

**IFT 6145**  
**Vision tridimensionnelle**  
**Calibration III**

Sébastien Roy  
Département d'informatique et de recherche opérationnelle  
Université de Montréal

hiver 2005

## En bref...

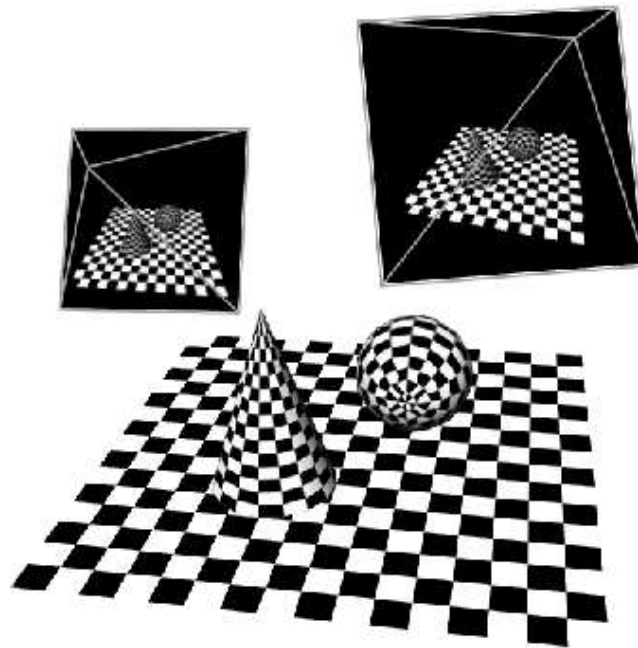
Chapitres 7 de *Trucco & Verri*.

– Géométrie épipolaire 7.3

# Objet de calibration inconnu

Que fait-on si l'objet de calibration n'est pas connu ?

On utilise deux images plutôt qu'une seule.



# Géométrie épipolaire

## Problème

Calculer les paramètres d'une caméra en utilisant uniquement des points mis en correspondance entre deux images d'une même scène, prises sous des points de vue différents.

→ Exprime la relation entre les paramètres externes des deux caméras, pas entre les caméras et la scène.

## 2 cas : Paramètres internes...

- connus (→ matrice **Essentielle E**)
- inconnus (→ matrice **Fondamentale F**)

# Géométrie épipolaire

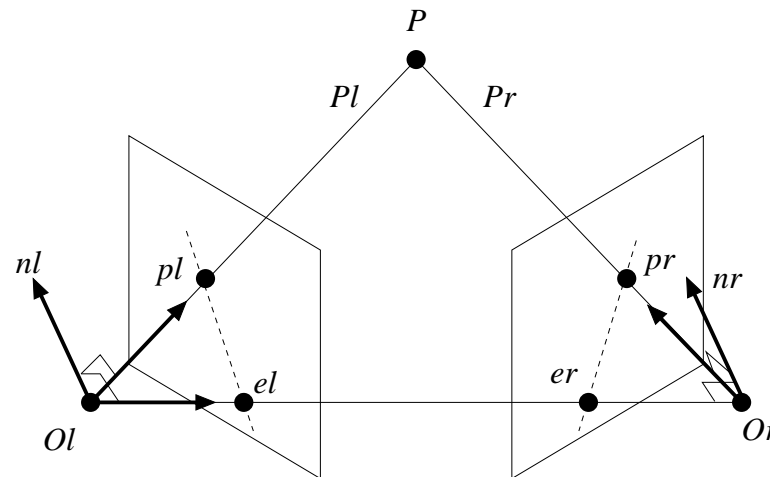
- Suppose un déplacement rigide entre les caméras ( $\mathbf{RT}$ )
- Points images correspondants  
 $\mathbf{p}'_l = (x_l, y_l)$  et  $\mathbf{p}'_r = (x_r, y_r)$ .

$$\mathbf{p}_r^{*\top} \mathbf{E} \mathbf{p}_l^* = 0 \quad \mathbf{p}'_r{}^\top \mathbf{F} \mathbf{p}'_r = 0$$

où  $\mathbf{p}'$  est en pixels et  $\mathbf{p}^*$  est en coordonnées normalisées.

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}'$$

# Géométrie épipolaire



- Le plan épipolaire est défini par les points  $O_l, O_r, P$ .
- La ligne épipolaire est formée par l'intersection du plan épipolaire et du plan de projection de la caméra (ligne  $p_l e_l$ , et ligne  $p_r e_r$ ).
- $P, P_l, P_r$  représentent le même point, dans les systèmes de la **scène**, de la caméra **gauche**, et de la caméra **droite** respectivement.

# Dérivation

Modèle perspective pour les caméras gauche et droite

$$\mathbf{p}'_l = \mathbf{J}\mathbf{A}_l\mathbf{R}_l\mathbf{T}_l\mathbf{P}' = \mathbf{J}\mathbf{A}_l\mathbf{P}'_l$$

$$\mathbf{p}'_r = \mathbf{J}\mathbf{A}_r\mathbf{R}_r\mathbf{T}_r\mathbf{P}' = \mathbf{J}\mathbf{A}_r\mathbf{P}'_r$$

- $\mathbf{P}' = (X, Y, Z, 1)$  représente un point de la scène.
- $\mathbf{P}'_l$  et  $\mathbf{P}'_r$  représentent  $\mathbf{P}'$  dans les système des caméras.
- $\mathbf{p}'_l$  et  $\mathbf{p}'_r$  sont les points images projetés.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_r &= \mathbf{R}_r\mathbf{T}_r\mathbf{P}' = \mathbf{R}_r\mathbf{T}_r\mathbf{T}_l^{-1}\mathbf{R}_l^{-1}\mathbf{P}'_l \\ &= \mathbf{S}_{lr}\mathbf{P}'_l\end{aligned}$$

$\mathbf{S}_{lr}$  est la matrice de passage de la caméra gauche vers la caméra droite.

La matrice de passage  $\mathbf{S}_{lr}$  contient une partie *rotation*  $\mathbf{R}$  et une partie *translation*  $\mathbf{t}$ .

$$\mathbf{S}_{lr} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$

Donc, on a les formulations équivalentes

$$\mathbf{P}'_r = \mathbf{S}_{lr} \mathbf{P}'_l$$

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{R} \mathbf{P}_l + \mathbf{t}$$



## Cas particulier : le monde est à gauche

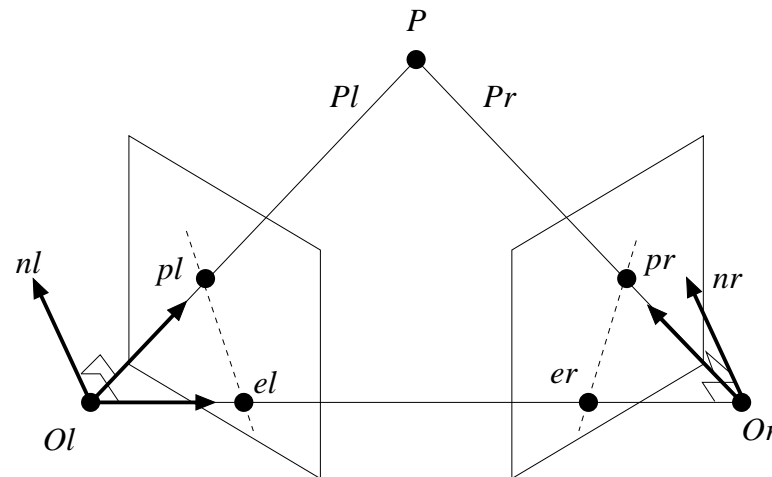
Si on choisi  $\mathbf{R}_l = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{T}_l = \mathbf{0}$ , alors on a

$$\mathbf{S}_{lr} = \left( \mathbf{R}_r \mid \mathbf{R}_r \mathbf{t}_r \right)$$

Donc, dans ce cas, notre définition de  $S_{lr}$  correspond à dire que  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_r$  et  $\mathbf{t} = \mathbf{R}_r \mathbf{t}_r$ .

Rappel :  $\mathbf{t}_r$  est le vecteur rotation utilisé dans la matrice  $\mathbf{T}_r$ .

# Plan épipolaire



Le plan épipolaire est représenté par le vecteur normal  $\mathbf{n}_l$  dans le système de la caméra gauche

$$\mathbf{n}_l = \mathbf{t} \times \mathbf{P}_l$$

où  $\mathbf{t}$  est la composante *translation* de  $\mathbf{S}_{lr}$ .

## (Produit vectoriel)

On peut représenter le produit vectoriel de deux vecteur  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  et  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

par un produit matriciel

$$[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}$$

où la matrice  $[\mathbf{a}]_{\times}$  est définie comme

$$\left[ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

# Plan épipolaire

Le plan épipolaire est représenté par le vecteur normal  $\mathbf{n}_l$  dans le système de la caméra gauche

$$\mathbf{n}_l = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{P}_l$$

où  $\mathbf{t}$  est la composante *translation* de  $\mathbf{S}_{lr}$ .

Ce même plan est représenté par  $\mathbf{n}_r$  dans le système de la caméra droite

$$\mathbf{n}_r = \mathbf{R} \mathbf{n}_l$$

Les points de l'image droite qui sont sur le plan épipolaire doivent satisfaire

$$\mathbf{P}_r^{\top} \cdot \mathbf{n}_r = 0$$

# Plan épipolaire : matrice essentielle

On obtient

$$\mathbf{P}_r^\top \underbrace{\mathbf{R}[\mathbf{t}]_\times}_{\mathbf{E}} \mathbf{P}_l = 0$$

$\mathbf{E}$  est la matrice **essentielle**.

**Important** : Les points  $\mathbf{P}_l$  et  $\mathbf{P}_r$  ne sont pas les points images !

→ On peut multiplier par des facteurs  $(\frac{1}{P_{lZ}}$  et  $\frac{1}{P_{rZ}}$ ) et obtenir

$$\mathbf{p}_r^{*\top} \underbrace{\mathbf{R}[\mathbf{t}]_\times}_{\mathbf{E}} \mathbf{p}_l^* = 0$$

# Plan épipolaire : matrice fondamentale

Puisque

$$\mathbf{p}'_l = \mathbf{A}_l \mathbf{P}_l \quad \mathbf{p}'_r = \mathbf{A}_r \mathbf{P}_r$$

on obtient

$$\mathbf{p}'_r{}^\top \overbrace{\mathbf{A}_r^{-1\top} \mathbf{R}[\mathbf{t}]_\times \mathbf{A}_l^{-1}}^{\mathbf{F}} \mathbf{p}'_l = 0$$

$\mathbf{E}$

$\mathbf{F}$  est la matrice **fondamentale**.

$$\mathbf{p}'_r{}^\top \mathbf{A}_r^{-1\top} \mathbf{E} \mathbf{A}_l^{-1} \mathbf{p}'_l = 0 \quad \mathbf{p}'_r{}^\top \mathbf{F} \mathbf{p}'_l = 0$$

→  $\mathbf{p}'_l$  et  $\mathbf{p}'_r$  sont en pixels !

# Extraction de la rotation et de la translation

On sait que  $\mathbf{E} = \mathbf{R}[\mathbf{t}]_{\times}$ .

Comment factoriser  $\mathbf{E}$  en ses deux composantes ?

La décomposition SVD donne  $\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^{\top}$ , avec  $\mathbf{D} = (1, 0, 0)$ .  
Il y a quatre solutions :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^{\top} & \mathbf{T} = +\mathbf{U}_3 \\ \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^{\top} & \mathbf{T} = -\mathbf{U}_3 \\ \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}\mathbf{V}^{\top} & \mathbf{T} = +\mathbf{U}_3 \\ \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}\mathbf{V}^{\top} & \mathbf{T} = -\mathbf{U}_3 \end{array}$$

avec  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Les points sont toujours devant les caméras...

# Calibration

Comment calibrer les matrices essentielles ou fondamentales ?

→ En utilisant des points mis en correspondance entre l'image gauche et l'image droite.

- Paramètres internes connus  $\Rightarrow$  matrice essentielle  $\mathbf{E}$
- Paramètres internes inconnus  $\Rightarrow$  matrice fondamentale  $\mathbf{F}$

Pour le moment, prenons la calibration de  $\mathbf{F}$ .



# Algorithme des 8 points

Algorithme le plus simple et très populaire.

Soit  $N$  points (avec  $N \geq 8$ ) mis en correspondance entre l'image gauche et l'image droite,  $(x_i, y_i)$  et  $(u_i, v_i)$ .

On a l'équation

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

qui se reformule comme...

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_9 \end{pmatrix} = 0$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 u_1 & x_1 v_1 & x_1 & y_1 u_1 & y_1 v_1 & y_1 & u_1 & v_1 & 1 \\ x_2 u_2 & x_2 v_2 & x_2 & y_2 u_2 & y_2 v_2 & y_2 & u_2 & v_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N u_N & x_N v_N & x_N & y_N u_N & y_N v_N & y_N & u_N & v_N & 1 \end{pmatrix}$$

Système linéaire homogène...  $\rightarrow$  SVD!

# Stabilité numérique

Qu'est-ce qui arrive si les images ont une taille de  $2000 \times 2000$  ?

Pour deux points correspondants  $(x_i, y_i) = (1000, 1000)$  et  $(u_i, v_i) = (1000, 1000)$  on aurait

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1000000 & 1000000 & \dots & 1000 & 1000 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Problème ? Oui!!!!  $\Rightarrow$  la matrice  $\mathbf{A}$  est mal conditionnée

**Suggestion** : Normaliser les points des images.

On normalise en fonction de la taille de l'image  $(s_x, s_y)$ .

Par exemple

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{2}{s_x} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{s_y} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On résoud le système

$$\mathbf{p}'_r{}^\top \mathbf{G}^\top \mathbf{F}^* \mathbf{G} \mathbf{p}'_l = 0$$

et la solution  $\mathbf{F}^*$  est reliée à la matrice fondamentale par la relation

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}^\top \mathbf{F}^* \mathbf{G}$$

Et voilà !