

# IFT 6145

## Vision tridimensionnelle

### Calibration II

Sébastien Roy  
Département d'informatique et de recherche opérationnelle  
Université de Montréal

hiver 2005

## En bref...

Pas dans le livre *Trucco & Verri*.  
– Estimation analytique de la pose

International Journal of Computer Vision, 13, 3, 331–356 (1994)  
© 1994 Kluwer Academic Publishers. Manufactured in The Netherlands.

*Systems and Replication*  
**Review and Analysis of Solutions of the Three Point Perspective  
Pose Estimation Problem**

## Déterminer la pose

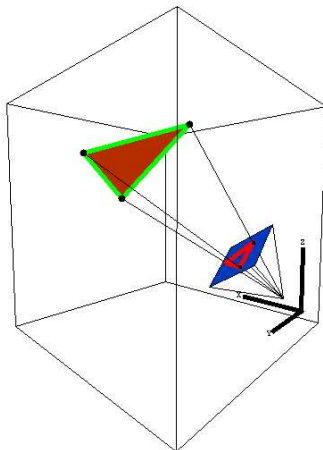
=

Calibration des paramètres externes.  
(paramètres internes connus)

1

## Méthode analytique

- Utilise 3 paires de points correspondants 2D-3D
- Pas de système d'équation linéaires (→ analytique)



2

## Le problème

- Soit trois points 3D quelconques  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , et  $\mathbf{w}$ . Ces points représentent un triangle dans la scène.
- Le triangle  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{f}$  est l'image du triangle  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$
- Soit trois vecteurs  $\mathbf{d}'$ ,  $\mathbf{e}'$  et  $\mathbf{f}'$  normalisés attachés à l'origine et définis comme

$$\mathbf{d}' = \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} \quad \mathbf{e}' = \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|} \quad \mathbf{f}' = \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|}$$

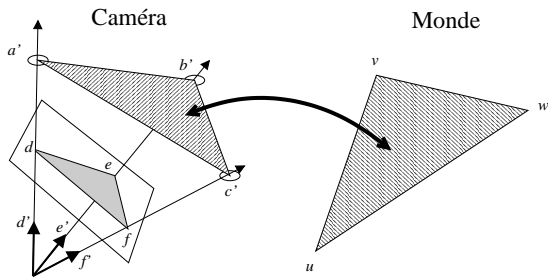
- Soit le triangle  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$  et  $\mathbf{c}'$  décrivant un triangle dans le système de la caméra, obtenu par

$$\mathbf{a}' = a \mathbf{d}' \quad \mathbf{b}' = b \mathbf{e}' \quad \mathbf{c}' = c \mathbf{f}'$$

o'ù  $a, b, c$  sont des scalaires.

3

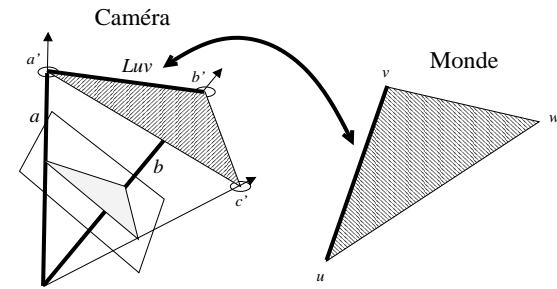
## Le problème



Il faut donc trouver où placer  $a', b', c'$  tels que le triangle formé soit identique à  $u, v, w$ .

4

## Le problème



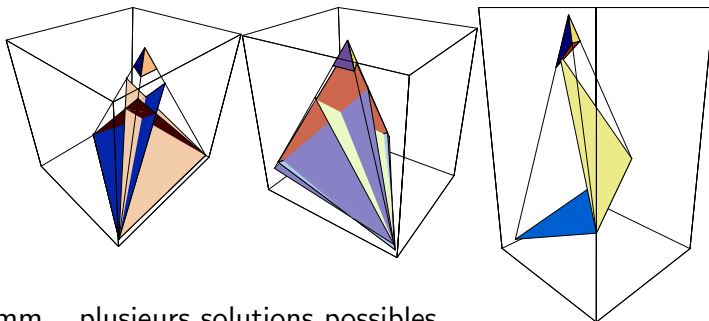
Puisque  $a' = a d'$ , ...  $\rightarrow$  équivaut à trouver  $a, b, c$ .

On peut transposer la longueur  $L_{uv}$  du segment  $u, v$  du monde vers le système de la caméra.

$\rightarrow$  On forme le triangle défini par les longueurs  $a, L_{uv}, b$

5

## Quelques exemples



Humm... plusieurs solutions possibles...

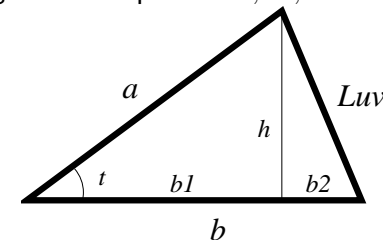
6

## Reformulons le problème

Soit les longueurs des cotés du triangle  $u, v, w$  tels que

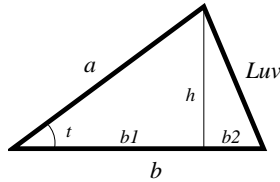
$$L_{uv} = \|u - v\| \quad L_{vw} = \|v - w\| \quad L_{wu} = \|w - u\|$$

et  $a, b, c$  les longueurs des points  $a', b', c'$ .



Quel est le rapport entre  $a, b$ , et  $L_{uv}$  ?

7



$$\begin{aligned}
 h &= a \sin \theta \\
 b_1 &= a \cos \theta \\
 b_2 &= b - b_1 \\
 L_{uv}^2 &= h^2 + b_2^2 \\
 &= a^2 \sin^2 \theta + b^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2ba \cos \theta \\
 &= a^2 + b^2 - 2ba \cos \theta
 \end{aligned}$$

8

## Équations de base

Si on applique sur chaque triangle  $(a, L_{uv}, b)$ ,  $(b, L_{vw}, c)$ ,  $(c, L_{wu}, a)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 L_{uv}^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta_{ab} \\
 L_{vw}^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_{bc} \\
 L_{wu}^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \theta_{ca}
 \end{aligned}$$

→ on cherche  $a, b, c$   
 → on connaît  $L_{uv}, L_{vw}, L_{wu}$   
 → on connaît  $\cos \theta_{ab}, \cos \theta_{bc}, \cos \theta_{ca}$  (parce que  $\theta_{ab} = \theta_{a'e'}, \dots$ )  
 ⇒ trois systèmes à trois inconnues... hummm....

9

## Solution

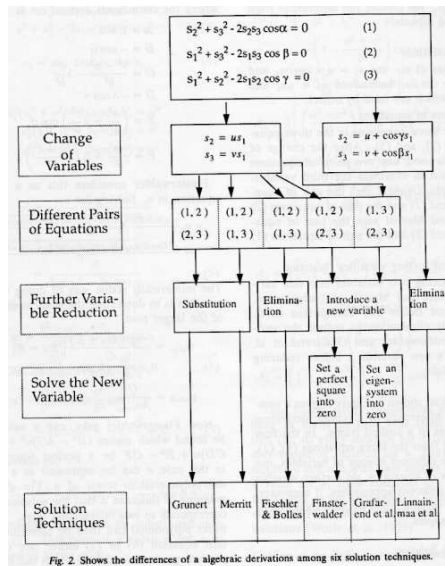


Fig. 2. Shows the differences of a algebraic derivations among six solution techniques.

10

## Solution

À partir des 3 équations de base, on obtient un polynome de degré 4.

$$g_4x^4 + g_3x^3 + g_2x^2 + g_1x + g_0 = 0$$

avec

$$a = \frac{L_{uv}}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_{ab} + 1}}$$

La solution de ce polynome nous donne  $a$ , et on peut ensuite retrouver  $b$  et  $c$  directement par les équations de base.

- Il peut y avoir jusqu'à 4 solutions
- Les solutions complexes ou négatives sont éliminées

11

## (Solution d'un polynome de degré 4)

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

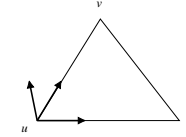
Solution analytique :

$$\left\{ x \rightarrow \frac{-b}{4a} - \sqrt{\frac{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \frac{\frac{1}{27}(c^2 - 3bd + 12ae)}{3a \left( 2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2} \right)}}{3a}}$$

12

## Retrouver la transformation

- Le triangle  $u, v, w$  définit un système de coordonnées par rapport à la scène.



$$\text{axe}_x = v - u \quad \text{axe}_y = w - u \quad \text{axe}_z = (w - u) \times (v - u)$$

- Le triangle  $a', b', c'$  définit un système de coordonnées par rapport au système de la caméra.

→ La transformation est obtenue en comparant ces deux systèmes d'axes.

13

## Stabilité, Robustesse, Solutions multiples

### Stabilité

Si les points  $a, b, c$  et  $u, v, w$  ne sont pas colinéaires, le polynome n'est pas dégénéré et la solution est stable.

### Robustesse

On utilise que 3 points. Que faire lorsque plus de points sont disponibles ?

### Solutions multiples

On obtient jusqu'à 4 solutions. Comment trouver la bonne ?

14

## Robustesse

Avec plusieurs points...

- Résoudre toutes les permutation de 3 points possibles.  
(1,2,3,4) → (1,2,3) (1,2,4) (1,3,4) (2,3,4)
- Pour chaque solution, reprojeter les points 3D non utilisés selon la transformation obtenue
- Calculer l'erreur de reprojection avec les points 2D correspondants.
- La transformation qui minimise l'erreur gagne.

**Une pierre, deux coups** : le problème des solutions multiple est disparu !

15