\ &= f_1(x) + Kh^n + O(h^{n+1})\end{aligned}$$

- Pas = 2 h

$$\begin{aligned}f(x) &= f_2(x) + O((2h)^n) \\ &= f_2(x) + 2^n Kh^n + O((2h)^{n+1})\end{aligned}$$

Alors

$$f(x) = f_1(x) + \frac{1}{2^n - 1} (f_1(x) - f_2(x)) + O(h^{n+1})$$

### Précision amélioré d'un ordre

Méthode valable pour :

- Interpolation
- Dérivation numérique
- Intégration numérique

## Extrapolation de Richardson

### Démonstration

$$(1) \rightarrow f(x) - f_h(x) = c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + \dots$$

$$(2) \rightarrow f(x) - f_{2h}(x) = c_n (2h)^n + c_{n+1} (2h)^{n+1} + \dots \\ = c_n 2^n h^n +$$

$$2^n * (1) - (2) \Rightarrow$$

$$2^n f(x) - 2^n f_h(x) - f(x) + f_{2h}(x) = O(h^{n+1})$$

$$(2^n - 1)f(x) - (2^n - 1)f_h(x) - f_h(x) + f_{2h}(x) = O(h^{n+1})$$

$$(2^n - 1)\{f(x) - f_h(x)\} = f_h(x) - f_{2h}(x) + O(h^{n+1})$$

$$f(x) - f_h(x) = \frac{1}{2^n - 1} \{f_h(x) - f_{2h}(x)\} + O(h^{n+1})$$

$$f(x) = f_h(x) + \frac{1}{2^n - 1} \{f_h(x) - f_{2h}(x)\} + O(h^{n+1})$$

Exemple :

Dérivée première en  $x = 2.5$   
de

x	f(x)
2.3	0.34718
2.4	0.31729
2.5	0.28587
2.6	0.25337
2.7	0.22008

Différences centrées :

- $h = 0.1$

$$\begin{aligned}f'(2.5) &= (f_1 - f_{-1})/2h + O(h^2) \\ &= (0.25337 - 0.31729)/0.2 + \\ &\quad O(h^2) \\ &= -0.3196 + O(h^2)\end{aligned}$$

- $2h = 0.2$

$$\begin{aligned}f'(2.5) &= (f_2 - f_{-2})/4h + O(4h^2) \\ &= (0.22008 - 0.34718)/0.4 + \\ &\quad O(4h^2) \\ &= -0.3178 + O(4h^2)\end{aligned}$$

---

**Note :**

L'extrapolation de Richardson peut être appliquée plusieurs fois.

$f_h$

$f_{2h}$

$f_{4h}$

---

Technique d'extrapolation

$$\begin{aligned}f'(2.5) &= -0.3196 \\ &+ \{ -0.3196 - (-0.3178) \} / 3 + \\ &\quad O(h^4) \\ &= -0.3203 + O(h^4)\end{aligned}$$

**Amélioration de 2 ordres.**

# Ift 2421

## Chapitre 5

### Intégration numérique

# Intégration numérique

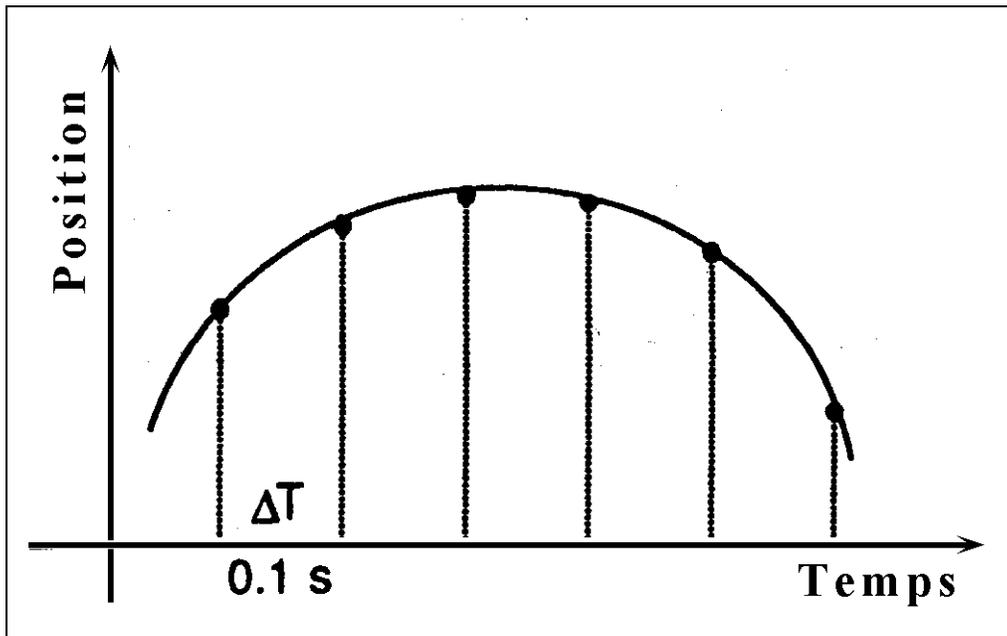
n+1 points de collocation

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array}$$

Approcher l'intégrale de la fonction

$$\int_a^b f(x) dx$$

Surface sous la courbe entre a et b



## Intégration numérique (Quadrature de Newton Cotes)

Polynôme  $P_n(x)$  de Newton Gregory

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array}$$

L'intégrale du polynôme et de l'erreur est :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx$$

**Quadrature simple du trapèze**  
 (formule de Newton Cotes pour  $n = 1$ )  
 Polynôme  $P_n(x)$  de degré 1

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = h \int_0^1 P_1(s) ds$$

Formule d'erreur :

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = h \left[ sf_0 + \frac{s^2}{2} \Delta f_0 \right]_{s=0}^{s=1}$$

$$= h \left[ f_0 + \frac{f_1 - f_0}{2} \right]$$

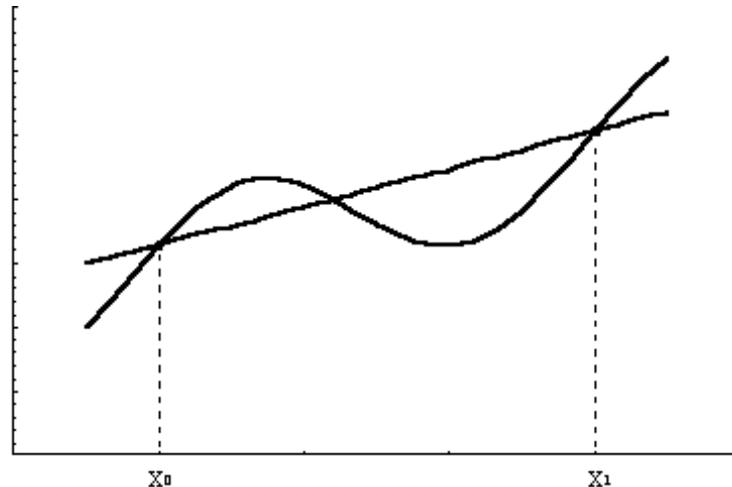
$$\int_{x_0}^{x_1} E_1(x) dx = h^3 f''(\mathbf{x}_1) \int_0^1 \binom{s}{2} ds$$

$$= h^3 f''(\mathbf{x}_1) \int_0^1 \frac{s(s-1)}{2} ds$$

$$= h^3 f''(\mathbf{x}_1) \left( -\frac{1}{12} \right)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = \frac{h}{2} [f_0 + f_1]$$

**Surface sous le trapèze.**



## Méthode de Simpson 1/3 (quadrature simple)

Polynôme  $P_n(x)$  de degré 2

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = h \int_0^2 P_2(s) ds$$

$$= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

Formule d'erreur :

Remarque :

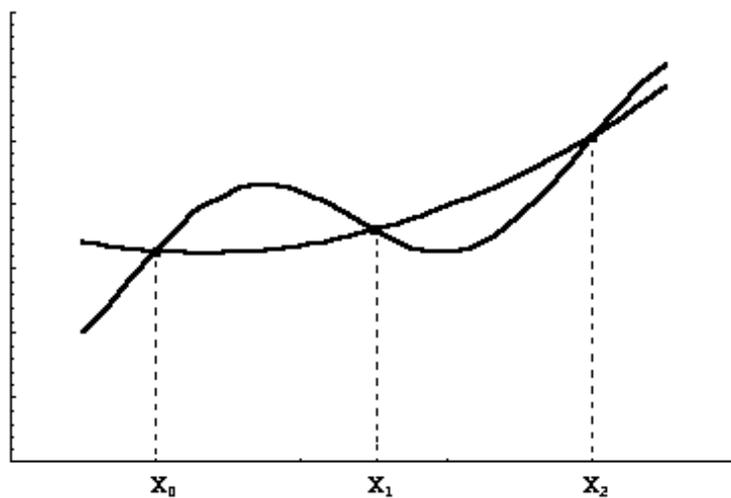
$$\int_0^2 \binom{s}{3} ds = 0$$

Nous gagnons alors un ordre pour l'erreur

$$\int_{x_0}^{x_2} E_2(x) dx = h^5 f^{iv}(\xi_1) \int_0^2 \binom{s}{4} ds$$

$$= h^5 f^{iv}(\xi_1) \left( -\frac{1}{90} \right)$$

**Surface sous la parabole.**



## Méthode de Simpson 3/8 (quadrature simple)

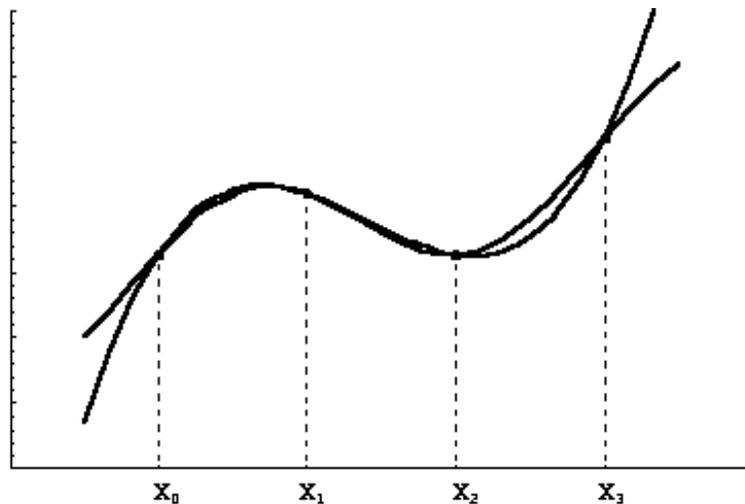
Polynôme  $P_n(x)$  de degré 3

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x) dx = h \int_0^3 P_3(s) ds$$

Formule d'erreur :

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{8} h [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] & \int_{x_0}^{x_3} E_3(x) dx &= h^5 f^{iv}(\xi_1) \int_0^3 \binom{s}{4} ds \\ & & &= h^5 f^{iv}(\xi_1) \left( -\frac{3}{80} \right) \end{aligned}$$

Pas de gain en pratique.



Exemple :

$x$	$f(x) = x^3$
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216

Règle du trapèze

$$(n = 1) \quad h = 6$$

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x) dx &\approx \frac{6}{2}(f_0 + f_6) \\ &= \frac{6}{2}(0 + 216) \\ &= 648\end{aligned}$$

Calculer

$$\int_0^6 f(x) dx$$

---

Simpson 1/3

$$(n = 2) \quad h = 3$$

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x) dx &\approx \frac{3}{3}(f_0 + 4f_3 + f_6) \\ &= \frac{3}{3}(0 + 4 * 27 + 216) \\ &= 324\end{aligned}$$

Simpson 3/8

$$(n = 3) \quad h = 2$$

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x) dx &\approx \frac{3 * 2}{8}(f_0 + 3f_2 + 3f_4 + f_6) \\ &= \frac{3}{4}(0 + 3 * 8 + 3 * 64 + 216) \\ &= 324\end{aligned}$$

Note :

$$\int_0^6 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^6$$

Remarque :

Assuré d'avoir la bonne réponse car  $P_3(x)$

# Quadratures Simples

Résumé :

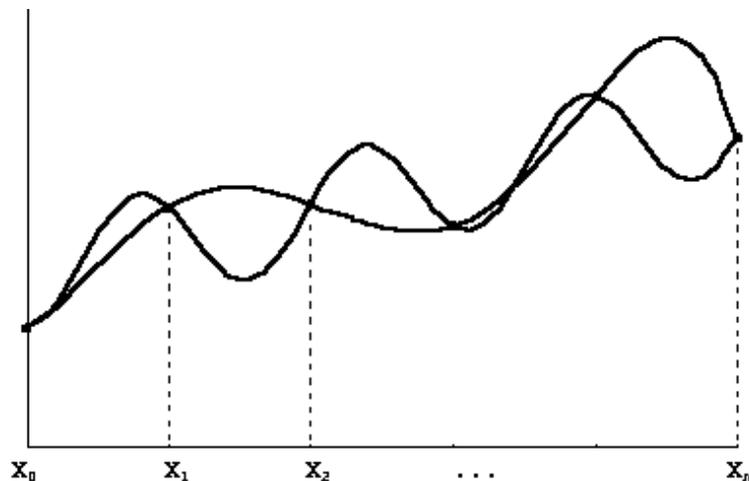
- **La règle du trapèze** ( $n=1$ )  
Terme d'erreur d'ordre 3

Intègre exactement un polynôme de degré un  
puisque  $f''(\xi_1) = 0$  dans ce cas.

- **Les règles de Simpson** (1/3 et 3/8)  
donnent un terme d'erreur d'ordre 5

Intègrent exactement un polynôme de degré 3  
puisque  $f^{iv}(\xi_1) = 0$  dans ce cas.

**Problèmes :**



# Quadratures composites

2 étapes :

1. Construction d'une succession de polynômes de Newton Grégory mis bout à bout.
2. Addition des surfaces sous chacun des polynômes de la représentation

Construction par morceaux  
**chaque morceau = quadrature simple**

Nous parlons alors de quadratures composites.

## Quadrature composite du trapèze

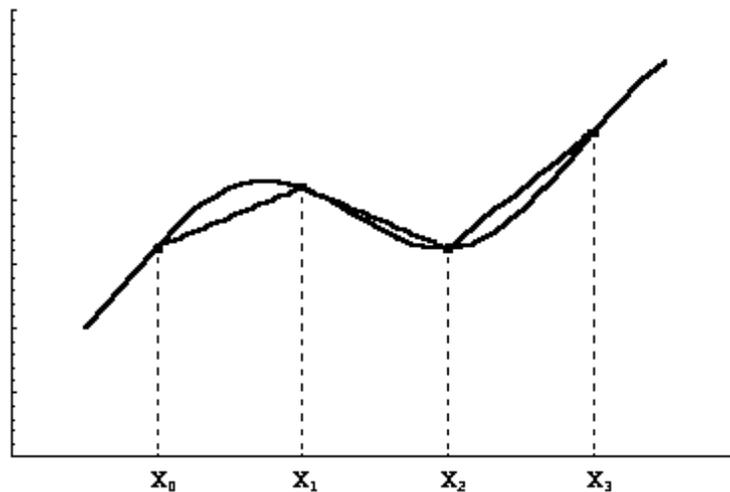
L'aire de chaque trapèze est :

$$T_i = \frac{h}{2}(f_i + f_{i-1}) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

$h$  est constant = les intervalles sont égaux.

La règle composite du trapèze est :

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f_i + f_{i-1}) \\ &= \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\} \end{aligned}$$



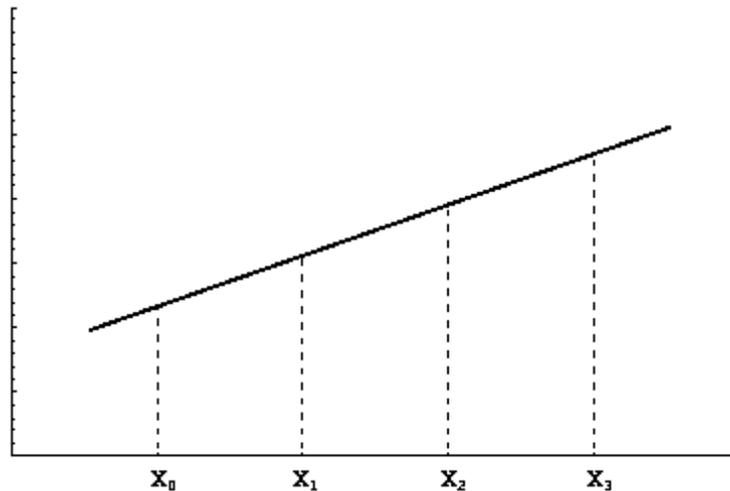
## Erreur sur la quadrature composite du trapèze

L'erreur  $E(f) = I(f) - A(f)$  sur l'intégrale est :

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{-h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \quad \text{avec } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ &= \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \\ &= \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) f''(\xi) \quad \text{avec } x_0 \leq \xi \leq x_n \end{aligned}$$

Remarque :

Si  $f(x)$  est un polynôme de degré 1 alors  $A(f) = I(f)$   
car  $f''(x) = 0$ .

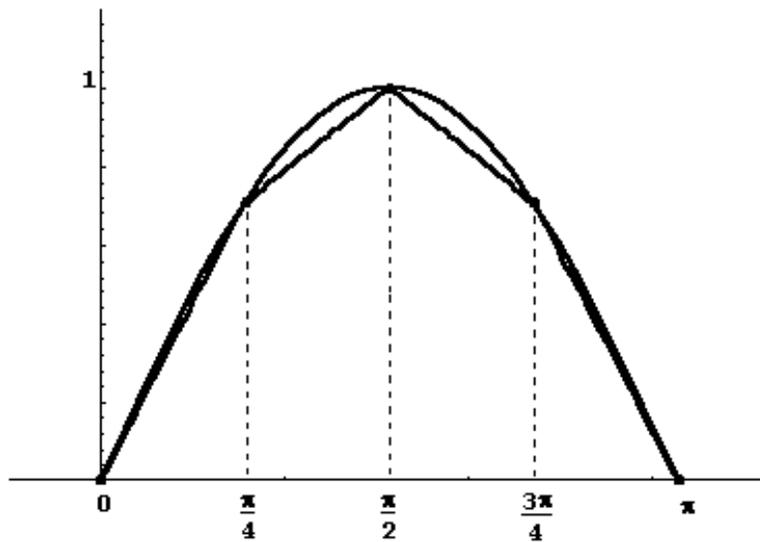


Exemple :

- Approximez  $I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$  avec  $h = \frac{\pi}{4}$

Valeur exacte :  $I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2$

$$A_{h=\frac{\pi}{4}} = h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{1}{2} f_4 \right)$$



$$A_{h=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2}) \approx 1.896$$

$$E = \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) f''(\xi) \quad \text{avec } 0 \leq \xi \leq \pi$$

$$|E| = \frac{\pi^3}{192} |\sin(\xi)| \leq \frac{\pi^3}{192} \approx 0.16149 \quad \text{avec } 0 \leq \xi \leq \pi$$

$$E_{reelle} = I - A_{h=\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2}) \approx 2 - 1.896 \approx 0.1038$$

Exemple (suite) :

Remarque :

Nous pouvons utiliser la formule de l'erreur pour définir la largeur d'un intervalle :

Comment choisir  $h$  pour que l'erreur d'intégration obtenue sur  $I = \int_0^\pi \text{Sin}(x)dx$  par la méthode composite des trapèzes soit plus petite que 0.0005 ?

$$E = \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) f''(\xi) \quad \text{avec } 0 \leq \xi \leq \pi$$

$$|E| = \frac{\pi}{12} h^2 |\text{Sin}(\xi)| \leq \frac{\pi}{12} h^2 \leq 0.0005$$

$\Leftrightarrow$

$$h^2 \leq \frac{12}{\pi} 0.0005$$

$\Leftrightarrow$

$$h \leq 0.044$$

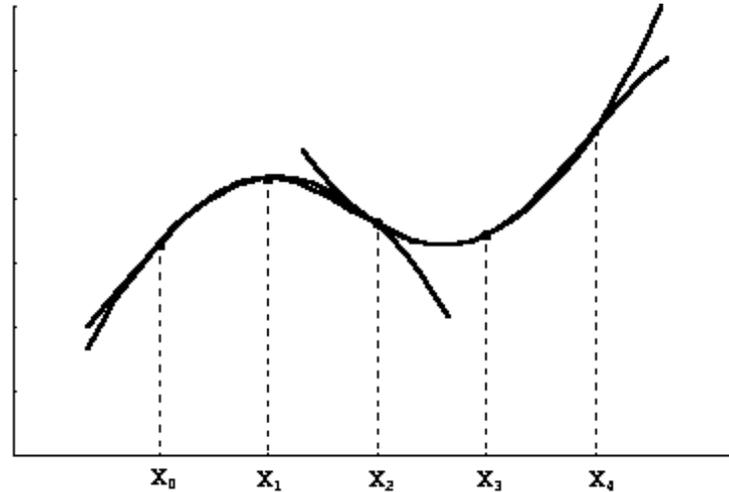
$$n > \frac{\pi}{0.044} \approx 71.8$$

Donc  $n \geq 72$  intervalles.

## Quadrature composite de Simpson 1/3

Nombre pair d'intervalles = nombre impair de points

$$nb = 2m+1$$



Sur chaque paire de sous intervalles,  
la courbe est remplacée par une parabole.

Pour chaque triplet de valeurs :

$$S_i = \frac{h}{3}(f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}) \quad 1 \leq i \leq m$$

La règle composite de Simpson 1/3  
pour trouver l'intégrale  $I(f)$  est :

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx = \sum_{i=1}^m S_i = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^m (f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}) \\ &= \frac{h}{3} \{ f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{n-1} + f_n \} \end{aligned}$$

## Erreur de troncature globale pour Simpson 1/3

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_{n/2}$$

$$E = -\frac{h^5}{90} \left( \frac{f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2) + \dots + f^{iv}(\xi_{n/2})}{n/2} \right) n/2$$

$$E = -\frac{h^5}{180} n f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{180} (b-a) h^4 f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{180} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{iv}(\xi)$$

Remarque :

- Si  $f(x)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 alors  $A = I$ .

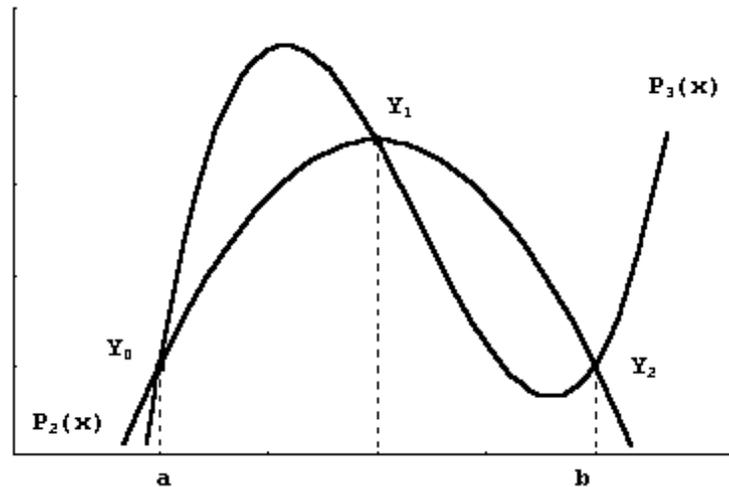
$$E = 0 \text{ car } f^{iv}(\xi) = 0$$

- $E = O(h^4)$

Si nous doublons le nombre de sous intervalles alors l'erreur est coupée par un facteur de  $\approx 16$ .

## Remarque :

3 points



Le polynôme de degré 2,  $P_2(x)$ , est passant par ces 3 points est unique.

Mais, il y a une infinité de polynômes de degré 3, (cubiques  $P_3(x)$ ) passant par 3 points donnés

$$\int_a^b P_2(x) = \int_a^b P_3(x) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

où  $P_3(x)$  est une cubique quelconque

Preuve (exercice)

## Quadrature composite de Simpson 3/8

Sur chaque triplet de sous intervalles,  
la courbe est remplacée par une cubique.

Pour chaque 4uplet de valeurs :

$$S_i = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

La règle composite de Simpson 3/8  
pour trouver l'intégrale I(f) est :

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{3}{8}h\{f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\} \end{aligned}$$

## Erreur de troncature globale pour Simpson 3/8

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_{n/3} \quad (n = 3k)$$

$$E = -\frac{3}{80}h^5 \left( \frac{f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2) + \dots + f^{iv}(\xi_{n/3})}{n/3} \right) n/3$$

$$E = -\frac{h^5}{80}n f^{iv}(\xi) = -\frac{(b-a)}{80}h^4 f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{80} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{iv}(\xi)$$

L'ordre de l'erreur est le même que pour Simpson 1/3 :  $O(h^4)$

## Intégration de Romberg

Méthode qui utilise :

La quadrature composite du trapèze  
et la technique d'extrapolation de Richardson.

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_n + E$$

$$T_n = \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\}$$

$$T_n - I = \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \quad a \leq \xi \leq b$$

$$a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + a_8 h^8 + \dots \quad (*)$$

\* Formule d'Euler Maclaurin  
où les coefficient  $a_j$  sont indépendants de  $h$ .

La méthode de Romberg consiste à appliquer le procédé d'extrapolation de Richardson à la formule d'Euler Maclaurin.

C'est une amélioration de la méthode composite du trapèze.

# Intégration de Romberg

$$n = 2^m$$

## Définition :

$T_{i,n}$  = Valeur de la quadrature composite  
à l'étape  $i$  pour  $n$  sous domaines.

### 1. Première étape :

Calcul des quadratures composites :

$$T_{1,n} = \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\}$$

$$T_{1,\frac{n}{2}} = \frac{2h}{2} \{f_0 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + f_n\}$$

$$T_{1,\frac{n}{4}} = \frac{4h}{2} \{f_0 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-4} + f_n\}$$

$$T_{1,\frac{n}{8}} = \frac{8h}{2} \{f_0 + 2f_8 + \dots + 2f_{n-8} + f_n\}$$

etc...

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx = T_{1,n} + O(h^2) \\
&= T_{1,\frac{n}{2}} + O((2h)^2) \\
&= T_{1,\frac{n}{4}} + O((4h)^2) \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

$T_{1,n}$		
	$T_{2,n/2}$	
$T_{1,n/2}$		$T_{3,n/4}$
	$T_{2,n/4}$	
$T_{1,n/4}$		
$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$

**2. Deuxième étape :**  
1<sup>ère</sup> Extrapolation de Richardson

$$\begin{aligned}
T_{2,\frac{n}{2}} &= T_{1,n} + \frac{1}{2^2 - 1} \left( T_{1,n} - T_{1,\frac{n}{2}} \right) \\
T_{2,\frac{n}{4}} &= T_{1,\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^2 - 1} \left( T_{1,\frac{n}{2}} - T_{1,\frac{n}{4}} \right) \\
T_{2,\frac{n}{8}} &= T_{1,\frac{n}{4}} + \frac{1}{2^2 - 1} \left( T_{1,\frac{n}{4}} - T_{1,\frac{n}{8}} \right) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx = T_{2,\frac{n}{2}} + O(h^4) \\
&= T_{2,\frac{n}{4}} + O((2h)^4) \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

**3. Troisième étape :**  
2<sup>ème</sup> Extrapolation de Richardson

$$\begin{aligned}
T_{3,\frac{n}{4}} &= T_{2,\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^4 - 1} \left( T_{2,\frac{n}{2}} - T_{2,\frac{n}{4}} \right) \\
T_{3,\frac{n}{8}} &= T_{2,\frac{n}{4}} + \frac{1}{2^4 - 1} \left( T_{2,\frac{n}{4}} - T_{2,\frac{n}{8}} \right) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx = T_{3,\frac{n}{4}} + O(h^6) \\
&= T_{3,\frac{n}{8}} + O((2h)^6) \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

Nouvelles itérations possibles

## Intégration de Romberg

Nous avons donc comme formule générale:

$$T_{k+1, \frac{n}{2}} = \frac{1}{4^k - 1} (4^k T_{k,n} - T_{k, n/2})$$

Remarque:

Après la première étape d'extrapolation,  
la méthode de Romberg est donnée  
la méthode de Simpson 1/3.

$$\text{1 intervalle de longueur } 2h \quad T_{1,1} = 2h \left( \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_2 \right)$$

$$\text{2 intervalle de longueur } h \quad T_{1,2} = h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \frac{1}{2} f_2 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{4T_{1,2} - T_{1,1}}{3} &= \frac{h}{3} (2f_0 + 4f_1 + 2f_2 - f_0 - f_2) \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) \end{aligned}$$

Exemple :

Calculer une valeur approchée de I par la méthode de Romberg.  
entre 0.0 et 0.8

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
f(x)	0.000	0.199	0.389	0.565	0.717

Attention :

### 1. Première étape :

Calcul des quadratures composites :

$$n=4 \quad T_{1,4} = \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\}$$

$$T_{1,4} = \frac{0.2}{2} \{0 + 2 * 0.199 + 2 * 0.389 + 2 * 0.565 + 0.717\}$$

$$T_{1,4} = 0.3023$$

$$n=2 \quad T_{1,2} = \frac{2h}{2} \{f_0 + 2f_2 + f_4\}$$

$$T_{1,2} = \frac{2h}{2} \{0 + 2 * 0.389 + 0.717\}$$

$$T_{1,2} = 0.299$$

$$n=1 \quad T_{1,1} = \frac{4h}{2} \{0 + 0.717\}$$

$$T_{1,1} = 0.2868$$

Ordre de l'erreur  $O(h^2)$

## 2. Deuxième étape :

1<sup>ère</sup> Extrapolation de Richardson

$$T_{2,2} = T_{1,4} + \frac{1}{2^2 - 1} (T_{1,4} - T_{1,2})$$

$$T_{2,2} = 0.3023 + \frac{1}{2^2 - 1} (0.3023 - 0.299)$$

$$T_{2,2} = 0.3034$$

$$T_{2,1} = T_{1,2} + \frac{1}{2^2 - 1} (T_{1,2} - T_{1,1})$$

$$T_{2,1} = 0.299 + \frac{1}{2^2 - 1} (0.299 - 0.2868)$$

$$T_{2,1} = 0.303066$$

**Ordre de l'erreur  $O(h^4)$**

## 3. Troisième étape :

2<sup>ème</sup> Extrapolation de Richardson

$$T_{3,1} = T_{2,2} + \frac{1}{2^4 - 1} (T_{2,2} - T_{2,1})$$

$$T_{3,1} = 0.3034 + \frac{1}{2^4 - 1} (0.3034 - 0.303066)$$

$$T_{3,1} = 0.3034222$$

**Ordre de l'erreur  $O(h^6)$**

# Méthode des Quadratures gaussiennes

## Polynôme de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{48}(693x^6 - 945x^4 + 315x^2 - 5)$$

## Racines des polynômes de Legendre

Théorème:

$P_n(x)$  possède  $n$  racines réelles, toutes situées entre  $-1$  et  $1$ .

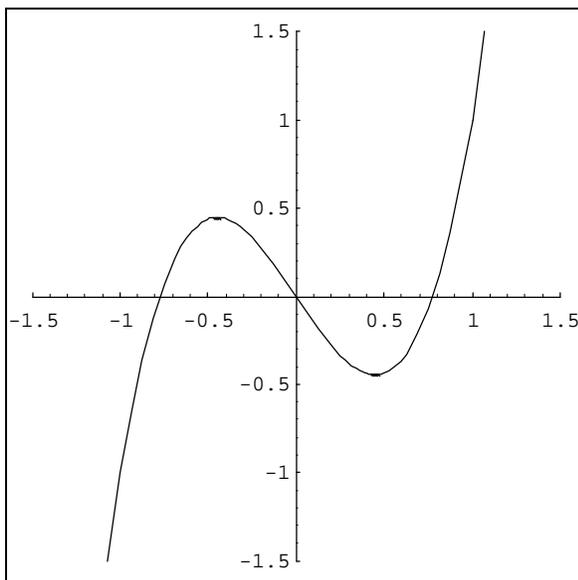
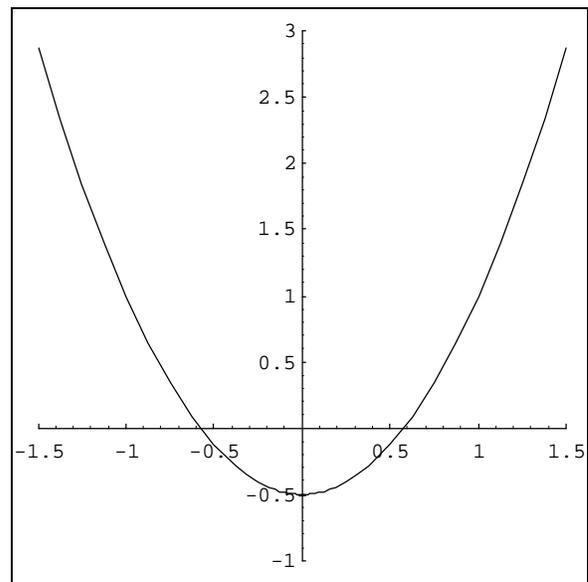
Exemple:

$$n = 1 \quad P_1(x) = x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$$

$$n = 2 \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$n = 3 \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

## Méthode des Quadratures gaussiennes

Théorème :

Si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égale à  $2n-1$ , alors

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i P(t_i)$$

$$\text{où } w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt$$

et

$t_1, t_2, \dots, t_n$  sont les zéros du  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre.

Exemple : Quadrature gaussienne avec 2 termes.

Soit  $P(t)$  un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 3.

$$\text{Posons : } \int_{-1}^1 P(t) dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) \quad n=2$$

Trouvons  $t_1, t_2, \omega_1, \omega_2$  pour que le membre de droite donne la valeur exacte de l'intégrale, quelque soit le polynôme de degré inférieur à 3 considéré.

Soit  $P(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$   $a_0, a_1, a_2, a_3$  quelconque.

$$\int_{-1}^1 (a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0)dt = \omega_1(a_3t_1^3 + a_2t_1^2 + a_1t_1 + a_0) \\ + \omega_2(a_3t_2^3 + a_2t_2^2 + a_1t_2 + a_0)$$

$$a_3(0) + a_2\left(\frac{2}{3}\right) + a_1(0) + a_0(2) = a_3(\omega_1t_1^3 + \omega_2t_2^3) + a_2(\omega_1t_1^2 + \omega_2t_2^2) \\ + a_1(\omega_1t_1 + \omega_2t_2) + a_0(\omega_1 + \omega_2)$$

$$(1) \quad \omega_1t_1^3 + \omega_2t_2^3 = 0$$

$$(2) \quad \omega_1t_1^2 + \omega_2t_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad \omega_1t_1 + \omega_2t_2 = 0$$

$$(4) \quad \omega_1 + \omega_2 = 2$$

$$(1) \quad \omega_1t_1^3 + \omega_2t_2^3 = 0$$

$$(3) * t_1^2 \quad \omega_1t_1^3 + \omega_2t_2t_1^2 = 0$$

$$(1) - (3) * t_1^2 \quad \omega_2t_2(t_2^2 - t_1^2) = 0$$

$$\omega_2 t_2 (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 0$$

$$\omega_2 = 0 \text{ ou } t_2 = 0 \text{ ou } t_2 = t_1 \text{ ou } t_2 = -t_1$$

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Quel que soit le polynôme  $P(t)$  de degré  $\leq 3$ .

## Application :

Soit  $f(t)$  quelconque et (Maclaurin) :

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + R_4$$

$P(t)$  polynôme de degré 3.

$$f(t) = P(t) + R_4$$

$$f(t) \approx P(t)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \int_{-1}^1 P(t)dt = P(t_1) + P(t_2)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx f(t_1) + f(t_2)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

## Quadrature gaussienne avec n termes

Soit  $P(t)$  un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à  $2n-1$ .

$$\text{Posons : } \int_{-1}^1 P(t)dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) + \dots + \omega_n P(t_n)$$

Trouvons  $t_1, t_2, \dots, t_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  pour que le membre de droite donne la valeur exacte de l'intégrale, quelque soit le polynôme de degré inférieur à  $2n-1$  considéré.

### Application :

Soit  $f(t)$  quelconque :

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \dots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}t^{2n-1} + R_{2n}$$

$P(t)$  polynôme de degré  $2n-1$ .

$$f(t) \approx P(t)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \int_{-1}^1 P(t)dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) + \dots + \omega_n P(t_n)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \dots + \omega_n f(t_n)$$

## Rappel :

- Dans la formule de Gauss à  $n$  termes,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sont les racines du polynôme de Legendre  $P_n(t)$  de degré  $n$ .

$$\bullet \quad \omega_i = \int_{-1}^1 L_i(t) dt$$

où  $L_i(t)$  sont les polynômes de base qui correspondent aux abscisses  $t_1, t_2, \dots, t_n$  dans la formule de Lagrange du polynôme de collocation.

Exemple :  $n = 2$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2)$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$L_1(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_1 - t_2)} = \frac{t - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} t - 1)$$

$$\omega_1 = \int_{-1}^1 L_1(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\sqrt{3} t - 1) dt = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - t \right]_{-1}^1$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \right]$$

$$\omega_1 =$$

Même chose pour  $\omega_2$

Nous allons donc construire une table contenant  
 Pour différentes valeurs de  $n$ ,  
 les racines du polynôme de Legendre de degré  $n$   
 et les valeurs des poids correspondants.

<b>n</b>	<b>Racines</b>	<b>Coefficients</b>
<b>2</b>	0.5773502692	1
	-0.5773502692	1
<b>3</b>	0.774596692	0.5555555556
	0	0.8888888889
	-0.774596692	0.5555555556
<b>4</b>	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
<b>5</b>	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

**Remarque:**

La fonction  $f(x)$  doit être connue.

## Application à un domaine d'intégration quelconque

$$I = \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx$$

Effectuer un changement  
de variable :

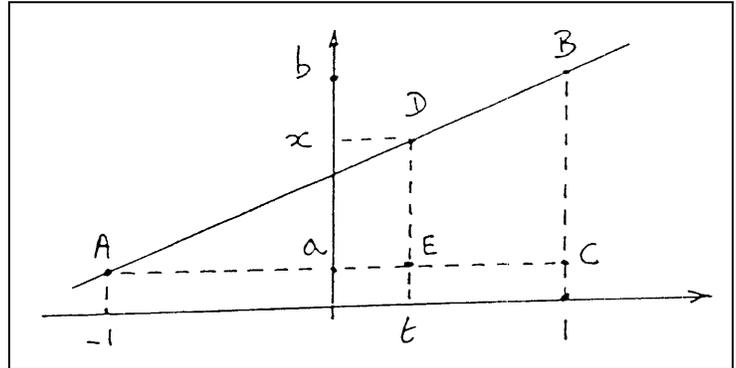
$$x = x(t)$$

tel que lorsque  $t$  varie de

-1 à 1

$x$  varie de  $a$  à  $b$ .

$$dx = x'(t) dt$$



$$\frac{DE}{AE} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{x-a}{t-(-1)} = \frac{b-a}{1-(-1)}$$

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dt$$

$$I = \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{t=-1}^{t=1} g(x(t)) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt$$

$$\approx \frac{b-a}{2} \{ \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \dots + \omega_n f(t_n) \}$$

$$\approx \frac{b-a}{2} \{ \omega_1 g(x(t_1)) + \omega_2 g(x(t_2)) + \dots + \omega_n g(x(t_n)) \}$$

$$\approx \frac{b-a}{2} \{ \omega_1 g(x_1) + \omega_2 g(x_2) + \dots + \omega_n g(x_n) \}$$

n choix de l'utilisateur.

Exemple :

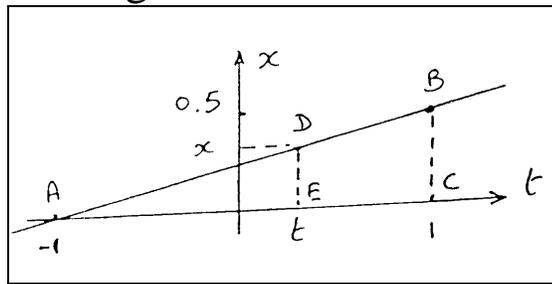
Calculer l'intégrale suivante par la méthode de Gauss à 3 termes :

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$$

• Changement de variable :

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{x - 0}{t + 1} = \frac{0.5}{2}$$



$$x = \frac{1}{4}(t + 1)$$

$$dx = \frac{1}{4} dt$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4} \int_{t=-1}^{t=1} e^{-\frac{1}{16}(t+1)^2} dt$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t=-1}^{t=1} e^{-\frac{1}{16}(t+1)^2} dt$$

$$I \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \omega_3 f(t_3) \right\} = 0.520500184$$

$$f(t_1) = e^{-\frac{1}{16}(t_1+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}(-0.77459667+1)^2} = 0.99682962$$

$$f(t_2) = e^{-\frac{1}{16}(t_2+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}} = 0.939413062$$

$$f(t_3) = e^{-\frac{1}{16}(t_3+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}(1.77459667)^2} = 0.821334696$$

# Méthode des Quadratures gaussiennes

La méthode de Gauss est très utile.

**Nécessite moins de calculs:**

Exemple formule de Gauss à 2 termes:

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

est exacte quelque soit  $P(t)$  de degré inférieur ou égal à 3.

Pour avoir le même résultat avec Newton Cotes, il faut utiliser Simpson 1/3 ou 3/8 (Polynôme  $P(x)$  de degré 3).

$$\int_a^b P_2(x) = \int_a^b P_3(x) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x) dx = \frac{3}{8} h [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

Il y a 3 ou 4 termes à évaluer !  
Seulement 2 pour la méthode de Gauss.

**Problème:**

Si la fonction est inconnue  $\Leftrightarrow$  Nous avons une table.

## Méthode des coefficients indéterminés

Si la fonction est inconnue  $\Leftrightarrow$  Nous avons une table.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

$\omega_i$  : **Poids** de la quadrature.

$x_i$  : **Points** de la quadrature

Principe :

Si les points sont fixés,  
déterminer les poids. ( $f(x) = P(x)$ )

Remarques :

1. Se servir des bornes :

$$x_0 = -1 \text{ et } x_n = 1$$

(simplification des calculs)

2. Imposer les polynômes de base

$x^j$  pour  $j = 0$  à  $n$ .

Calculer les poids.

Exemple:

Trouver a, b et c tel que:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a f(-1) + b f(0) + c f(1)$$

Imposer les polynômes de base  
 $x^j$  pour  $j = 0$  à  $2$ .

$$f(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad f(x) = x^2$$

$$f(x) = 1, \quad \int_{-1}^1 1dx = [x]_{-1}^1 = 2 = a(1) + b(1) + c(1)$$
$$a + b + c = 2$$

$$f(x) = x, \quad \int_{-1}^1 xdx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = 0 = a(-1) + b(0) + c(1)$$
$$-a + c = 0$$

$$f(x) = x^2, \quad \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} = a(1) + b(0) + c(1)$$
$$a + c = \frac{2}{3}$$

Solution:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad c = \frac{1}{3}$$

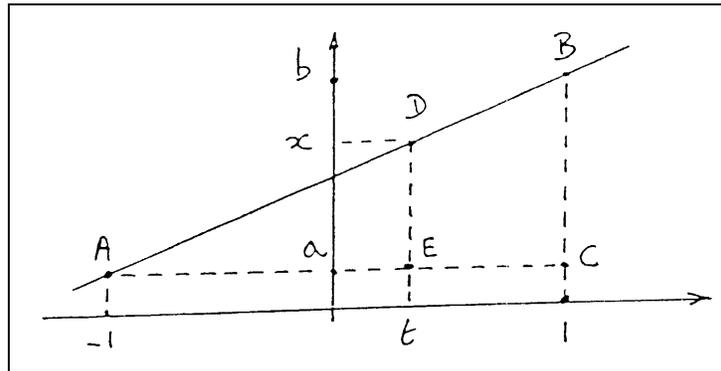
Remarque:

Si nous utilisons le résultat précédent pour calculer:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx$$

Effectuer un changement de variable :  $x = x(t)$

tel que lorsque  $t$  varie de  $-1$  à  $1$   
 $x$  varie de  $x_0$  à  $x_0+2h$ .



$$\frac{x(t) - x_0}{t - (-1)} = \frac{x_0 + 2h - x_0}{1 - (-1)} \quad x = \frac{2h t + 2x_0 + 2h}{2} = h t + x_0 + h$$

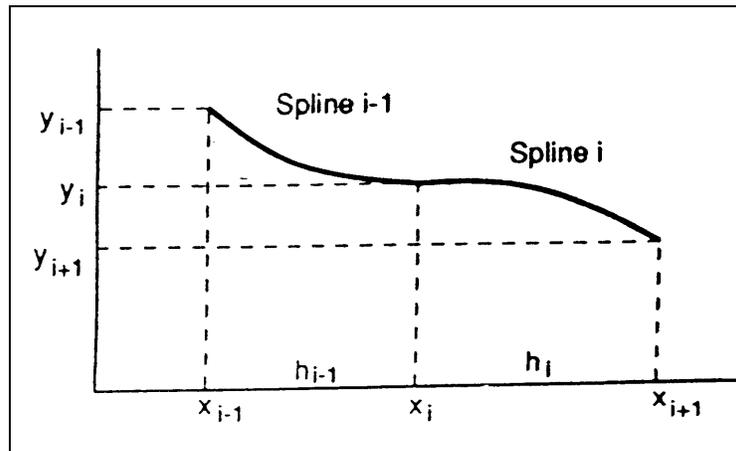
$$dx = h dt$$

$$I = \int_{x=x_0}^{x=x_0+2h} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{t=-1}^{t=1} f(x(t)) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt$$

$$\approx \frac{2h}{2} \left\{ \frac{1}{3} g(t_1) + \frac{4}{3} g(t_2) + \frac{1}{3} g(t_3) \right\}$$

$$\approx \frac{1}{3} h \{ f(x(t_1)) + 4f(x(t_2)) + f(x(t_3)) \}$$

## Dérivation des splines cubiques



Dans l'intervalle de longueur  $h_i$ ,  
la spline est un polynôme

$$P_{3,i}(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

ses dérivées sont :

$$P'_{3,i}(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i$$

$$P''_{3,i}(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$$

Aux abscisses de collocations :

$$P'_{3,i}(x) = c_i$$

$$P''_{3,i}(x) = 2b_i$$

## Intégration des splines cubiques

L'intégration de la spline devient :

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{3,i}(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i}{4} (x - x_i)^4 + \frac{b_i}{3} (x - x_i)^3 + \frac{c_i}{2} (x - x_i)^2 + d_i x \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i}{4} (x_{i+1} - x_i)^4 + \frac{b_i}{3} (x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{c_i}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + d_i (x_{i+1} - x_i) \right]\end{aligned}$$

Exprimée en fonction  
des pas

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i}{4} h_i^4 + \frac{b_i}{3} h_i^3 + \frac{c_i}{2} h_i^2 + d_i h_i \right]$$

Pour un pas constant  $h_i = h$ , nous avons :

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x) dx = \frac{h^4}{4} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{h^3}{3} \sum_{i=1}^n b_i + \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i + h \sum_{i=1}^n d_i$$

## Intégrale impropres et indéfinies

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \quad I_2 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad I_3 = \int_0^t x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

- $I_1 = ?$

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$\text{avec } \int_1^{\infty} x e^{-x} dx = \int_1^0 \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \left( -\frac{dy}{y^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{y^3} e^{-\frac{1}{y}} dy$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{1}{y^3} e^{-\frac{1}{y}} \right) = 0$$

$$I_1 = \int_0^A x e^{-x} dx \quad A \rightarrow \infty$$

<b>A</b>	<b>I<sub>1</sub></b>
1	0.26424
10	0.99950
100	1.00001
1000	1.00001
10000	1.00001
∞	1.0000

- $I_2 = ?$

$$I_2 = \int_B^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad B \rightarrow 0$$

- $I_3 = ?$

# Intégrales multiples

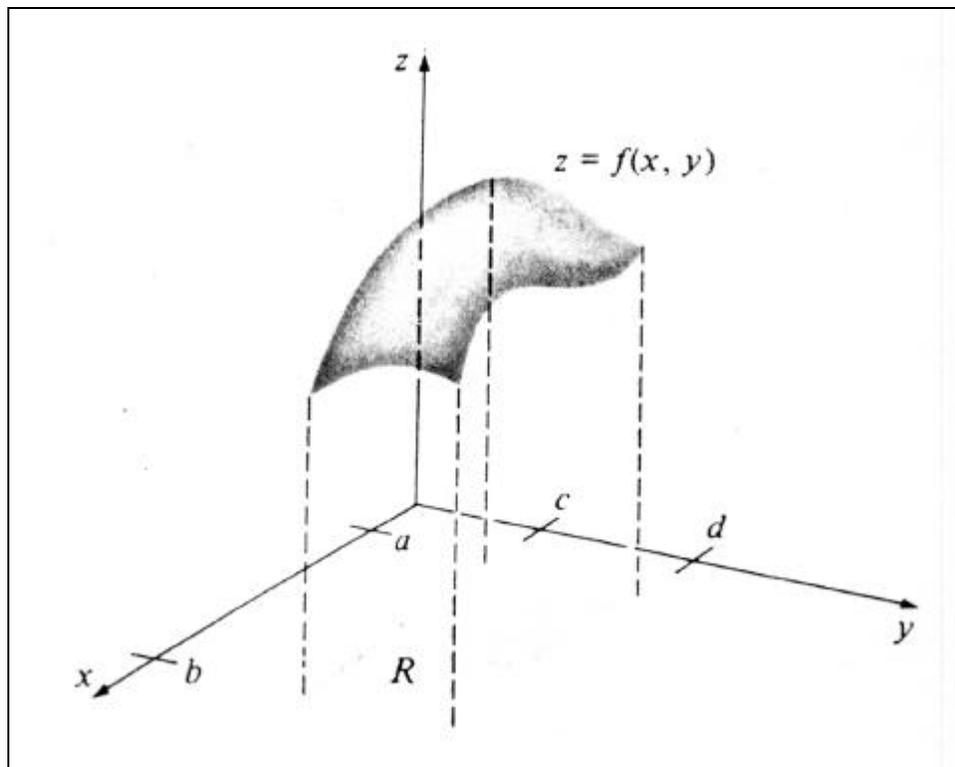
1. Les limites de l'intégration sont des constantes.

Ici nous avons :

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Pour calculer cette intégrale, nous considérons  $x$  constant lorsque nous intégrons par rapport à  $y$  et  $y$  constant lorsque nous intégrons par rapport à  $x$ .

Nous appliquons alors la méthode que nous voulons.



### Exemple :

Intégrer la fonction donné par la table suivante dans la région A déterminée par  $x=1.5$  ,  $x=3.0$  et  $y=0.2$ ,  $y=0.6$ .

<b>x\y</b>	<b>0.2</b>	<b>0.3</b>	<b>0.4</b>	<b>0.5</b>	<b>0.6</b>
<b>1.5</b>	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
<b>2.0</b>	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
<b>2.5</b>	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
<b>3.0</b>	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841

Nous allons intégrer avec la méthode des trapèzes dans la direction x et la méthode de Simpson 1/3 en y.

Commençons par y constant :

$$\begin{aligned}y = 0.2: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, y) dx &= \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.2) dx \\ &= \frac{h}{2} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ &= \frac{0.5}{2} (0.990 + 2(1.568) + 2(2.520) + 4.090) \\ &= 3.3140\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 0.3: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.3) dx &= \frac{0.5}{2} (1.524 + 2(2.384) + 2(3.800) + 6.136) \\ &= 5.0070\end{aligned}$$

En faisant de même, nous obtenons :

$$y = 0.4: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.4) dx = 6.6522$$

$$y = 0.5: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.5) dx = 8.2368$$

$$y = 0.6: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.6) dx = 9.7435$$

Intégrons maintenant en  $y$  suivant la règle de Simpson 1/3.

$$\begin{aligned} \int_{0.2}^{0.6} f(x, y) dy &= \frac{h}{3} (F_1 + 4F_2 + 2F_3 + 4F_4 + F_5) \\ &= \frac{0.1}{3} (3.3140 + 4(5.0070) + 2(6.6522) + 4(8.2368) + 9.7435) \\ &= 2.6446 \end{aligned}$$

# Intégrales multiples avec limites variables

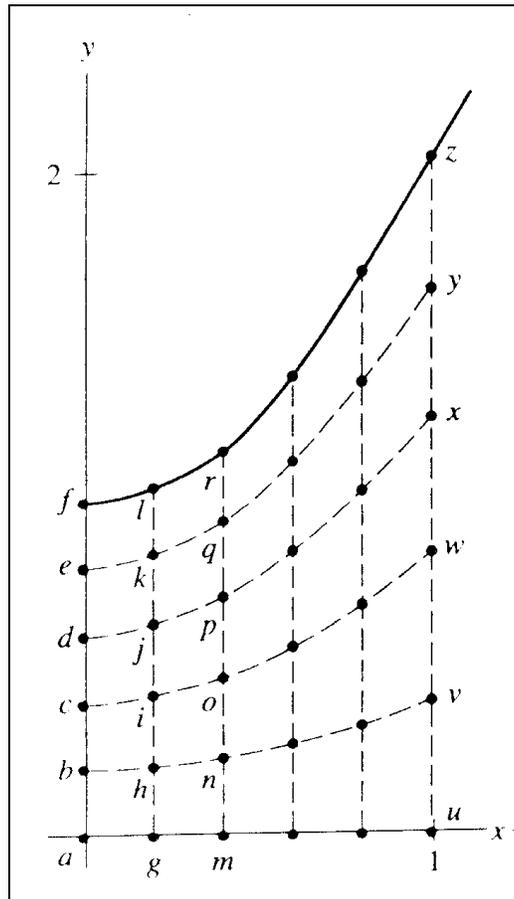
## 2. Les limites de l'intégration sont **variables**

Ici, nous avons par exemple :

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy dx$$

La surface sous laquelle nous cherchons le volume n'est pas un rectangle dans le plan défini par les axes  $x$  et  $y$ .

la région considérée est :



Si nous utilisons une quadrature composite du trapèze avec 5 sous intervalles dans chaque direction, nous obtenons :

$$S_1 = \frac{h_1}{2}(f_a + 2f_b + 2f_c + 2f_d + 2f_e + f_f)$$

$$S_2 = \frac{h_2}{2}(f_g + 2f_h + 2f_i + 2f_j + 2f_k + f_l)$$

$$S_3 = \frac{h_3}{2}(f_m + 2f_n + 2f_o + \dots)$$

...

$$S_6 = \frac{h_6}{2}(f_u + 2f_v + 2f_w + 2f_x + 2f_y + f_z)$$

Nous avons la valeur de  $\int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy dx$  par :

$$I = \frac{h_x}{2}(S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 + 2S_5 + S_6)$$

Exemple :

Calculer  $\int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x,y) dy dx$  avec une quadrature composite du trapèze avec 5 sous intervalles dans chaque direction :  
 $f(x,y) = x y$

$$f(0,y) = 0 \quad x^2 + 1 = 1$$

$$S_1 = \frac{1.0/5}{2} (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

$$f(0.2,y) = 0.2 y$$

$$S_2 = \frac{1.04/5}{2} (0 + 0.0832 + 0.1664 + 0.2496 + 0.3328 + 0.208) \\ = 0.1082$$

$$S_3 = \frac{1.16/5}{2} (0 + 1.1856 + 0.3712 + 0.5568 + 0.7428 + 0.464) \\ = 0.2692$$

$$S_4 = 0.5549$$

$$S_5 = 1.0758$$

$$S_6 = \frac{2.0/5}{2} (0 + 0.8 + 1.6 + 2.4 + 3.2 + 2.0) = 2.0$$

$$I = \frac{0.2}{2} (0 + 0.2164 + 0.5384 + 1.1098 + 2.1516 + 2.0) = 0.6016$$

Valeur analytique :  $I = 0.583333$