

**IFT 6145**  
**Vision tridimensionnelle**  
**Calibration II**

Sébastien Roy  
Département d'informatique et de recherche opérationnelle  
Université de Montréal

hiver 2005

# En bref...

Pas dans le livre *Trucco & Verri*.

– Estimation analytique de la pose

International Journal of Computer Vision, 13, 3, 331–356 (1994)  
© 1994 Kluwer Academic Publishers. Manufactured in The Netherlands.

*Systems and Replication*

**Review and Analysis of Solutions of the Three Point Perspective**

**Pose Estimation Problem**

**Déterminer la pose**

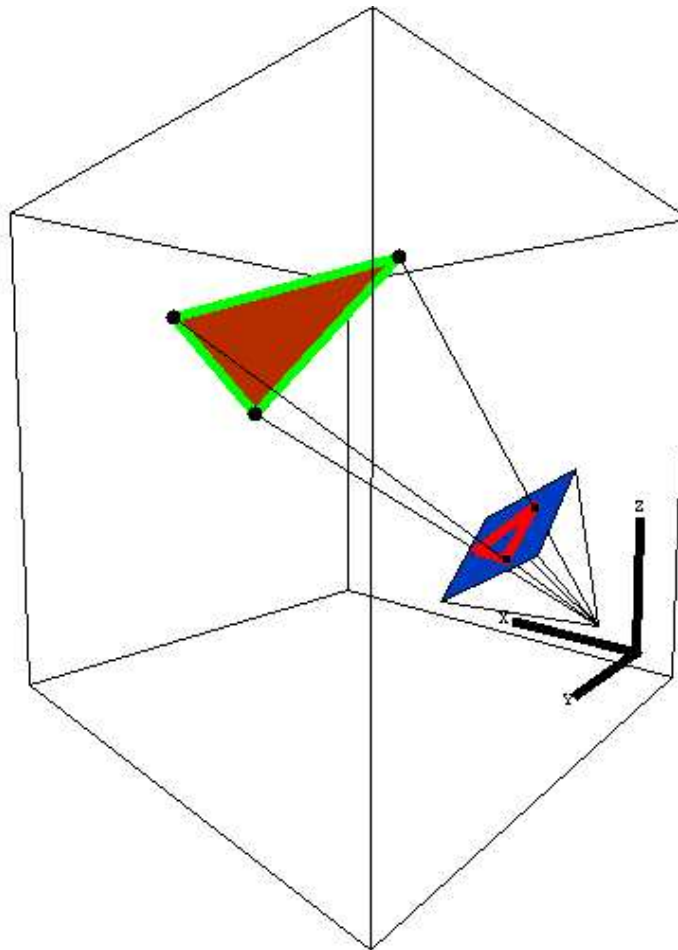
=

Calibration des paramètres externes.

(paramètres internes connus)

# Méthode analytique

- Utilise 3 paires de points correspondants 2D-3D
- Pas de système d'équation linéaires ( $\rightarrow$  analytique)



# Le problème

- Soit trois points 3D quelconques  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , et  $\mathbf{w}$ . Ces points représentent un triangle dans la scène.
- Le triangle  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{f}$  est l'image du triangle  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$
- Soit trois vecteurs  $\mathbf{d}'$ ,  $\mathbf{e}'$  et  $\mathbf{f}'$  normalisés attachés à l'origine et définis comme

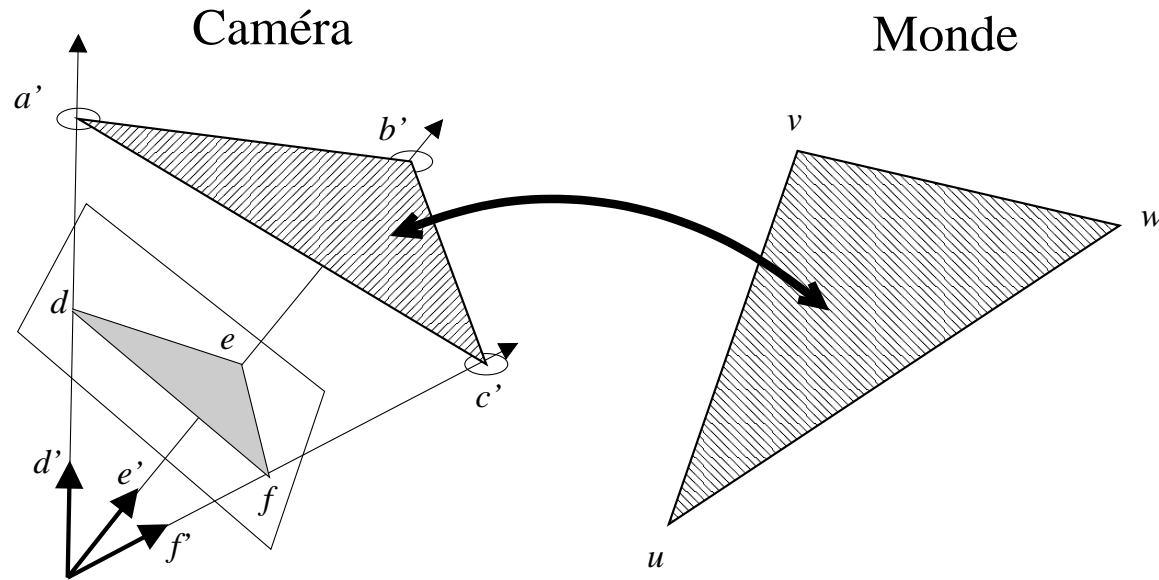
$$\mathbf{d}' = \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} \quad \mathbf{e}' = \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|} \quad \mathbf{f}' = \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|}$$

- Soit le triangle  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$  et  $\mathbf{c}'$  décrivant un triangle dans le système de la caméra, obtenu par

$$\mathbf{a}' = a \mathbf{d}' \quad \mathbf{b}' = b \mathbf{e}' \quad \mathbf{c}' = c \mathbf{f}'$$

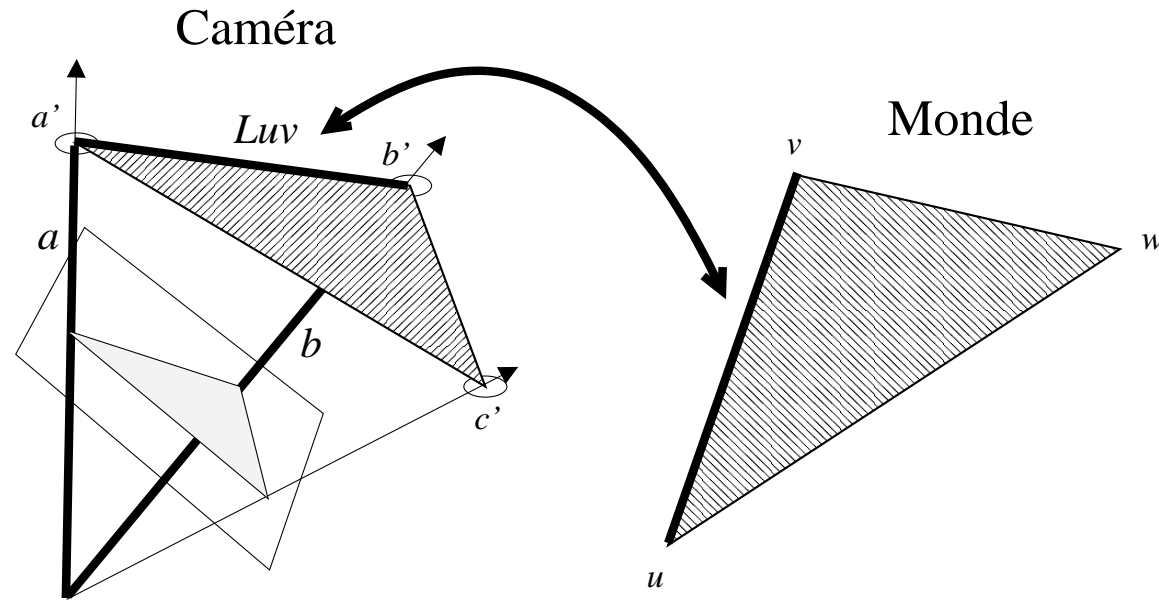
où  $a, b, c$  sont des scalaires.

# Le problème



Il faut donc trouver où placer  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  tels que le triangle formé soit identique à  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

# Le problème

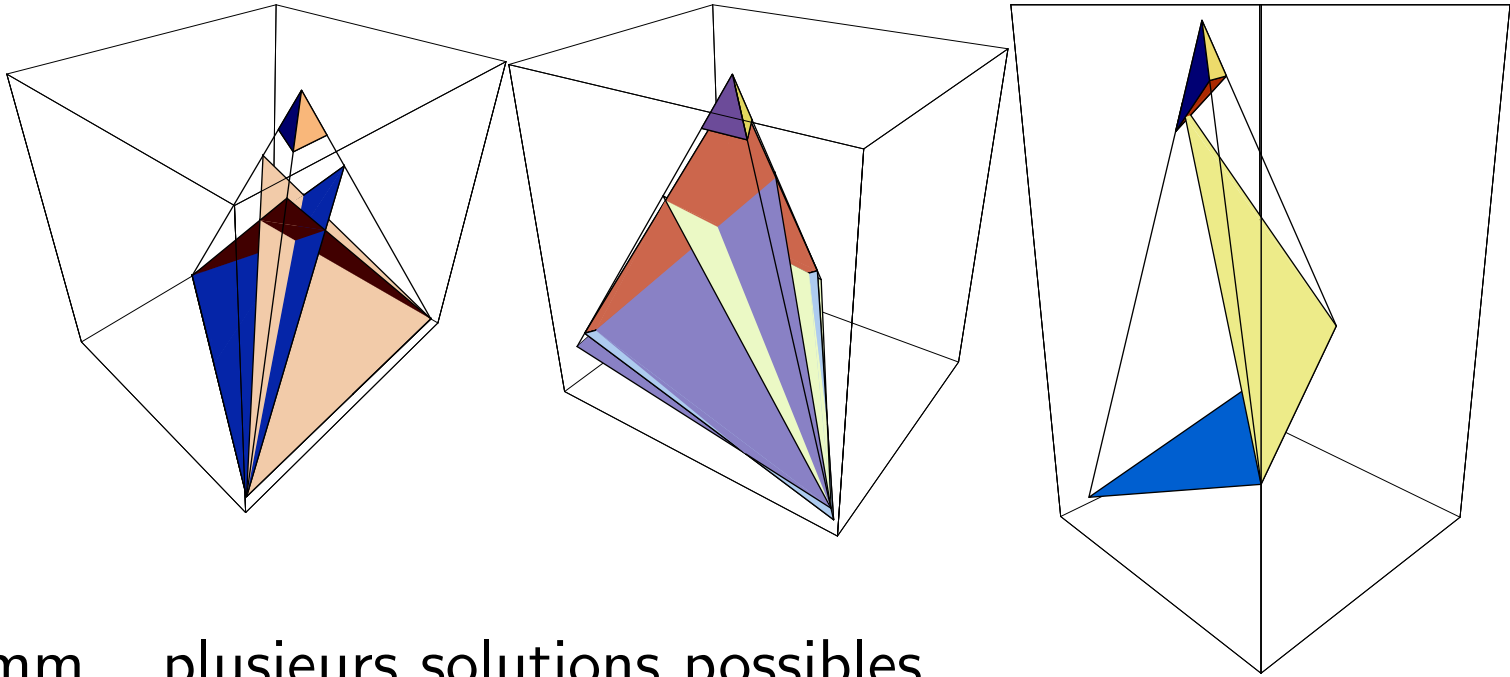


Puisque  $a' = a d'$ , ...  $\rightarrow$  équivaut à trouver  $a, b, c$ .

On peut transposer la longueur  $L_{uv}$  du segment  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  du monde vers le syst'eme de la caméra.

$\rightarrow$  On forme le triangle défini par les longueurs  $a, L_{uv}, b$

# Quelques exemples



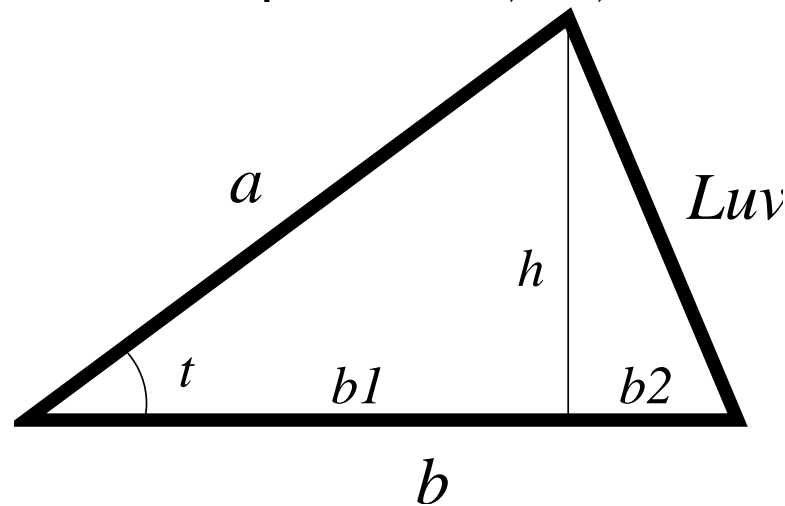
Hummm... plusieurs solutions possibles...

## Reformulons le problème

Soit les longueurs des cotés du triangle  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  tels que

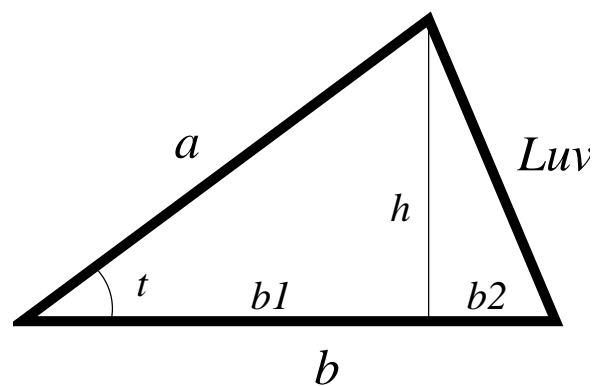
$$L_{uv} = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad L_{vw} = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \quad L_{wu} = \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|$$

et  $a, b, c$  les longueurs des points  $a', b', c'$ .



Quel est le rapport entre  $a, b$ , et  $L_{uv}$  ?





$$h = a \sin \theta$$

$$b_1 = a \cos \theta$$

$$b_2 = b - b_1$$

$$L_{uv}^2 = h^2 + b_2^2$$

$$= a^2 \sin^2 \theta + b^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2ba \cos \theta$$

$$= a^2 + b^2 - 2ba \cos \theta$$

# Équations de base

Si on applique sur chaque triangle  $(a, L_{uv}, b)$ ,  $(b, L_{vw}, c)$ ,  $(c, L_{wu}, a)$ , on obtient

$$L_{uv}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta_{ab}$$

$$L_{vw}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_{bc}$$

$$L_{wu}^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \theta_{ca}$$

→ on cherche  $a, b, c$

→ on connaît  $L_{uv}, L_{vw}, L_{wu}$

→ on connaît  $\cos \theta_{ab}, \cos \theta_{bc}, \cos \theta_{ca}$  (parce que  $\theta_{ab} = \theta_{d'e'}, \dots$ )

⇒ trois systèmes à trois inconnues... hummm....

# Solution

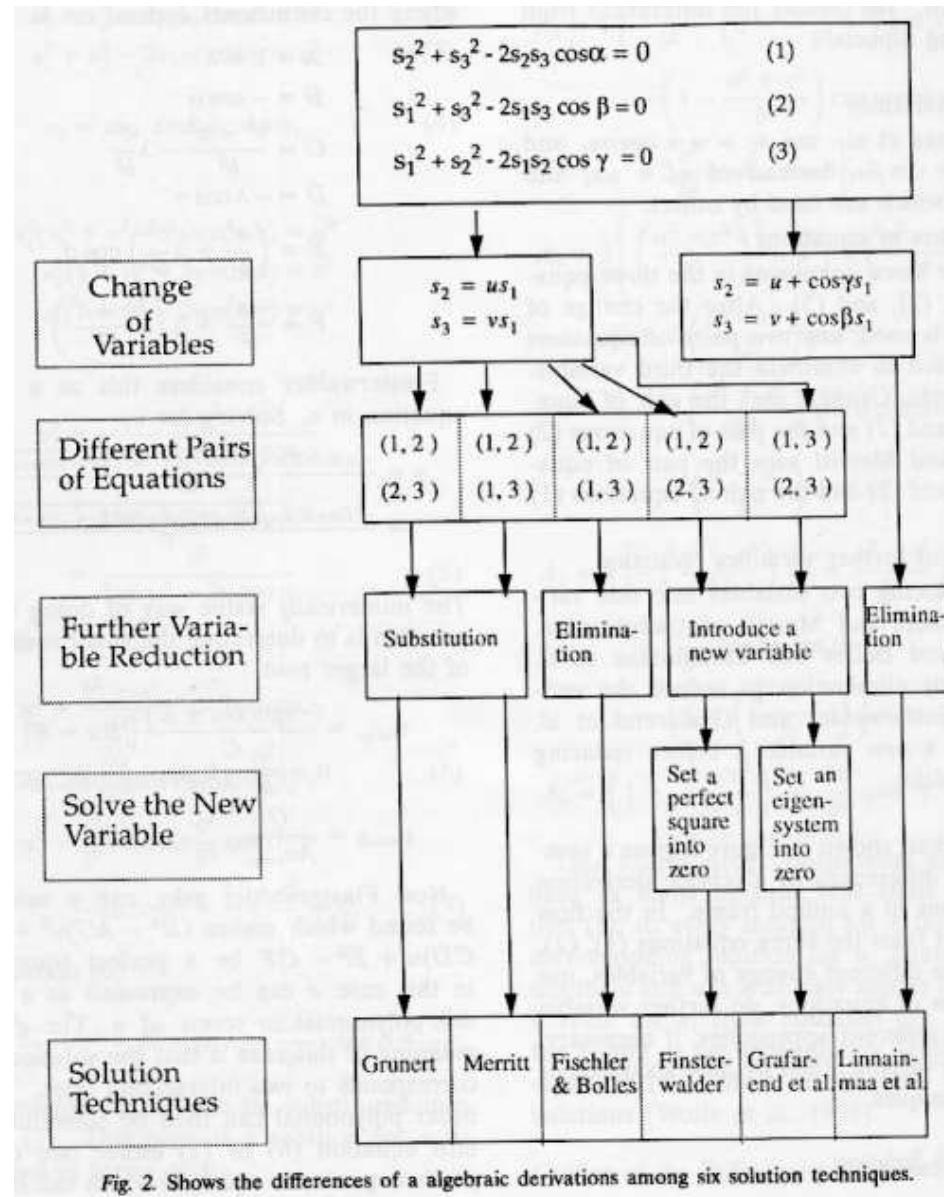


Fig. 2. Shows the differences of a algebraic derivations among six solution techniques.

# Solution

À partir des 3 équations de base, on obtient un polynome de degré 4.

$$g_4x^4 + g_3x^3 + g_2x^2 + g_1x + g_0 = 0$$

avec

$$a = \frac{L_{uv}}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta_{ab} + 1}}$$

La solution de ce polynome nous donne  $a$ , et on peut ensuite retrouver  $b$  et  $c$  directement par les équations de base.

- Il peut y avoir jusqu'à 4 solutions
- Les solutions complexes ou négatives sont éliminées

# (Solution d'un polynome de degré 4)

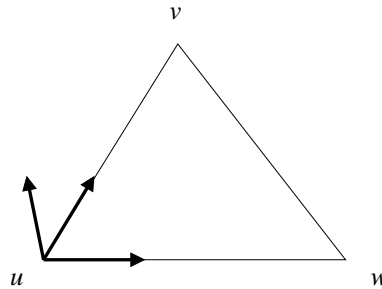
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Solution analytique :

$$\{x \rightarrow \frac{-b}{4a} - \sqrt{\frac{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \frac{2^{\frac{1}{3}}(c^2 - 3bd + 12ae)}{3a \left( 2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2} \right)}}{2}}$$

# Retrouver la transformation

- Le triangle  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  définit un système de coordonnées par rapport à la scène.



$$\text{axe}_x = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad \text{axe}_y = \mathbf{w} - \mathbf{u} \quad \text{axe}_z = (\mathbf{w} - \mathbf{u}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

- Le triangle  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$  définit un système de coordonnées par rapport au système de la caméra.

→ La transformation est obtenue en comparant ces deux systèmes d'axes.

# Stabilité, Robustesse, Solutions multiples

## Stabilité

Si les points  $a, b, c$  et  $u, v, w$  ne sont pas colinéaires, le polynome n'est pas dégénéré et la solution est stable.

## Robustesse

On utilise que 3 points. Que faire lorsque plus de points sont disponibles ?

## Solutions multiples

On obtient jusqu'à 4 solutions. Comment trouver la bonne ?

# Robustesse

Avec plusieurs points...

- Résoudre toutes les permutations de 3 points possibles.  
 $(1,2,3,4) \rightarrow (1,2,3) (1,2,4) (1,3,4) (2,3,4)$
- Pour chaque solution, reprojeter les points 3D non utilisés selon la transformation obtenue
- Calculer l'erreur de reprojektion avec les points 2D correspondants.
- La transformation qui minimise l'erreur gagne.

**Une pierre, deux coups** : le problème des solutions multiples est disparu !