

# Vision par ordinateur: Géométrie Projective

**Sébastien Roy**  
**Jean-Philippe Tardif**

Département d'Informatique et de recherche opérationnelle  
Université de Montréal



Hiver 2007



## Au programme

- ① Géométrie projective : Introduction
  
- ② Géométrie projective 2D
  - Éléments
  - Transformations
  
- ③ Géométrie projective 3D
  - Éléments
  - Transformations



## 1 Géométrie projective : Introduction

## 2 Géométrie projective 2D

- Éléments
- Transformations

## 3 Géométrie projective 3D

- Éléments
- Transformations

## Définition

### Géométrie projective

Branche des mathématiques qui étudie les entités géométrique, leur propriétés et invariances après projection.

Éléments de base :

- Point
- Ligne
- Plan
- Conique
- Quadrique

Exemple d'invariance :

- une ligne reste droite

1 Géométrie projective : Introduction

2 **Géométrie projective 2D**

- Éléments
- Transformations

3 Géométrie projective 3D

- Éléments
- Transformations

1 Géométrie projective : Introduction

2 **Géométrie projective 2D**

- **Éléments**
- Transformations

3 Géométrie projective 3D

- Éléments
- Transformations

- Vecteurs :
  - Point 2D :  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$
  - Point 3D :  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$
  - Ligne 2D :  $l$
  - Plan 3D :  $\pi$
- Matrices
  - Transformation, Projection :  $\mathcal{M}, \mathcal{A}$
  - Conique, Quadrique, Plücker :  $\mathcal{C}, \mathcal{Q}, \mathcal{L}$
- Symboles
  - $\equiv$  : le même élément
  - $\propto$  : proportionnel, identique à une facteur d'échelle
  - $\mathcal{A}^{-\top} = (\mathcal{A}^{-1})^{\top} = (\mathcal{A}^{\top})^{-1}$
  - $\mathcal{M}^*$  est l'adjointe de  $\mathcal{M}$

## Point (représentation homogène)

Le point  $\mathbf{P}$  euclidien est associé au point  $\mathbf{P}'$  dans l'espace projectif :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{P}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}' \in \mathbb{P}^3$$

Par définition on a l'équivalence

$$\mathbf{P}' \equiv h\mathbf{P}' \quad (h \neq 0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} hx \\ hy \\ hz \\ h \end{pmatrix}$$

et le dernier élément de  $\mathbf{P}'$  est la coordonnée homogène

$$\text{euclidien} \rightarrow \text{projectif} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} hx \\ hy \\ hz \\ h \end{pmatrix} \quad (h \neq 0)$$

$$\text{projectif} \rightarrow \text{euclidien} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/h \\ y/h \\ z/h \end{pmatrix}$$

## Dimensions d'un espace projectif

Espace projectif à deux dimensions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/h \\ y/h \end{pmatrix}$$

Espace projectif à trois dimensions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/h \\ y/h \\ z/h \end{pmatrix}$$

(...)

Addition de deux points projectifs :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ h_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2x_1 + h_1x_2 \\ h_2y_1 + h_1y_2 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ h \end{pmatrix}$$

Équivalent euclidien

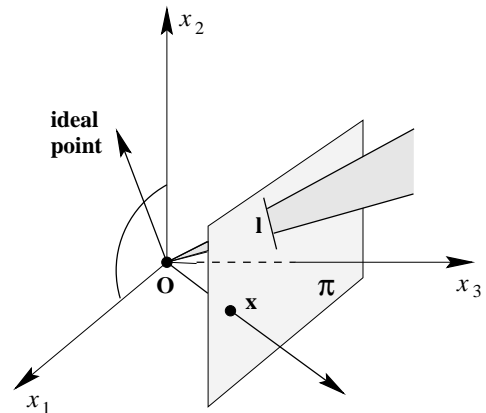
$$\begin{pmatrix} x_1/h_1 \\ y_1/h_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2/h_2 \\ y_2/h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_2x_1+h_1x_2}{h_1h_2} \\ \frac{h_2y_1+h_1y_2}{h_1h_2} \end{pmatrix}$$

## Comparer des points dans $\mathbb{P}^n$

- Transformer dans  $\mathbb{R}^n$   
Mais, quoi faire quand  $h = 0$ ?
- Normaliser  
Seul cas spécial :  $(0 \ 0 \ \dots)^T$
- Produit vectoriel  
 $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{0}$   
Fonctionne toujours mais plus coûteux

Vous pouvez visualiser  $\mathbb{P}^2$  avec  $\mathbb{R}^3$

- Seule la direction est importante
- Le plan  $Z = 0$  est la plan infini
- $\mathbb{R}^2$  est le plan  $Z = 1$



Encore mieux

$\mathbb{P}^2$  est la surface d'une sphère

- En supposant qu'on garde les points normalisés



## Ligne

En forme implicite, l'équation d'une ligne est :

$$ax + by + c = a(hx) + b(hy) + ch = 0$$

où

- $\mathbf{l} = (a \ b \ c)^T$  est une ligne
- $\mathbf{p} = (hx \ hy \ h)^T$  est un point sur la ligne

On peut donc réécrire sous la forme :

$$\mathbf{l}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{l} = 0$$

$\mathbf{p}$  et  $\mathbf{l}$ , sont des **3-vecteurs** tous les deux.



## Dualité (non-formelle)

Lorsqu'un énoncé, obtenu à partir d'un premier énoncé (théorème) dans lequel les concepts sont substitués par leur dual, est, lui-aussi, vrai.

## Dualité en géométrie projective 2D

À chaque théorème de géométrie projective 2D, correspond un théorème dual, construit à partir de l'original, en inter-changeant le rôle des points et des lignes.

Généralisation : point/plan et même point/hyper-plan



## Dualité projective 2D : point-ligne

Exemple :

L'ensemble des points  $\mathbf{p}$  sur la ligne  $\mathbf{l}$  sont donnés par

$$\mathbf{l}^T \mathbf{p} = 0.$$

et

L'ensemble des lignes passant par le point  $\mathbf{p}$  sont donnés par

$$\mathbf{p}^T \mathbf{l} = 0.$$

On peut interchanger points et lignes dans le premier énoncé pour obtenir le deuxième et ils sont tous deux vrais.





## 2 points $\rightarrow$ ligne, 2 lignes $\rightarrow$ point

Pour deux lignes  $l$  et  $l'$ , on cherche un point  $p$  tel que

$$l^T p = l'^T p = 0$$

Grâce à l'identité du produit scalaire triple :

$$l \cdot (l \times l') = l' \cdot (l \times l')$$

On obtient directement que :

Le point d'intersection de  $l$  avec  $l'$ , est donné par :

$$p \equiv l \times l' \equiv l' \times l$$

Grâce au principe de **dualité**, on obtient aussi directement que :

La ligne joignant deux points  $p$  et  $p'$ , est donné par :

$$l \equiv p \times p' \equiv p' \times p$$

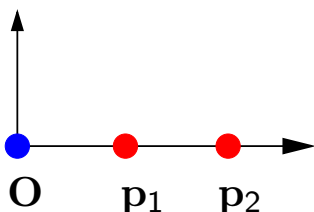


## Point à l'infini

### Point idéal

Un point de la forme  $(x \ y \ 0)^T$ .

- Ne peut-être représenté dans  $\mathbb{R}^2$
- $(x \ y)$  donne la direction



$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Exemple : deux lignes parallèles

$$l_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, l_1 \times l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Toutes les lignes passent par l'infini

## Ligne à l'infini

$l_\infty$

Elle est constituée des points à l' $\infty$  : de la forme  $(a \ b \ 0)^T$ , d'où

$$l_\infty \propto (0 \ 0 \ c)^T$$

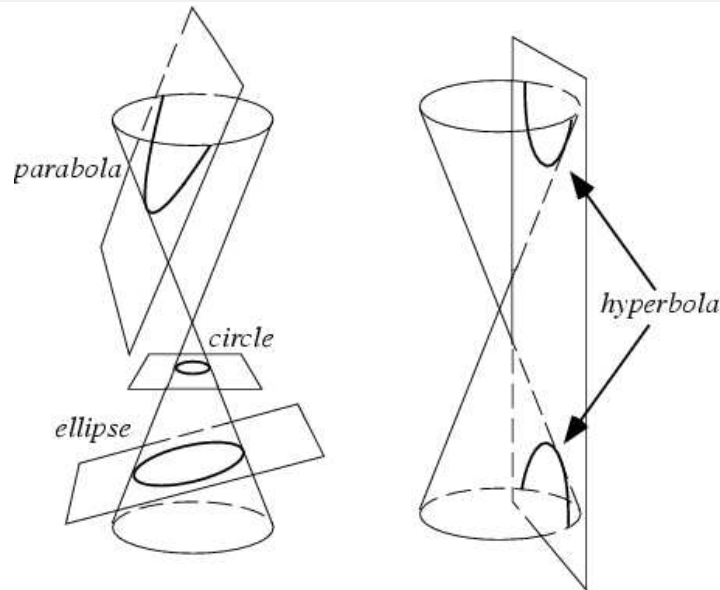
- $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup l_\infty$

Exemple, ligne joignant deux points à l' $\infty$  :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1 \times p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Conique ou Courbe quadratique

L'image de l'intersection d'un plan avec un cône droit, situé dans le système de coordonnées du plan



- L'orientation du plan par rapport au cône → différentes formes de courbe



## Conique de points

La forme générale d'une conique  $\mathcal{C}$  est donnée par l'équation implicite :

$$ax^2 + dx + bxy + cy^2 + ey + f = 0$$

$\mathbf{p} \equiv (x \ y \ 1)^T$  un point sur la conique

$\{a, b, c, d, e, f\}$  sont les paramètres

On peut réécrire le tout sous forme :

$$\mathcal{C} \propto \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{p}^T \mathcal{C} \mathbf{p} = 0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

$\mathcal{C}$  Matrice ( $3 \times 3$ ), symétrique, rang 3, définie à un facteur d'échelle

Trouver la sorte de courbe à partir de  $\mathcal{C}$  ?

Voir <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticCurve.html>



# Conique Duale : conique de lignes

Encore une fois, grâce à la dualité :

Une ligne  $l$  est tangente à une conique  $C$  si

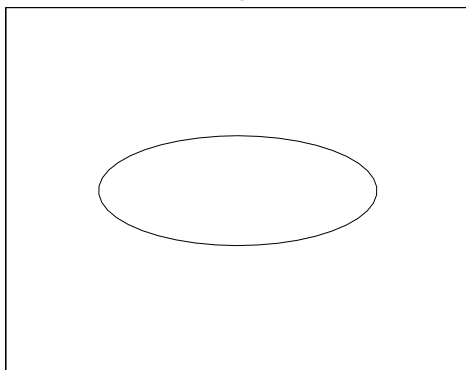
$$l^T C^* l = 0$$

où  $C^*$  est l'adjointe de  $C$

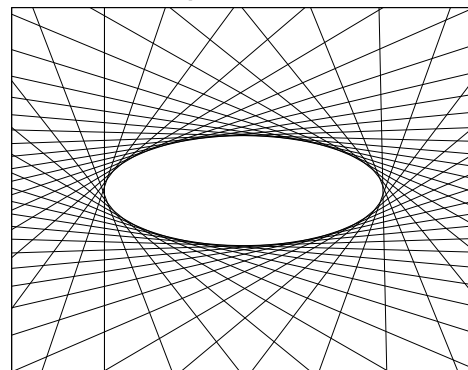
- Pour une matrice symétrique inversible :  $C^* = C^{-1}$

Exemple :

Ellipse



Ellipse Duale



# Conique Duale : conique de lignes

Pourquoi le résultat ( $l^T C^* l = 0$ ) est valide ?

Autre résultat

Une ligne  $l$  tangente  $C$  au point  $p$  est donnée par

$$l = Cp$$

et donc

$$\begin{aligned} p^T C p &= (C^{-1} l)^T C (C^{-1} l) \\ &= l^T C^{-1} l \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les coniques duales seront utiles pour la **calibration** et **l'auto-calibration** de caméras.

Lorsque le plan coupant le cône passe par son centre :  $\mathcal{C}$  singulière (non-inversible)

Résultat :

- Un point
- Une ligne
- Deux lignes qui s'intersectent

Essayez-le dans Mathematica !

◀ □ ▶ ◀ ☰ ▶ ◀ ☰ ▶ ☰ ☰ ☰ 🔍 ↻

## Conique dégénérée

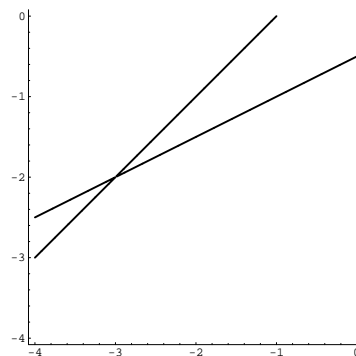
Exemple : Construire une conique dégénérée à partir de 2 lignes

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2^T + \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_1^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{C}$  est dégénérée :  $\text{Rang}(\mathcal{C}) = 2$
- Vérifions :

$$\begin{aligned} (x \ y \ 1) \mathcal{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ -2(-1 + x - 2y)(1 + x - y) &= 0 \\ x &= -1 + y, \quad x = 1 + 2y \end{aligned}$$

On retrouve nos lignes.  
Pourquoi ?



◀ □ ▶ ◀ ☰ ▶ ◀ ☰ ▶ ☰ ☰ ☰ 🔍 ↻

## Conique constitué de points complexes

Exemples :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Dégénérée :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

## Conique : petits exercices

Certains algorithmes de vision nécessitent l'analyse de coniques dans les images.

Pour une conique  $\mathcal{C}$ , trouver formule/algorithmes pour :

- le centre
- les axes
- les points focaux
- vérifier si deux coniques sont identiques, modulo :
  - rotation/translation
  - changement d'échelle

1 Géométrie projective : Introduction

2 Géométrie projective 2D

- Éléments
- Transformations

3 Géométrie projective 3D

- Éléments
- Transformations

## Transformation 2D : affine

En euclidien, une transformation **Affine** est donnée par :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$$

On peut la réécrire pour des points projectifs :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

→ 6 degrés de liberté

- C'est la transformation linéaire la plus générale de  $\mathbb{R}^2$

## Similarité :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} s\mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

→ 4 degrés de liberté

## Euclidienne

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

→ 3 degrés de liberté

$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$  est une matrice de rotation 2D, i.e.

$$\mathcal{R}^\top \mathcal{R} = I, \quad \det(\mathcal{R}) = 1$$



# Transformation projective

En projectif, il y a une transformation linéaire encore plus générale :

## Transformation **Projective**

Il s'agit d'une transformation linéaire entre deux plans projectifs  $\pi_1$  et  $\pi_2$

$$\mathbf{p} = \mathcal{H}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

- $\mathcal{H}$  est couramment appelé **Homographie**
- $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  sont respectivement sur  $\pi_1$  et  $\pi_2$

On dit alors que  $\mathcal{H}$  fait un transfert de  $\pi_2$  vers  $\pi_1$

→ 8 degrés de liberté

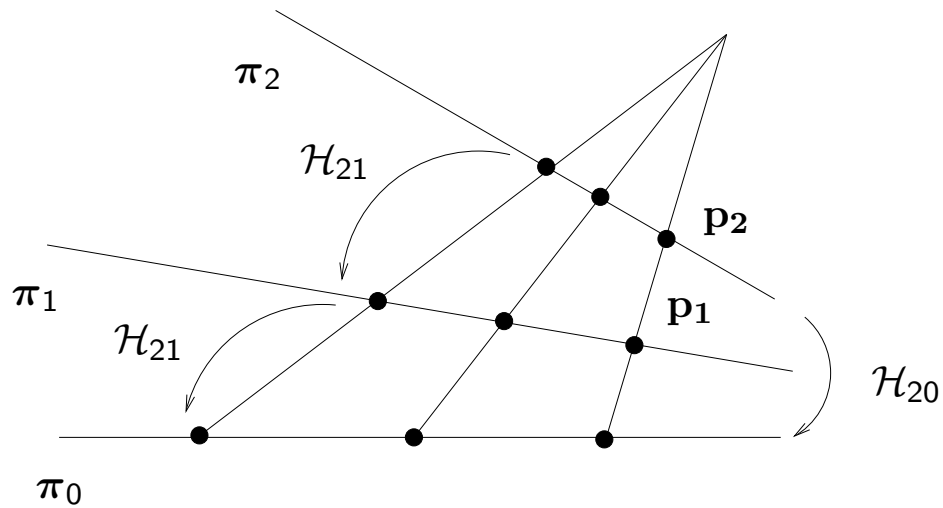
- À un facteur d'échelle
- Inversible
- Englobe toute les autres transformations



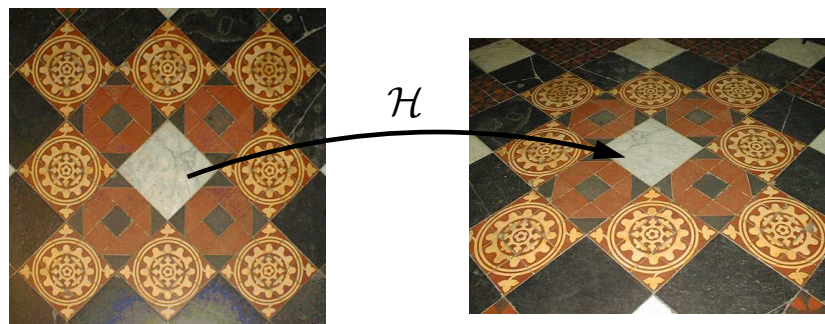


- Pour deux relations  $\mathcal{H}_{01} : \pi_0 \rightarrow \pi_1$  et  $\mathcal{H}_{12} : \pi_1 \rightarrow \pi_2$ , on peut construire  $\mathcal{H}_{02} \propto \mathcal{H}_{01}\mathcal{H}_{12} : \pi_0 \rightarrow \pi_2$

Exemple d'illustration 1D



Exemple :



- Le premier plan est Euclidien
- Il a subi une transformation projective pour donner le deuxième

# Transformation projective appliquée aux lignes

Supposons une ligne  $\mathbf{v} \propto \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ , la transformation projective  $\mathcal{H}$  s'applique sur  $\mathbf{v}$  selon :

$$\mathbf{u} \propto \mathcal{H}^{-\top} \mathbf{v}$$

Pourquoi ?

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\propto (\mathcal{H}\mathbf{p}) \times (\mathcal{H}\mathbf{q}) \\ &\propto \mathcal{H}^{-\top}(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \\ &\propto \mathcal{H}^{-\top}(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \\ &\propto \mathcal{H}^{-\top} \mathbf{v} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}^{-\top}$  veut dire inverse/transpose ou transpose/inverse de  $\mathcal{H}$ , puisque l'ordre n'est pas important



# Transformation projective appliquée aux coniques

- Conique originale  $\mathbf{p}^{\top} \mathcal{C} \mathbf{p} = 0$
- Transformons  $\mathbf{p}' = \mathcal{H}\mathbf{p}$
- Nous cherchons  $\mathcal{C}'$  t.q.  $\mathbf{p}'^{\top} \mathcal{C}' \mathbf{p}' = 0$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}\mathbf{p})^{\top} \mathcal{C} \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}\mathbf{p} &= 0 \\ (\mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}')^{\top} \mathcal{C} \mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}' &= 0 \\ \mathbf{p}'^{\top} \mathcal{H}^{-\top} \mathcal{C} \mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}' &= 0 \\ \mathbf{p}'^{\top} \mathcal{C}' \mathbf{p}' &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{C}' \propto \mathcal{H}^{-\top} \mathcal{C} \mathcal{H}^{-1}$$



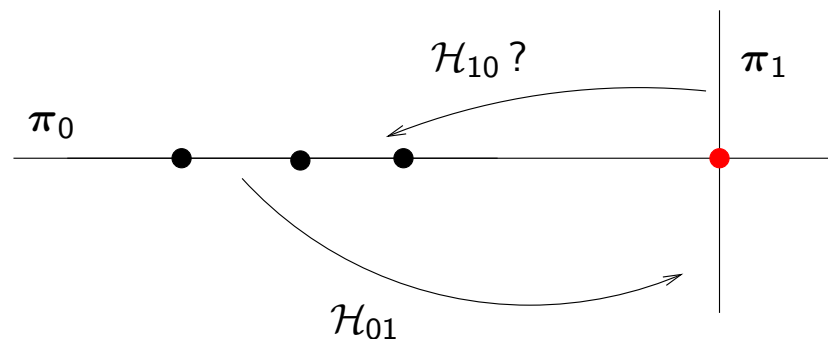
Peut-on trouver une transformation projective pour transformer une ellipse en

- parabole ?
- hyperbole ?
- en 2 lignes ?
- un point ?
- n'importe quel point ?



## Cas dégénérés

Exemple 1D :



### Exercice

- Imaginez les situations dégénérées en 2D
- Pour chacune d'elles, que se passe-t-il avec  $\mathcal{H}_{01}$
- Quelles sont les conséquences sur  $\mathcal{H}_{10}$  ?



Pour une transformation affine, un point à l'infini et  $l_\infty$  reste à l'infini.

- Pour le **point** :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{1T} \\ A^{2T} \\ A^{3T} \end{bmatrix}, \text{ et donc } A^{3T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

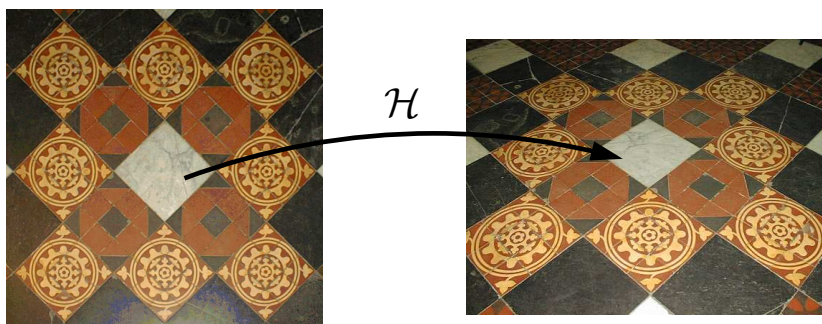
- Pour la **ligne** :

$$\mathcal{A}^{-T} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \\ t'_x & t'_y & 1 \end{bmatrix}, \text{ et donc } \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{l}_\infty = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

## Ligne à l'infini et non-invariance projective

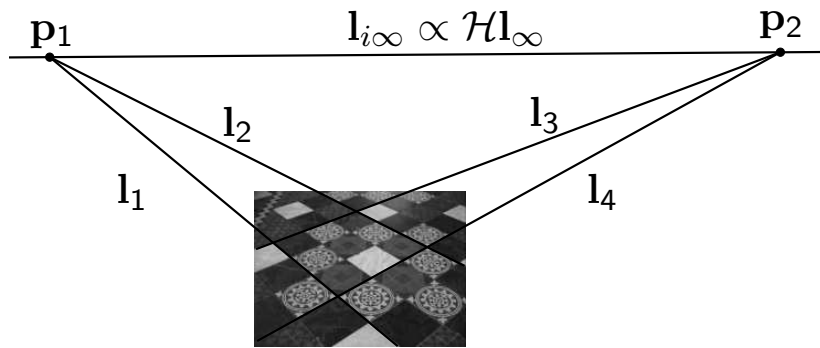
Observer que l'infini (un point à l' $\infty$  ou  $l_\infty$ ) n'est pas invariant à une transformation projective !

Exemple :



# Ligne à l'infini et non-invariance projective

Exemple (suite) :



Dans le plan **euclidien** (image précédente)

- $l_1$  et  $l_2$  sont parallèles, se coupent à l'infini
- $l_3$  et  $l_4$  aussi

Dans ce plan **projectif** :

- ATTENTION :  $l_{i\infty}$  n'est pas  $l_{\infty}$ , c'est son **image** !
- $p_1$  et  $p_2$  passent maintenant par  $l_0$



## Rectification affine

### Définition

Appliquer une transformation à l'image pour ramener la ligne  $l_{i\infty}$  à  $l_{\infty}$ .

- Supposons  $l_{i\infty} = (l_1 \ l_2 \ l_3)^T$
- On cherche  $\mathcal{H}$  t.q.  $\mathcal{H}^{-T}l_{i\infty} \propto (0 \ 0 \ 1)^T$

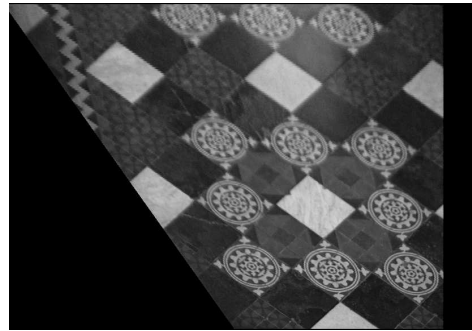
$$\mathcal{H}^{-T} \propto \begin{bmatrix} l_3 & 0 & -l_1 \\ 0 & l_3 & -l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ d'où } \mathcal{H} \propto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$$



# Rectification affine

Cette transformation n'est pas unique !

- Suivie d'une transformation affine
- $\mathcal{H}' = \mathcal{A}\mathcal{H}$



À droite :

- Les lignes qui devraient être parallèles le sont !
- Mais les angles ne sont pas rectifiés

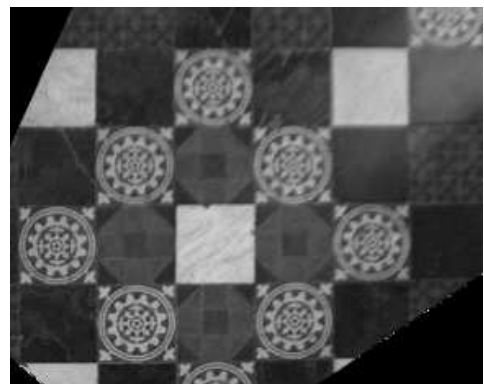


# Rectification affine

- $l_\infty$  est fixe sous transformation affine
- Trouver son image permet de rectifier l'image
- Mais seulement à une transformation affine près

Peut-on faire plus ? Oui !

- Rectification euclidienne
- Il faut trouver l'image de la conique duale aux points circulaires  
(La conique quoi ? !)
- Pas dans le cours



# Mosaïque (avant-goût)

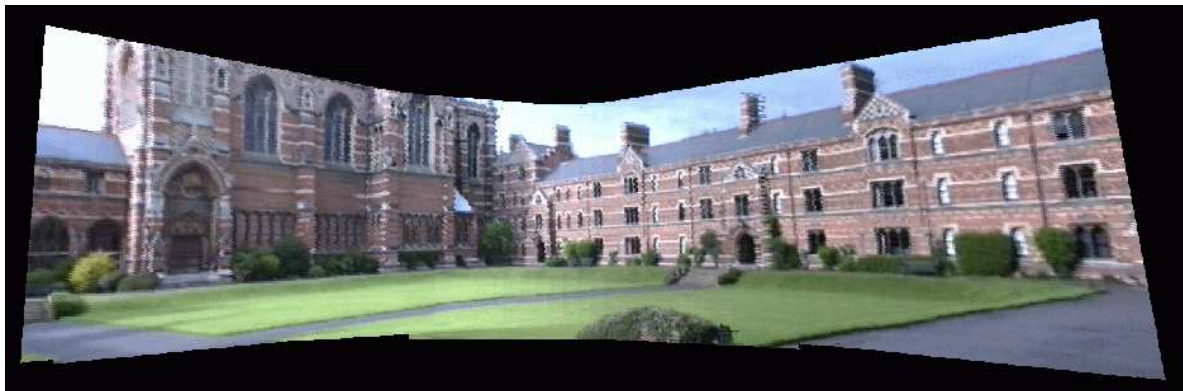
Une application des homographies (TP1!)

## Construction de mosaïque

- Combiner plusieurs images pour obtenir une image panoramique
- Caméra en rotation pure



# Mosaïque (avant-goût)



## Petit algorithme simple

- Choisir une vue de référence
- Calculer les homographies entre celle-ci et les autres images
- Reprojeter ces images dans la vue de référence

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
  - Éléments
  - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D**
  - Éléments
  - Transformations

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
  - Éléments
  - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D**
  - Éléments
  - Transformations



En forme implicite, l'équation d'un plan est :

$$ax + by + cz + d = a(hx) + b(hy) + c(hz) + hd = 0$$

où

- $\boldsymbol{\pi} = (a \ b \ c \ d)^T$  est un plan 3D
- $\mathbf{n} = (a \ b \ c)^T$  est la normale du plan
- $\mathbf{P} = (hx \ hy \ hz \ h)^T$  est un point sur le plan

On peut donc réécrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\pi} = 0$$

$\mathbf{P}$  et  $\boldsymbol{\pi}$ , sont des **4-vecteurs** tous les deux

Dualité dans  $\mathbb{P}^3$

Point vs Plan



## Dualité projective 3D : point-plan

Exemple :

L'ensemble des points  $\mathbf{P}$  sur le plane  $\boldsymbol{\pi}$  sont donnés par

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P} = 0.$$

et

L'ensemble des plans passant par le point  $\mathbf{P}$  sont donnés par

$$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\pi} = 0.$$



## Dualité projective 3D : point-plan

Trois points donnent un plan :

$$\mathcal{P}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^\top \\ \mathbf{P}_2^\top \\ \mathbf{P}_3^\top \end{bmatrix} \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$$

- Le rang de  $\mathcal{P}$  est au plus 3
- $\boldsymbol{\pi}$  est donc le noyau droit de  $\mathcal{P}$

Pour calculer  $\boldsymbol{\pi}$  :

$$\det [\mathbf{P} \quad \mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3] = 0$$

$$aX + bY + cZ + dH = 0, \quad \text{avec } \mathbf{P} = (X \ Y \ Z \ H)^\top$$

- a,b,c,d sont donnés par des déterminants de sous-matrices de  $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$
- Donc  $\boldsymbol{\pi} = (a \ b \ c \ d)^\top$



## Dualité projective 3D : point-plan

Trois plans s'intersectent en un point :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1^\top \\ \boldsymbol{\pi}_2^\top \\ \boldsymbol{\pi}_3^\top \end{bmatrix} \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

Trouver le point est exactement comme précédemment.



$$\pi_\infty = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

- Ne contient que des points à l'infini ( $h = 0$ )
- Là où les lignes/plans parallèles se coupent
- Similaire à  $\mathbf{l}_\infty$  de  $\mathbb{P}^2$ , mais pour  $\mathbb{P}^3$
- 3 degrés de liberté
- Permet une rectification affine en 3D  
Reconstruction projective  $\rightarrow$  affine (plus tard dans le cours)



## Ligne

Représenter une ligne n'est pas si évident.

Forme paramétrique

Construite à partir de deux points :

$$\lambda \mathbf{P}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{P}_2$$

Noyau (*Nullspace*) et étendu (*Span*)

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \\ \mathbf{P}_2^T \end{bmatrix}$$

Forme Implicite

Matrices de Plücker



À partir de points

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^\top \\ \mathbf{P}_2^\top \end{bmatrix}$$

- Noyaux de  $\mathcal{L}$  : l'ensemble des plans passant par  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$ .
- Étendu de  $\mathcal{L}$  :  $\lambda\mathbf{P}_1 + \mu\mathbf{P}_2$

Dual (avec des plans)

$$\mathcal{L}^* = \begin{bmatrix} \pi_1^\top \\ \pi_2^\top \end{bmatrix}$$

Une ligne + un point  $\mathbf{P}_3 \rightarrow$  plan  
Noyau de  $\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathbf{P}_3^\top \end{bmatrix}$

Une ligne + un plan  $\pi_3 \rightarrow$  point  
Noyau de  $\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \pi_3^\top \end{bmatrix}$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

## Matrice de Plücker

Ligne de  $\mathbb{P}^3$  représentée grâce à une matrice  $\mathcal{L}_{4 \times 4}$  : ligne joignant deux points 3D

- Nos deux points  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$

On construit :

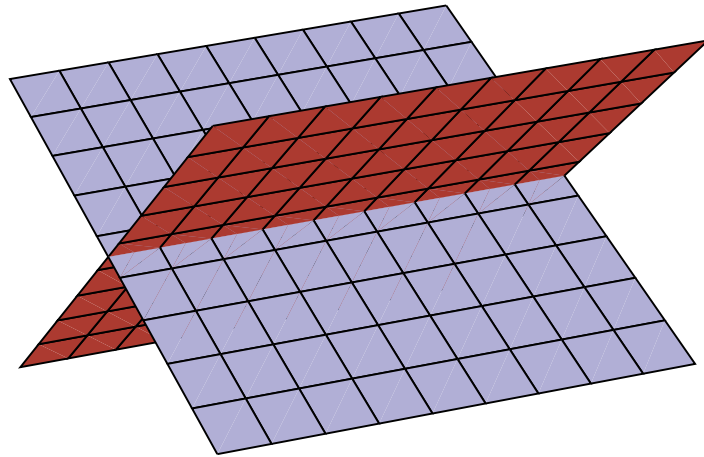
$$\mathcal{L} \propto \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^\top - \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^\top$$

- Un plan  $\pi$  passant par  $\mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_1^\top \pi = 0$
- Un plan  $\pi$  passant par  $\mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2^\top \pi = 0$   
 $\mathcal{L}\pi = 0$

- Pour  $\pi'$  t.q.  $\mathcal{L}\pi' = \mathbf{P} \neq 0$   
 $\mathbf{P}$  est le point créé par l'intersection de  $\mathcal{L}$  avec  $\pi'$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

Illustration



## Matrice duale de Plücker

Ligne de  $\mathbb{P}^3$  représentée grâce à une matrice  $\mathcal{L}_{4 \times 4}$  : l'intersection de deux plans

- Nos deux points  $\pi_1, \pi_2$

On construit :

$$\mathcal{L}^* \propto \pi_1 \pi_2^T - \pi_2 \pi_1^T$$

- Un point  $\mathbf{P}$  passant par  $\pi_1 \rightarrow \pi_1^T \mathbf{P} = 0$
- Un point  $\mathbf{P}$  passant par  $\pi_2 \rightarrow \pi_2^T \mathbf{P} = 0$   
 $\mathcal{L} \mathbf{P} = 0$
- Pour  $\mathbf{P}'$  t.q.  $\mathcal{L} \mathbf{P}' = \pi \neq 0$   
 $\pi$  est le plan créé en joignant  $\mathcal{L}$  avec  $\mathbf{P}'$



# Matrice des cofacteurs

## Matrice des cofacteurs

Matrice composée de ses cofacteurs élément par élément.

$A_{ij}$  est le déterminant de  $\mathcal{A}$  après avoir enlevé la rangée  $i$  et la colonne  $j$ , multiplié par  $(-1)^{i+j}$

$$\text{Cof}\mathcal{A} = [A_{ij}], \quad i : \text{indice de rangées}, j : \text{indice de colonnes}$$

Exemple :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{Cof}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 28 & 3 & -26 \\ -28 & 37 & 6 \\ 0 & -25 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{21} = - \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{22} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{23} = - \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{32} = - \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{33} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Navigation icons

## Mathematica à votre service pour vos diapos

### Matrices de la Diapo précédente

```
<< DiscreteMath`Combinatorica`
m = {{9, 6, 5}, {4, 6, 5}, {7, 4, 8}}

Unprotect[Det];
Clear[Det];
Det[x_] := ToString[TeXForm[x]];

Table[{Subscript[M, j, i], Cofactor[m, {j, i}]}, {j, 1, 3}, {i, 1, 3}] //
  Flatten[#, 1] &;
{TeXForm#[[1]], "=", #[[2]]} & /@ %;
Map[ToString, %, {2}] ;
StringJoin /@ %;
StringReplace[#, "(" -> "|"] & /@ %;
StringReplace[#, ")" -> "|"] & /@ %;
StringReplace[#, "M" -> "\m M"] & /@ %;
StringReplace[#, "," -> "" ] & /@ %
```

Navigation icons

## Matrice adjointe

Matrice des cofacteurs, transposée

$$\mathcal{A}^* = \text{Cof}\mathcal{A}^T = [A_{ji}]$$

- Il y a une formule de passage  $\mathcal{L} \leftrightarrow \mathcal{L}^*$
- Sans utiliser la matrice des cofacteurs
- Je vous laisse la trouver

# Vecteurs de Plücker

## Les 6 éléments non-nuls de la matrice de Plücker

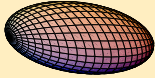
- Nous ne les verrons pas en détails dans ce cours
- Certains avantages par rapport aux matrices
- Passage matrice  $\leftrightarrow$  vecteur est simple

# Quadrique ou Surface Quadratique

- Extension des coniques au monde 3D
- $Q_{4 \times 4}$ , à un facteur d'échelle
- 17 quadriques différentes !

Non-dégénérée :  $\text{rang}(Q) = 4$

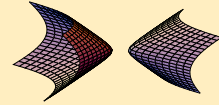
Ellipsoïde (sphère)



Paraboloïde



Hyperboloïde



- Dégénérée :  $\text{rang}(Q) < 4$ 
  - Plans
  - Cône
  - Cylindre
  - ...

Voir <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticSurface.html>



## Sommaire

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
  - Éléments
  - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D
  - Éléments
  - Transformations





**Projective (homographie 3D)**

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

**Similarité**

$$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & sr_{13} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & sr_{23} & t_y \\ sr_{31} & sr_{32} & sr_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Affine**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Euclidienne**

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matrice de rotation****Définition**

En euclidien

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = I$

- ★ si  $\det(\mathcal{R}) = 1$ , c'est une rotation propre
- si  $\det(\mathcal{R}) = -1$ , elle est impropre (rotoinversion)
- 3 degrés de liberté

## Paramétrisation de Euler

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}(\phi)\mathcal{R}(\theta)\mathcal{R}(\rho) \\ \mathcal{R}(\phi) &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{R}(\theta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathcal{R}(\rho) &= \begin{bmatrix} \cos(\rho) & \sin(\rho) & 0 \\ -\sin(\rho) & \cos(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



# Paramétrisation de matrice de rotation

## Paramétrisation de Rodrigues

- Rotation autour de  $\theta$  degrés autour d'un axe  $\mathbf{n}$

$$\mathcal{R} = I_{3 \times 3} \cos \theta + \mathbf{n} \mathbf{n}^T (1 - \cos \theta) + [\mathbf{n}]_{\times} \sin \theta$$

$$[(n_1, n_2, n_3)^T]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Paramétrisation redondante
  - $\|\mathbf{n}\| = 1$   
ou
  - remplacer  $\theta = \|\mathbf{n}\|$



# Transformation des éléments

Pour  $\mathcal{H}_{4 \times 4}$

- Point

$$\mathcal{H}\mathbf{P}$$

- Plan

$$\mathcal{H}^{-\top} \boldsymbol{\pi}$$

- Matrice de Plücker

$$\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{H}^{\top}$$

- Quadrique

$$\mathcal{H}^{-\top} \mathcal{Q}\mathcal{H}$$

## Exercice

Essayer de bien comprendre d'où elles proviennent à partir de leur définition



# Projection

Voici les deux projections qui nous intéressent le plus :

Matrice de projection perspective :  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix}$$

Projection sur un plan **projectif**

Matrice de projection Affine :  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \end{bmatrix}$$

Projection sur un plan **euclidien**

Elles nous seront utiles pour représenter les différents types de **caméras**.



# Projection des éléments

Pour une matrice de projection  $\mathcal{M}_{3 \times 4}$

- Point

$$\mathbf{p} = \mathcal{M}\mathbf{P}$$

- Plan (points tous sur un même plan)

Ramener les coordonnées du plan t.q.  $Z = 0$

$$\mathbf{p} = \mathcal{M}\mathbf{P} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_3 \quad \mathbf{M}_4] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_4] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il existe donc  $\mathcal{H}_{3 \times 3}$

- Matrice de Plücker et Duale  $\rightarrow$  ligne  $\mathbb{P}^2$

$$[\mathbf{l}]_{\times} = \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{M}^T$$

- Quadrique duale  $\rightarrow$  Conique duale

$$\mathcal{C}^* \propto \mathcal{M}\mathcal{Q}^*\mathcal{M}^T$$



## Matrice symétrique gauche

Matrice symétrique gauche (*skew-symmetric*)

$$[\mathbf{a}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}$$



- Notions de bases d'algorithmes numériques
- Décomposition de matrice
- Ajustement (fit)



FIN

Certaines figures sont la courtoisie de  
R. Hartley et A. Zisserman  
Multiple View Geometry in Computer Vision, 1ère Édition, 2002

