Chapitre 2

La transformée en z

Les techniques de transformation jouent un rôle primordial dans l'étude des systèmes linéaires invariants. C'est le cas des transformées de Fourier ou Laplace pour les systèmes en temps continu. Ces transformations connaissent une particularisation aux systèmes en temps discret. La transformée en z est aux systèmes en temps discret ce que la transformée de Laplace est aux systèmes en temps continu. La propriété la plus remarquable est toujours la mise en correspondance de la convolution dans le domaine direct avec un produit dans le domaine transformé. La transformée en z présente en outre l'avantage d'être plus facilement inversible que la transformée de Fourier.

Les raisons d'introduire la transformée en z sont donc les mêmes que celles qui ont motivé l'utilisation de la transformée de Laplace : une facilité plus grande d'utilisation et d'inversion que celles offertes par la transformée de Fourier.

2.1 La transformée de Fourier

Soit une fonction échantillonnée $x_e(t)$ qui peut être définie comme provenant de l'échantillonnage d'une fonction en temps continue $x_a(t)$. On a

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\,\delta(t-nT) \tag{2.1}$$

La transformée de Fourier $X_e(\omega)$ est donnée par

$$\begin{aligned} X_e(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\,e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\,e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\,e^{-j\omega nT} \end{aligned} \tag{2.2}$$

La transformée de Fourier $X(\omega)$ d'une séquence $x(n)$ est définie par

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n} \tag{2.3}$$

Cette transformée de Fourier est une fonction périodique en Ω, de période 2π. Il suffit pour s'en convaincre de calculer $X(\Omega + 2\pi)$ et utiliser le fait que $e^{j2\pi n} = 1$. En définissant $\Omega = 2\pi F$, la transformée de Fourier est aussi une fonction périodique en F, de période 1.

Contrairement à la transformée de Fourier d'un signal analogique, la transformée de Fourier d'une séquence est toujours une fonction périodique. C'est donc une fonction complexe de la variable réelle et continue, F ou Ω.

Par ailleurs, on utilise plus communément la notation $X(e^{j\Omega})$ plutôt que $X(\Omega)$.

La transformée de Fourier inverse d'une séquence est définie par

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\Omega_0}^{\Omega_0+2\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n} \mathrm{d}\Omega \tag{2.4}$$

où l'intégrale se calcule sur n'importe quel intervalle de largeur 2π. On peut établir un lien entre la séquence $x(n)$ et les échantillons $x_a(nT)$ en requérant que $x(n) = x_a(nT)$. Si on exprime cette équation à l'aide des spectres, on a

$$\begin{aligned}
x_a(nT) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega)\, e^{j\omega nT} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k/T}^{2\pi(k+1)/T} X_a(\omega)\, e^{j\omega nT} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2\pi/T} X_a(\omega + 2\pi k/T)\, e^{j(\omega+2\pi k/T)nT} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} X_a(\omega + 2\pi k/T)\, e^{j(\Omega+2\pi k)n} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} X_a(\omega + 2\pi k/T)\, e^{j\Omega n} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n} \mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{2.5}$$

où l'on a posé $\Omega = \omega T$. La correspondance entre spectres s'établit en posant

$$\begin{aligned}
X(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + 2\pi k/T) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - 2\pi k'/T)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

et $\Omega = \omega T$, soit encore $2\pi F = 2\pi f T$. **Il apparaît donc que** $F = fT = f/f_e$ **a signification de fréquence normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage**. Il est logique que l'étude des séquences puisse être menée sans connaissance d'une cadence de travail réelle.

La transformée de Fourier $X_f(f)$ exprimée à l'aide de la fréquence $f = \omega/2\pi$ est définie par

$$X_f(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\, e^{j2\pi f nT} \tag{2.7}$$

Considérons le cas de la séquence définie par

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = -3, -2, \cdots, 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{2.8}$$

La transformée de Fourier est donnée par

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-3}^{2} e^{-j\Omega n} \\ &= e^{3j\Omega} \sum_{n=0}^{5} e^{-j\Omega n} \\ &= e^{3j\Omega}\, \frac{1 - e^{-6j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= e^{j\Omega/2}\, \frac{\sin(3\Omega)}{\sin(\Omega)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Le résultat est donné par la figure 2.1 tant pour ce qui est du module que l'argument de la transformée.

2.2 La transformée en z

L'objet de cette section est de définir la transformée en z, et de voir sous quelles conditions elle converge.

2.2.1 Définition

La transformée en z d'une séquence $x(n)$ est définie comme la série $X(z)$ calculée comme suit :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.10}$$

où z est une variable complexe. On appelle encore cette équation 2.10 la transformée directe, car c'est la relation qui permet d'obtenir $X(z)$ à partir de $x(n)$.

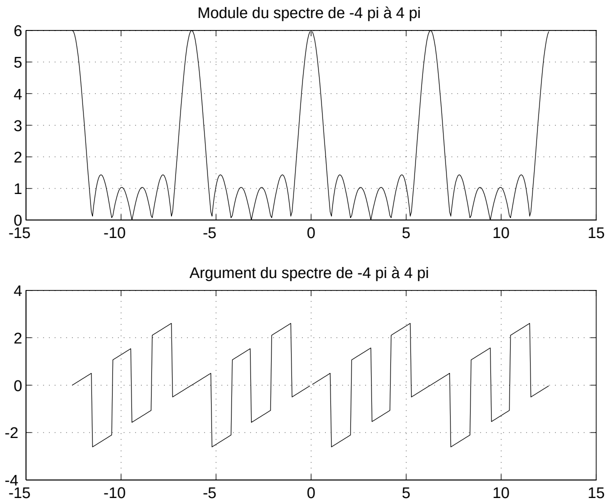

FIG. 2.1 – Module et argument du spectre d'une séquence $x(n) = u(n+3) - u(n-3)$

Cette transformée est aussi qualifiée de *bilatérale* par opposition à *unilatérale*. La transformée en z unilatérale est définie par $X_u(z)$ calculée comme suit :

$$X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.11}$$

Dans le cas de séquences causales, ces deux transformations sont les mêmes.

L'opération inverse porte le nom de transformation inverse.

Comme cette transformation est une série infinie, elle n'existe que pour les valeurs de z pour lesquelles cette série converge. La région de convergence (RC) est l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles la série prend une valeur finie. Dés lors, *toute transformée en z doit être accompagnée de la région pour laquelle elle converge*. Pour déterminer la région de convergence, on utilise le critère de Cauchy sur la convergence des séries de puissance. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{2.12}$$

converge si

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} < 1 \tag{2.13}$$

Pour appliquer le critère, on décompose la série en deux séries :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$= \quad X_1(z) + X_2(z) \tag{2.14}$$

L'application du critère de Cauchy à la série $X_2(z)$ mène à

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|x(n)\,z^{-n}\right|^{1/n} &< 1 \\ \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} \left|z^{-1}\right| &< 1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

En appelant R_- la limite

$$R_- = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} \tag{2.16}$$

la série $X_2(z)$ converge pour

$$|z| > R_- \tag{2.17}$$

Pour ce qui est de la série $X_1(z)$, après un changement de variable, on a

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\,z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x(-n)\,z^{n} \end{aligned} \tag{2.18}$$

On a convergence si

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |x(-n)\,z^n|^{1/n} &< 1 \\ \lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{1/n}\,|z| &< 1 \\ |z| &< \left[\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{1/n}\right]^{-1} = R_+ \end{aligned} \tag{2.19}$$

En toute généralité, une série converge dans un anneau du plan complexe des z donné par

$$R_- < |z| < R_+ \tag{2.20}$$

Ceci est illustré par la figure 2.2. Lorsque $R_+ \leq R_-$ il est clair que la série ne converge pas.
La séquence $X_2(z)$ représente la transformée en z d'une séquence causale. En général, une séquence causale converge à l'extérieur d'un cercle de rayon R_- donné par l'équation 2.16. La séquence $X_1(z)$ représente la transformée en z d'une séquence anti-causale, c'est-à-dire ne comportant des éléments que pour les valeurs négatives de l'indice. En général, une séquence anti-causale converge à l'intérieur d'un cercle de rayon R_+ donné par l'équation 2.19.
Quand une séquence est à durée limitée, sa transformée est donnée par

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)\,z^{-n} \tag{2.21}$$

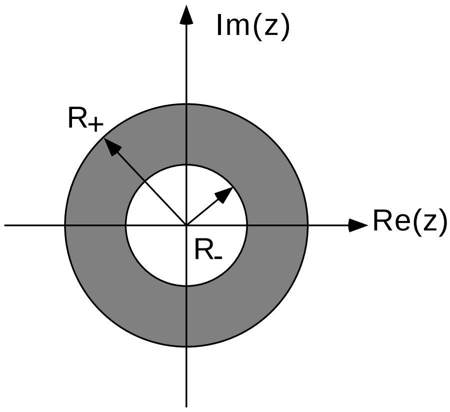

FIG. 2.2 – Illustration d'un anneau de convergence

Pour autant que dans l'intervalle $[n_1, n_2]$ le module de chaque élément de la séquence soit fini,la série converge pour toutes les valeurs de z, sauf éventuellement en $z = 0$ ou $|z| \to \infty$. Les cas suivants peuvent être distingués :

1. si n_1 et n_2 sont positifs, on n'a pas convergence pour $z = 0$ car les termes z^{-n} divergent pour les n positifs.
2. si n_1 est négatif et n_2 est positif, on n'a pas convergence ni pour $z = 0$ ni $|z| \to \infty$.
3. si n_1 et n_2 sont négatifs, on n'a pas convergence pour $|z| \to \infty$.

Considérons les exemples suivants :

1. $x(n) = \delta(n)$: la définition fournit directement $X(z) = 1$. La transformée existe partout.
2. $x(n) = u(n)$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{2.22}$$

pour $R_- = \lim_{n\to\infty} 1^{1/n} = 1$[1].

3. $x(n) = u(n)a^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{2.23}$$

avec un domaine de convergence $|z| > |a|$.

[1] On a que $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$

4. $x(n) = u(n)e^{j\Omega_0 n}$:
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\Omega_0 n}\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\Omega_0} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{j\Omega_0} z^{-1}} \tag{2.24}$$
avec un domaine de convergence $|z| > |e^{j\Omega_0}| = 1$.
5. $x(n) = a^n$: en appliquant les formules qui permettent de calculer les deux rayons délimitant l'anneau de convergence, on trouve $R_- = R_+ = |a|$ et donc la transformée en z n'existe pas.

2.2.2 Inversion

Pour inverser une transformée en z, on peut s'aider utilement du *théorème de Cauchy* qui établit que
$$\frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma z^{l-1}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 1 & \text{pour } l = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{2.25}$$
où Γ est un contour qui entoure l'origine du plan et est parcouru dans le sens anti-horlogique. En reprenant la définition de la transformée en z donnée par 2.10, en multipliant les deux membres par z^{l-1} et en intégrant le long d'un contour entourant l'origine et appartenant au domaine de convergence, on trouve
$$\begin{aligned} \oint_\Gamma X(z)\, z^{l-1}\,\mathrm{d}z &= \oint_\Gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n+l-1}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \oint_\Gamma z^{-n+l-1}\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.26}$$
où l'interversion de l'intégrale et de la somme est licite compte tenu du fait que l'on opère dans la zone de convergence de la transformée. En utilisant le théorème de Cauchy 2.25, on a finalement
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(z)\, z^{n-1}\,\mathrm{d}z \tag{2.27}$$
avec les conditions déjà énoncées à propos du contour d'intégration.

L'évaluation de l'intégrale dans le plan complexe se fait à l'aide du théorème des résidus, qui établit que l'intégrale le long d'un contour est donné par la somme des résidus de la fonction à intégrer, soit ici $X(z)\, z^{n-1}$, dans le contour Γ. Le résidu r_q à un pôle d'ordre q en $z = a$ est donné par
$$r_q = \lim_{z\to a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}z^{q-1}} \left[X(z)\, z^{n-1}(z-a)^q\right] \tag{2.28}$$
Pour un pôle simple ($q = 1$) en $z = a$, l'expression du résidu r_1 se réduit à
$$r_1 = \lim_{z\to a} \left[X(z)\, z^{n-1}(z-a)\right] \tag{2.29}$$

Considérons la transformée en z donnée par

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{2.30}$$

et le domaine de convergence $|z| > 1$. En utilisant la formule d'inversion, on a donc que

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \frac{z^{n-1}}{1 - z^{-1}} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \frac{z^n}{z - 1} \, \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.31}$$

où le contour Γ peut être un cercle de rayon plus grand que l'unité.

Pour $n \geq 0$, on n'a qu'un pôle d'ordre 1 en $z = 1$ qui est entouré par le contour. Le résidu en ce pôle est donné par r_1 valant

$$r_1 = \lim_{z \to 1} \left[z^n \right] = 1 \tag{2.32}$$

On a donc $x(n \geq 0) = 1$. En ce qui concerne $n < 0$, on a cette fois un autre pôle d'ordre $(-n)$ en $z = 0$. L'application de la formule du résidu donne, pour $q = -n$,

$$r_q = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(q-1)!} \frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}z^{q-1}} \left[\frac{1}{z - 1} \right] = -1 \tag{2.33}$$

L'autre résidu vaut toujours 1 et la somme donne donc 0. Pour éviter l'évaluation fastidieuse du résidu en un pôle d'ordre non égal à un, on peut recourir à un changement de variable $w = 1/z$. On à dès lors que le domaine de convergence devient $|w| < 1$, et l'intégrale à évaluer devient

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \frac{z^n}{z - 1} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma^-} \frac{w^{-n}}{w^{-1} - 1} \frac{(-1)}{w^2} \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma^+} \frac{w^{-n-1}}{1 - w} \, \mathrm{d}w \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

où le contour Γ^- peut être un cercle de rayon inférieur à l'unité et parcouru dans le sens horlogique (à cause du changement de variable). Le contour Γ^+ est parcouru dans le sens anti-horlogique et compense le signe $-$. Pour $n < 0$, on n'a pas de pôle en 0. Le seul pôle est en $w = 1$ mais n'est pas entouré par le domaine d'intégration qui doit appartenir au domaine de convergence, soit $|w| < 1$. Aucun pôle n'est donc entouré et la somme des résidus est nulle.

2.2.3 Décompositions en fractions simples

En utilisant d'ores et déjà la propriété de linéarité de la transformée en z, qui sera vue plus loin, on peut décomposer une fonction de forme compliquée en une somme de fonctions simples, et prendre la transformée inverse de chacun des éléments. Comme on le verra, de nombreux systèmes requièrent l'étude de transformées du type

$$X(z) = P(z)/Q(z) \tag{2.35}$$

où P et Q sont des polynômes en z ou z^{-1}. On peut alors décomposer $X(z)$ en fractions simples et obtenir la transformée inverse par la somme des transformées inverses. La transformée peut se mettre sous la forme

$$X(z) = S(z) + P_0(z)/Q(z) \tag{2.36}$$

où le degré de $P_0(z)$ est inférieur à celui de $Q(z)$. En fait, $S(z)$ et $P_0(z)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division de P par Q. Si le degré de P est inférieur à celui de Q, le quotient S est nul.

Lorsque les racines p_i de $Q(z)$, appelées pôles sont simples, on peut mettre le quotient sous la forme

$$P_0(z)/Q(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{z - p_i} \tag{2.37}$$

Pour obtenir les poids α_i, il suffit d'effectuer le calcul suivant :

$$\alpha_i = [(z - p_i)P_0(z)/Q(z)]_{z=p_i} \tag{2.38}$$

Si un pôle p_n est d'ordre $q > 1$, la décomposition prend la forme

$$P_0(z)/Q(z) = \sum_{i=1,\neq n}^{N} \frac{\alpha_i}{z - p_i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{(z - p_n)^j} \tag{2.39}$$

avec

$$\beta_j = \frac{1}{(q-j)!} \frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}z^{q-j}} \left[(z - p_n)^j P_0(z)/Q(z)\right]_{z=p_n} \tag{2.40}$$

En réalité, il est plus intéressant d'obtenir des fractions où z^{-1} apparaît au dénominateur, car les fractions dans ce cas correspondent directement à des transformées connues. Dès lors, tout ce qui vient d'être dit est appliqué pour des poynômes en z^{-1} et non pas en z.

Considérons la transformée donnée par

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \tag{2.41}$$

pour $|z| > 2$. Comme nous considérons que la variable est z^{-1}, le degré du numérateur est bien inférieur à celui du dénominateur.

Les pôles sont donnés par $z^{-1} = 1$ et $z^{-1} = 0.5$. On recherche donc une décomposition en fractions simples du type

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{0.5}{(z^{-1}-1)(z^{-1}-0.5)} \\ &= \frac{\alpha_1}{z^{-1}-1} + \frac{\alpha_2}{z^{-1}-0.5} \end{aligned} \tag{2.42}$$

On trouve en utilisant ce qui a été vu précédemment,

$$X(z) = \frac{1}{z^{-1}-1} + \frac{-1}{z^{-1}-0.5} \tag{2.43}$$

Dès lors,

$$X(z) = \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{2.44}$$

et il est possible d'identifier ces fractions au résultat obtenu en 2.23. On trouve de ce fait

$$x(n) = 2 \times 2^n\, u(n) - u(n) = (2^{n+1}-1)u(n) \tag{2.45}$$

Si on avait considéré les polynômes comme des fonctions de z, on aurait eu

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2-3z+2} \\ &= 1 + \frac{3z-2}{z^2-3z+2} \\ &= 1 + \frac{3z-2}{(z-2)(z-1)} \\ &= 1 + \frac{4}{(z-2)} + \frac{-1}{(z-1)} \\ &= 1 + \frac{4z^{-1}}{(1-2z^{-1})} - \frac{1}{(1-z^{-1})} \end{aligned} \tag{2.46}$$

En s'aidant de la propriété de décalage qui sera vue plus loin, [2] on a que

$$x(n) = \delta(n) + 4 \times 2^{n-1} u(n-1) - u(n-1) \tag{2.47}$$

Cette forme est moins concise que la précédente.

[2] La propriété de décalage veut que la transformée de $x(n-1)$ est donnée par $z^{-1}X(z)$.

2.2.4 Autres méthodes d'inversion

Il est encore possible de recourir, le cas échéant, à d'autres méthodes d'inversion qui sont le développement en série de Taylor de la transformée, ce qui donne terme à terme la séquence recherchée, ou le développement par division. Un oeil exercé peut ensuite identifier une formule concise pour la séquence, mais ce n'est pas évident.

2.2.5 Propriétés de la transformée en z

Linéarité

La linéarité de la transformation signifie que la transformée d'une séquence obtenue par combinaison linéaire d'autres séquences n'est rien d'autre que la combinaison linéaire des transformées correspondantes. Si donc

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \tag{2.48}$$

alors

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\, z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\, z^{-n} \\ &= a\, X_1(z) + b\, X_2(z) \end{aligned} \tag{2.49}$$

La région de convergence est au moins l'intersection des régions associées à $X_1(z)$ et $X_2(z)$ car la combinaison linéaire peut introduire des zéros qui compensent certains pôles.

Décalage et transformée bilatérale

Soit

$$y(n) = x(n - n_0) \tag{2.50}$$

La transformée en z de $y(n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)\, z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0}\, X(z) \end{aligned} \tag{2.51}$$

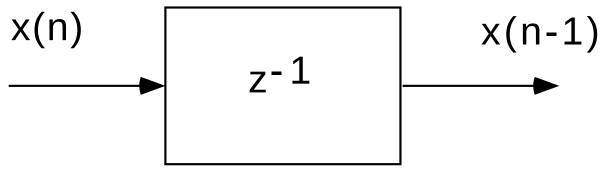

FIG. 2.3 – Opérateur de retard unité

Le domaine de convergence est le même celui de $X(z)$ sauf que si n_0 est positif (resp. négatif), on a un pôle en 0 (resp. $z \to \infty$). Il peut y avoir des compensations de zéros ou pôles en fonction de ce que contient $X(z)$.

Multiplier une transformée en z par z^{-1} revient donc à retarder la séquence d'une unité (période d'échantillonnage). On se réfère souvent à z^{-1} comme opérateur de retard unité. C'est illustré par la figure 2.3.

La propriété de décalage permet de traiter les équations aux différences vues précédemment. A partir de

$$y(n) = x(n) - b_1\, y(n-1) - b_2\, y(n-2) \tag{2.52}$$

on trouve par transformation en z,

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) - b_1\, z^{-1} Y(z) - b_2\, z^{-2} Y(z) \\ Y(z) &= \frac{X(z)}{1 + b_1 z^{-1} + b_2\, z^{-2}} \end{aligned} \tag{2.53}$$

Décalage et transformée unilatérale

Dans le cas unilatéral, il faut être plus prudent dans ce que l'on écrit. En effet, la transformée unilatérale est définie par 2.11. Si on pose $y(n) = x(n-1)$, la transformée bilatérale est calculée par

$$\begin{aligned} Y_u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n)\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)\, z^{-n} \\ &= z^{-1} \sum_{m=-1}^{\infty} x(m)\, z^{-m} \\ &= z^{-1} \left[x(-1) z + X_u(z) \right] \\ &= x(-1) + z^{-1}\, X_u(z) \end{aligned} \tag{2.54}$$

On voit donc qu'un décalage vers la droite permet de faire apparaître des éléments qui ne sont pas pris en considération par la transformation de départ. Cette propriété permet de tenir compte de conditions initiales non nulles.

Soit

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \tag{2.55}$$

avec $y(-1) = K$ et une excitation $x(n) = e^{j\Omega_0 n}u(n)$. En vertu de 2.54, la transformée en z donne

$$\begin{aligned}
Y_u(z) &= X_u(z) + ay(-1) + az^{-1}X_u(z) \\
&= \frac{X_u(z) + ay(-1)}{1 - az^{-1}} \\
&= \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - e^{j\Omega_0}z^{-1})} \\
&= \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{(1 - e^{j\Omega_0}/a)(1 - az^{-1})} \\
&+ \frac{1}{(1 - a/e^{j\Omega_0})(1 - e^{j\Omega_0}z^{-1})} \\
&= \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{a}{(a - e^{j\Omega_0})(1 - az^{-1})} \\
&+ \frac{e^{j\Omega_0}}{(e^{j\Omega_0} - a)(1 - e^{j\Omega_0}z^{-1})}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

De ce fait, en utilisant les transformées inverses déjà établies, on trouve

$$y(n) = u(n)\left[a^{n+1}K + \frac{a^{n+1}}{a - e^{j\Omega_0}} - \frac{e^{j\Omega_0(n+1)}}{a - e^{j\Omega_0}}\right] \tag{2.57}$$

La première partie de la réponse correspond à la réponse libre, c'est-à-dire l'évolution du système sous l'effet des conditions initiales. La seconde partie correspond à la partie transitoire de la réponse forcée. La troisième partie correspond à la réponse de régime de la réponse forcée.

On peut bien évidemment généraliser ce qui précède au cas de plusieurs conditions initiales.

Changement d'échelle

Si on effectue un changement de variable complexe $w = az$ où a peut être complexe, le domaine de convergence est modifié comme suit

$$\begin{aligned}
R_- &< |z| < R_+ \\
R_- &< |w/a| < R_+ \\
|a|R_- &< |w| < |a|R_+
\end{aligned} \tag{2.58}$$

De plus, si la transformée en z possède un pôle en $z = p$, la transformée exprimée à l'aide de w possède un pôle en $w = az = ap$. On voit donc qu'un tel changement de variable permet de modifier la position des pôles, tant en amplitude qu'en phase puisque la multiplication se fait par un complexe.

1. si a est réel et positif, on rapproche le pôle de l'origine si $a < 1$ et on l'éloigne si $a > 1$.
2. si a est complexe du type $e^{j\theta}$, le pôle subit une rotation de θ radians autour de l'origine.

On peut se demander quelle est la séquence qui correspond à cette transformée dont la variable indépendante a été modifiée. On peut utiliser la transformée inverse pour trouver la réponse. On sait que

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(z)\, z^{n-1}\, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(w/a)\,(w/a)^{n-1}\, \mathrm{d}(w/a) \\ x(n)a^n &= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(w/a)\,(w)^{n-1}\, \mathrm{d}w \end{aligned} \tag{2.59}$$

et donc $x(n)a^n$ est la séquence correspondant à $X(z/a)$. On verra plus loin combien la position des pôles et zéros est importante car elle conditionne la stabilité des systèmes linéaires. Le fait que la modulation par une séquence exponentielle permet de modifier les positions des pôles et zéros est donc de première importance pour rendre, le cas échéant, un système stable.

Dérivation

Comme

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.60}$$

on a aussi

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)\, x(n)\, z^{-n-1} \tag{2.61}$$

Et donc

$$-z\,\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x(n)\, z^{-n} \tag{2.62}$$

De ce fait, il apparaît que $-z\mathrm{d}X(z)/\mathrm{d}z$ est la transformée de $n\,x(n)$.

Convolution

Cette propriété est une des plus importantes et justifie à elle seule l'usage qui est fait de la transformée en z pour étudier les systèmes linéaires permanents en temps discret. Si $y(n)$ est obtenu par convolution de $x(n)$ et $g(n)$, on a que

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, g(n-m) \tag{2.63}$$

La transformée en z, $Y(z)$, de $y(n)$ est donc obtenue par

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, g(n-m)\, z^{-n} \\
&= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^{-m}\right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n-m)\, z^{-(n-m)}\right] \\
&= X(z)\, G(z) \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

Cette opération est valable pour les valeurs de z appartenant à l'intersection des domaines de convergence des deux transformées.

Considérons un système linéaire et permanent de réponse impulsionnelle

$$g(n) = a^n\, u(n) \qquad (2.65)$$

et $|a| < 1$ dont le signal $x(n)$ à l'entrée est la séquence

$$x(n) = b^n\, u(n) \qquad (2.66)$$

et $|b| < 1$ avec de plus $|b| > |a|$. La sortie $y(n)$ est obtenue par $y(n) = x(n) \otimes g(n)$ où $\otimes$ est le symbole utilisé pour une convolution. Les transformées $X(z)$ et $G(z)$ sont données par

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{1-bz^{-1}} \text{ pour } |z| > |b| \qquad (2.67) \\
G(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ pour } |z| > |a| \qquad (2.68)
\end{aligned}$$

En vertu de ce qui précède, on a donc pour $|z| > |b|$ qui est donc l'intersection des domaines de convergence,

$$\begin{aligned}
Y(z) &= G(z)X(z) \qquad (2.69) \\
&= \frac{1}{1-az^{-1}}\,\frac{1}{1-bz^{-1}} \qquad (2.70) \\
&= \frac{1}{(1-b/a)(1-az^{-1})} + \frac{1}{(1-a/b)(1-bz^{-1})} \qquad (2.71) \\
&= \frac{a}{(a-b)(1-az^{-1})} + \frac{b}{(b-a)(1-bz^{-1})} \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

et donc, compte tenu des transformées calculées précédemment,

$$y(n) = u(n) \left[\frac{a}{(a-b)}\, a^n + \frac{b}{(b-a)}\, b^n\right] \qquad (2.73)$$

Ces calculs sont illustrés à la figure 2.4, pour $a = 0.8$, $b = 0.9$.

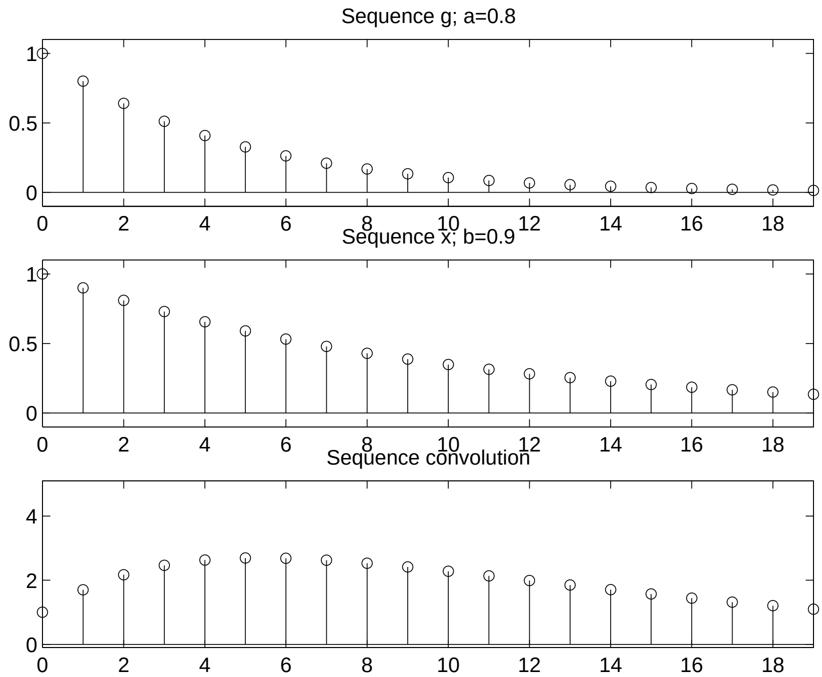

FIG. 2.4 – Convolution de deux séquences $a^n\,u(n)$ et $b^n\,u(n)$ avec $a = 0.8$ et $b = 0.9$

Produit de séquences

Considérons le signal $y(n)$ obtenu par produit de deux autres $x(n)$ et $g(n)$. La transformée en z est donnée par

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, g(n)\, z^{-n} \end{aligned} \tag{2.74}$$

En remplaçant $x(n)$ par son expression donnée par transformation inverse, on a

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(w)\, w^{n-1}\, \mathrm{d}w\, g(n)\, z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\, (z/w)^{-n} \right] X(w)\, w^{-1}\, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z/w)\, X(w)\, w^{-1}\, \mathrm{d}w \end{aligned} \tag{2.75}$$

Le contour doit être choisi dans l'intersection des domaines de convergence. Pour exprimer la transformée inverse de $X(w)$, il faut

$$R_{-,x} < |w| < R_{+,w} \tag{2.76}$$

où $R_{-,x}$ et $R_{+,x}$ sont les rayons du domaine de convergence de $X(w)$. Par ailleurs, pour que $G(z/w)$ existe, il faut

$$R_{-,g} < |z/w| < R_{+,g} \tag{2.77}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} |w|\, R_{-,g} &< |z| < |w|\, R_{+,g} \\ R_{-,x} R_{-,g} &< |z| < R_{+,g} R_{+,x} \end{aligned} \tag{2.78}$$

Afin de mieux comprendre le résultat donné par l'intégrale, on peut poser $w = ae^{jb}$ et $z = \alpha e^{j\beta}$; dès lors

$$Y(\alpha e^{j\beta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\alpha e^{j(\beta-b)}/a)\, X(ae^{jb})\, \mathrm{d}b \tag{2.79}$$

ce qui fait apparaître que le résultat est le produit de convolution continu et périodique de période 2π des fonctions $X(ae^{jb})$ et $G(\alpha e^{j\beta})$.

Valeur initiale

La transformée en z $X(z)$ d'une séquence causale $x(n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \\ &= x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \cdots \end{aligned} \tag{2.80}$$

En prenant la limite de cette transformée lorsque z tend vers l'infini, il reste donc le premier terme. Donc,

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) \tag{2.81}$$

Cette propriété n'a de sens que pour des valeurs causales.

Soit la séquence donnée par sa transformée vue en 2.70 :

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{z^2}{z^2 - (a+b)z + ab} \tag{2.82}$$

on a que

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) = 1 \tag{2.83}$$

2.3 Liens entre transformées en z, de Fourier et de Laplace

2.3.1 Transformée en z et transformée de Fourier

En reprenant la définition de la tranformée en z donnée en 2.2.1, et posant $z = re^{j\theta}$, et $\theta = 2\pi F$,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, r^{-n}\, e^{-jn\theta} \tag{2.84}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, r^{-n}\, e^{-2\pi jnF} \tag{2.85}$$

On voit donc que **la transformée en z d'une séquence peut être interprétée comme la transformée de Fourier de cette séquence multpliée par une séquence exponentielle. Pour $r = |z| = 1$, la transformée de Fourier est identique à la transformée en z.** Dès lors, **la transformée de Fourier n'est rien d'autre que la transformée en z évaluée sur le cercle de rayon unité $r = |z| = 1$, à supposer qu'on ait convergence en ce domaine**. On voit aussi que la transformée en z peut très bien exister alors que la transformée de Fourier n'existe pas, car on introduit un amortissement supplémentaire par r^{-n} dans la transformée en z. Donc, connaître la transformée de Fourier revient à connaître la transformée en z sur le cercle de rayon unité. Comme cette transformée est périodique, un seul tour suffit. Pour $F = -0.5$ (resp. $F = 0$), on se trouve en $z = e^{-j\pi}$ (resp. $z = 1$). Si on se déplace vers $F = 0.5$ (resp. $F = 1$) on parcourt le cercle de rayon unité dans le sens antihorlogique de $z = e^{-j\pi}$ vers $z = e^{j\pi}$ (resp. $z = e^{2\pi j}$).

2.3.2 Représentation par pôles et zéros

Pratiquement, on peut toujours représenter une transformée en z à l'aide de la forme

$$X(z) = C \frac{\prod_{m=1}^{M} (z - z_m)}{\prod_{n=1}^{N} (z - p_n)} \tag{2.86}$$

où les z_m sont les zéros, et les p_n sont les pôles. Cela revient encore à avoir un polynôme au numérateur et un polynôme au dénominateur. Pour des signaux réels, ces polynômes sont à coefficients réels, et leurs racines (pôles et zéros) sont soit réelles, soit par paires complexes conjuguées. Cette représentation est très utile pour comprendre l'évolution de la transformée de la Fourier.

Considérons la séquence $x(n) = a^n\, u(n)$ avec $|a| < 1$. Elle a comme transformée

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \tag{2.87}$$

pour $|z| > |a|$. Cette transformée possède un zéro en $z = z_1 = 0$ et un pôle en $z = p_1 = a$. La figure 2.5 illustre le cas d'un pôle a réel. Le calcul de la transformée de Fourier requiert d'évaluer la transformée en z sur le cercle de rayon unité. Pour une fréquence F_0, on pose $z = e^{2\pi j F_0}$ et donc

$$X(e^{2\pi j F_0}) = \frac{e^{2\pi j F_0}}{e^{2\pi j F_0} - a} \tag{2.88}$$

Le numérateur peut être considéré comme un vecteur joignant l'origine au point $z = e^{2\pi j F_0}$. Le dénominateur peut être vu comme un vecteur joignant le point $z = a$ au point $z = e^{2\pi j F_0}$. Ces deux vecteurs sont notés par $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{D}$. **Le module de la transformée de Fourier est donné par le rapport entre longueurs des deux vecteurs**. Quand la fréquence change, le module du numérateur ne change pas. Par contre le module du dénominateur décroît lorsque l'on se rapproche d'un pôle. Plus précisément, lorsque $2\pi F_0$ se rapproche de l'argument d'un pôle, le dénominateur devient petit, et le module de la transformée de Fourier devient grand. *Le module de la transformée de Fourier prend donc des valeurs importantes pour des valeurs de pulsations $\Omega_0 = 2\pi F_0$ proches de l'argument des pôles.* Cette

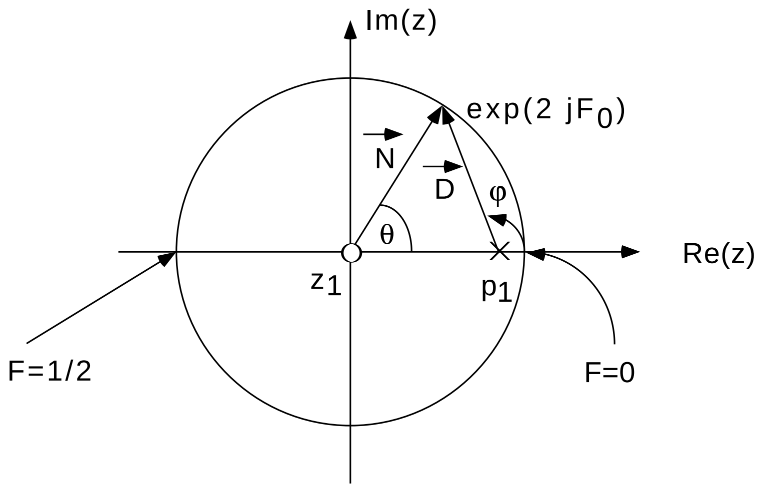

FIG. 2.5 – Illustration de la réponse en fréquence pour $X(z) = z/(z-a)$

valeur sera d'autant plus élevée que le pôle a un module proche de l'unité. On aurait pu tenir le même raisonnement avec les zéros, qui occasionnent quant à eux des valeurs faibles (voire des zéros de transmission) de la transformée de Fourier. Ici pour $F_0 = 0$, le module du dénominateur a une certaine valeur. Ce module croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de cette fréquence et atteint son maximum en $F_0 = -1$. Comme le spectre est périodique, cet effet se répète. Par ailleurs, le signal est ici réel et on a en plus que le module de la transformée de Fourier est pair, et l'argument, impair. Ces considérations sont illustrées par la transformée de Fourier donnée à la figure 2.6 pour $a = 0.9$. L'argument est ici donné par la différence entre les angles θ et ϕ que les vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{D}$ font avec l'axe réel. Cet argument est aussi périodique, et est quant à lui, une fonction impaire de la fréquence.

Les considérations qui ont permis de prédire l'allure du spectre en module et argument peuvent aussi être utilisées dans des cas plus compliqués. Considérant la transformée en z donnée par 2.86, on a que le module et l'argument sont donnés par

$$|X(e^{j\Omega})| = |C| \frac{\prod_{m=1}^{M} |e^{j\Omega} - z_m|}{\prod_{n=1}^{N} |e^{j\Omega} - p_n|} \tag{2.89}$$

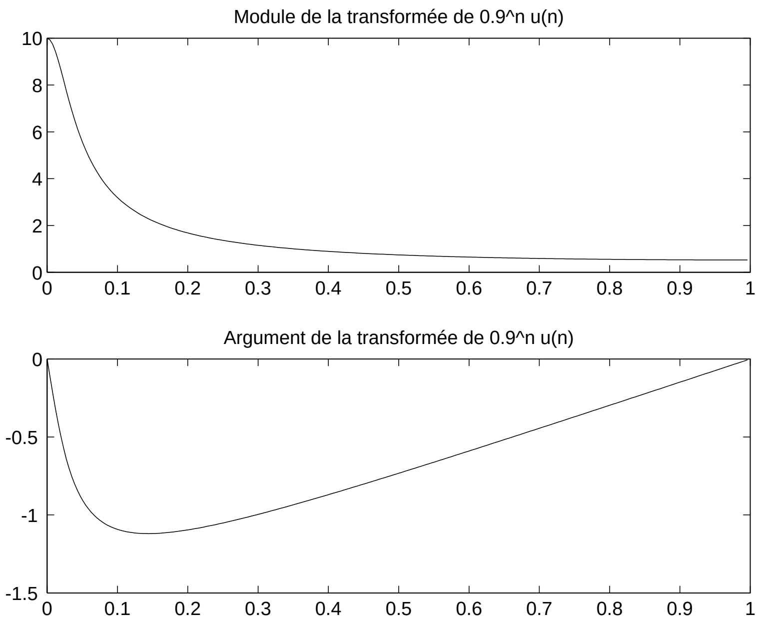

FIG. 2.6 – Transformée de Fourier, module à gauche, argument à droite, de $a^n\,u(n)$ pour $a = 0.9$

$$\begin{aligned}
\arg X(e^{j\Omega}) &= \arg C + \sum_{m=1}^{M} \arg(e^{j\Omega} - z_m) && (2.90) \\
&- \sum_{m=1}^{N} \arg(e^{j\Omega} - p_n) && (2.91)
\end{aligned}$$

Lorsque l'on se déplace sur le cercle unité, le spectre d'amplitude aura toujours un pic au voisinage d'un pôle proche du cercle et un creux au voisinage d'un zéro proche du cercle.

2.3.3 Relation de Parseval

Cette relation est importante en ce qu'elle permet d'exprimer l'énergie contenue dans un signal à partir du signal ou à partir de son spectre. A cette fin, on va utiliser la propriété du produit vue précédemment en 2.75 en ce qui concerne le produit de séquence. En effet, l'énergie d'un signal est définie par

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{2.92}$$

Si on reprend la propriété du produit avec $g(n) = x^*(n)$, en considérant que

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\, z^{-n} \\
&= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, (z^*)^{-n} \right]^* \\
&= X^*(z^*) && (2.93)
\end{aligned}$$

et d'autre part que

$$Y(z=1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \tag{2.94}$$

on a en vertu de 2.75, en prenant un contour d'intégration qui est le cercle de rayon unité, soit $w = e^{j\theta}$,

$$\begin{aligned}
Y(z=1) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(w)\, X^*(1/w^*)\, w^{-1}\, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, X^*(e^{j\theta})\, e^{-j\theta}\, j e^{j\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, X^*(e^{j\theta}) \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-0.5}^{0.5} X(e^{j2\pi F})\, X^*(e^{j2\pi F})\,\mathrm{d}F \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} \left|X(e^{j2\pi F})\right|^2\,\mathrm{d}F \qquad (2.95) \end{aligned}$$

Et donc l'énergie contenue dans un signal peut être évaluée en intégrant le module carré du spectre de ce signal sur la période principale.

2.3.4 Lien entre transformée en z et transformée de Laplace

Si on reprend le formalisme utilisé au chapitre 1 pour représenter des signaux échantillonnés à l'aide d'impulsions modulées, on a que le signal peut être mis sous la forme

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) \qquad (2.96)$$

La transformée de Laplace de ce signal, notée $\widehat{X}_e(s)$, est donnée par

$$\begin{aligned} \widehat{X}_e(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\,e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (2.97) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\,e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (2.98) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,e^{-snT} \qquad (2.99) \end{aligned}$$

On voit donc que la transformée en z n'est rien d'autre que la transformée de Laplace d'un signal échantillonné à condition d'établir la correspondance $z = e^{-sT}$. Autrement dit la transformée en z du signal échantillonné, évaluée pour $z = e^{-sT}$ donne la transformée de Laplace de ce signal. Cette mise en correspondance permet d'établir l'application du plan complexe des s vers le plan des z. On a bien évidemment que

$$\begin{aligned} s &= \sigma + j\,\omega \qquad (2.100) \\ &= \frac{1}{T}\,\ln(z) \qquad (2.101) \\ &= \frac{1}{T}[\ln(|z|) + j\arg(z)] \qquad (2.102) \end{aligned}$$

Il apparaît donc que si le module de z, soit $|z|$, est inférieur à l'unité, σ sera négatif. **Le demi-plan de gauche du plan des s est donc mis en correspondance avec l'intérieur du cercle de rayon unité du plan des z, et inversement**. Par ailleurs, l'argument de z, noté $\arg(z)$ est défini à 2π près. Dès lors, toutes les bandes du plan des s, de hauteur $2\pi/T$ s'appliquent à tout le plan des z et se superposent. Une infinité de points du plan des s correspondant à des valeurs de ω différant de $2\pi/T$ s'appliquent sur le même point du plan des z. Cette

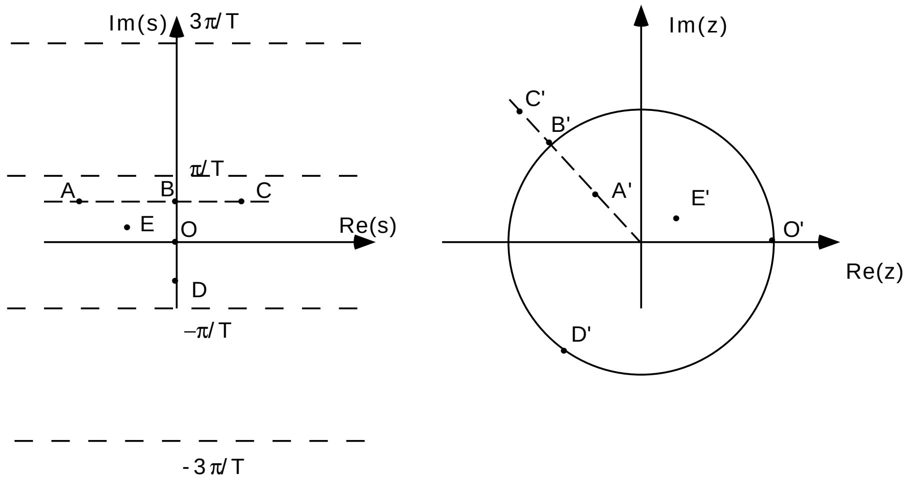

FIG. 2.7 – Correspondance entre points du plan des s et points du plan des z

mise en correspondance est assez logique : la transformée de Fourier revient à évaluer la transformée de Laplace pour $s = j\omega$. Il est donc logique que l'axe imaginaire du plan des s s'applique au cercle de rayon unité du plan des z, qui est le lieu des points correspondant à la transformée de Fourier d'un signal en temps discret. La figure 2.7 illustre pour un certains nombre de points la correspondance que l'on a entre plan z et plan s.

2.4 Fonction de transfert

2.4.1 Définition

On a vu au chapitre 2 que la sortie $y(n)$ d'un signal linéaire permanent de réponse impulsionnelle $g(n)$ est donnée par la convolution du signal d'entrée $x(n)$ et de $g(n)$. On écrit $y(n) = x(n) \otimes g(n)$. Compte tenu des propriétés de la transformée en z, on a dans le domaine transformé,

$$Y(z) = G(z)X(z). \tag{2.103}$$

La transformée en z, $G(z)$, de la réponse impulsionnelle $g(n)$ porte le nom de **fonction de transfert** du système linéaire permanent. Cette transformée en z, évaluée sur le cercle de rayon unité donne la transformée de Fourier $G(e^{j\Omega})$ de cette réponse impulsionnelle, qui porte le nom de **transmittance** du système.

2.4.2 Causalité - stabilité

On a vu que le domaine d'existence de la transformée en z d'une séquence causale est l'extérieur d'un cercle de rayon noté précédemment par R_-. Comme une transformée en z ne converge pas au droit des pôles, on peut en conclure que **tous les pôles sont nécessairement contenus à l'intérieur d'un cercle**. Donc, la fonction de transfert d'un système causal (c'est-à-dire dont la réponse impulsionnelle est causale) a ses pôles à l'intérieur d'un cercle.

Par ailleurs, un système est stable si sa réponse impulsionnelle $g(n)$ est de gamme dynamique bornée, ce qui signifie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| < \infty \tag{2.104}$$

Or,

$$|G(z)| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\, z^{-n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)\, z^{-n}| \tag{2.105}$$

et sur le cercle de rayon unité,

$$|G(e^{j\Omega})| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\, e^{-jn\Omega}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| \tag{2.106}$$

et si le dernier terme est borné, cela signifie bien que la transformée de Fourier existe. Ceci revient à dire que la fonction de transfert $G(z)$ doit converger sur le cercle de rayon unité, $|z| = 1$. Donc, pour que le système soit stable, **le cercle de rayon unité doit appartenir au domaine de convergence de la fonction de transfert qui est un anneau en toute généralité**.

Pour qu'un système soit **causal et stable**, il faut que le cercle de rayon unité appartienne au domaine de convergence, qui est l'extérieur d'un cercle. Compte tenu de ce qui a été dit précédemment, **les pôles du système doivent donc être contenus dans le cercle de rayon unité**. Ceci n'est rien d'autre que ce que l'on avait déjà pour les systèmes analogiques : pour avoir stabilité et causalité d'un système, les pôles doivent appartenir au demi-plan de gauche du plan des s. On a vu que le demi-plan de gauche du plan des s était mis en correspondance avec l'intérieur du cercle de rayon unité du plan des z.

En vertu aussi de la propriété de changement d'échelle, on peut rendre stable un système qui était instable en modulant la réponse impulsionnelle par une séquence exponentielle a^n qui ramène les pôles à l'intérieur du cercle de rayon unité.

Lorsque **à la fois les pôles et les zéros de la fonction de transfert appartiennent au cercle de rayon unité, on parle de système à phase minimale**. Il est souvent très utile de disposer de représentations de systèmes sous cette forme-là, car elle assure que le filtre de fonction de transfert inverse (qui permet donc de supprimer le premier effet de filtrage) est aussi causal et stable (les zéros devenant les pôles, et vice-versa).

Enfin tout ce qui est dit à propos des systèmes, qui est donc valable pour leur réponse impulsionnelle, peut aussi être transposé aux signaux et séquences eux-mêmes. On dit d'un signal qu'il est causal et de gamme dynamique bornée (on ne dit pas stable) lorsque les pôles de sa transformée en z sont contenus dans le cercle de rayon unité.

2.4.3 Equations aux différences

Lorsqu'un système est régi par une équation aux différences du type

$$\sum_{l=0}^{L} a_l\, y(n-l) = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x(n-m) \tag{2.107}$$

où $x(n)$ et $y(n)$ sont les séquences d'entrée (excitation) et de sortie (réponse), on peut obtenir la réponse de **régime** en passant par la transformée en z **bilatérale**. En utilisant les propriétés de linéarité et décalage, on trouve finalement

$$Y(z) \sum_{l=0}^{L} a_l\, z^{-l} = X(z) \sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m} \tag{2.108}$$

On en déduit que la fonction de transfert $G(z)$ s'écrit

$$G(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m}}{\sum_{l=0}^{L} b_l\, z^{-l}} \tag{2.109}$$

Cette fonction de transfert peut encore se mettre sous la forme

$$G(z) = G_0 \frac{\prod_{m=1}^{M} (1 - z_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N} (1 - p_n z^{-1})} \tag{2.110}$$

avec $G_0 = \lim_{z\to\infty} G(z)$. Pour trouver la réponse impulsionnelle, il suffit de décomposer cette équation en fractions simples et d'inverser ces dernières.

A ce stade-ci, la région de convergence de la transformée n'est pas précisée. On peut donc obtenir plusieurs réponses impulsionnelles suivant le domaine de convergence que l'on considère. Si on sait que le système auquel on s'intéresse est stable et / ou causal, on dispose de renseignements sur la zone de convergence.

Considérons l'équation aux différences du premier ordre donnée par

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \tag{2.111}$$

On a donc

$$G(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \tag{2.112}$$

Cette fonction de transfert possède un zéro en $z = 0$ et un pôle en $z = a$. Si on veut calculer la réponse impulsionnelle $g(n)$ en inversant $G(z)$ il faut spécifier le domaine de convergence.

1. Si on cherche un système stable, le cercle de rayon unité doit appartenir au domaine de convergence, et donc $a \neq 1$.
2. Si on cherche un système causal, le domaine de convergence est l'extérieur d'un cercle, et donc $|z| > |a|$. Dès lors, $g(n) = a^n\, u(n)$.
3. Si on cherche un système causal et stable, il faut à la fois $|a| < 1$ et $|z| > |a|$. On a alors une exponentielle décroissante.
4. Si on cherche un système anti-causal, la région de convergence doit être l'intérieur d'un cercle, et donc $|z| < |a|$. On peut trouver la réponse impulsionnelle par utilisation de la formule d'inversion donnée en 2.27 :

$$g(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z - a}\, \mathrm{d}z \tag{2.113}$$

Pour $n \geq 0$, on a un pôle en $z = a$ qui n'est pas entouré par un contour appartenant au domaine de convergence. On a un zéro d'ordre n en $z = 0$. Et donc $g(n \geq 0) = 0$. Pour $n < 0$, on a un pôle multiple d'ordre $(-n)$ en $z = 0$. On peut éviter de devoir utiliser la formule complexe de calcul du résidu en posant le changement de variable $w = 1/z$. Le domaine de convergence devient $|w| > |1/a|$ et le calcul est cette fois

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{w^{-n}}{w^2(1/w - a)}\, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{w^{-(n+1)}}{(1 - aw)}\, \mathrm{d}w \end{aligned} \tag{2.114}$$

On a cette fois, pour $n < 0$ uniquement un pôle en $w = 1/a$. Le calcul du résidu fait apparaître $g(n < 0) = -a^n$, et donc la réponse est

$$g(n) = -a^n\, u(-n - 1) \tag{2.115}$$

Ce système anti-causal sera stable si le cercle de rayon unité appartient au domaine de convergence $|z| < |a|$. Il faut dès lors que $1 < |a|$ pour avoir anti-causalité et stabilité.